Multiplikation genom århundraden

av **Jenny Spett**

Bygger på en uppsats med samma namn inom kursen ***Matematikens historia i skolan***, Högskolan Dalarna 2008

För många elever i skolan kan multiplikation upplevas som något oöverstigligt. Addition och subtraktion kan de förstå sig på men inte multiplikation. Utan förståelse för multiplikation blir det mesta i matematiken dimmigt, grått och väldigt tråkigt. Vägen till en produkt är många. Genom att titta på historien och se hur människan har räknat multiplikation genom århundradena finns många vägar att gå så att fler eleverna kan komma vidare i matematiken.

I kursplanen för matematik står det att eleven ska ”förstå och kunna använda multiplikation” i slutet av skolår fem. Förståelsen är viktig för att användandet ska vara meningsfullt och givande. Att inte behärska multiplikation blir en stor bromskloss i det fortsatta räknandet. ”Matematik har en gång ansetts som svår och förbehållen experter.” (Ahlqvist 2000). Människan har uppfunnit många metoder för att övervinna hindret multiplikation. Genom att visa eleverna flera olika metoder kan de återerövra lusten att lära, hitta farten i räknandet igen och upptäcka mer av matematiken.

Med tanke på den uppsjö av metoder för räkning med multiplikation som existerar är jag förvånad över att skolan inte har anammat fler metoder i undervisningen. I den mångfald av metoder som finns att tillgå handlar det om att hitta den eller de metoder som fungerar för varje enskild elev.

På vägen till att grundtabellerna sitter i ryggmärgen är nedvikningsräkning ett utmärkt hjälpmedel. Fingrarna har man alltid med sig. Jag blev helt fascinerad av korsräkning. Varför får man inte lära sig den i skolan? Metoden påminner mycket om den traditionella tabelluppställningen men den tar bort flera mellanled vilket gör att antalet felräkningar minskar. Jag, och många med mig, vill räkna effektivt. Målet är att förstå hur man ska räkna ut ett tal. Vilken väg man tar dit spelar ingen roll så länge man når målet. Eftersom vi människor är olika behövs många olika vägar för att alla ska tycka om sin väg fram till målet.

Viss information har jag funnit på Internet. När jag sökte efter ”multiplikation” på youtube.com hittade jag en mängd filmer där människor från hela världen visar olika metoder att räkna. Jag har tagit med en del av dessa metoder. Deras tillförlitlighet är naturligtvis klart begränsad, men jag har kontrollräknat exemplen.

Tabeller

I litteraturen har jag funnit två sätt att nedteckna multiplikationstabellerna (Hvenekilde 1993). Dels kan man skriva ner varje tabell var för sig där man kan sätta multiplikatorn som första eller andra faktor. En annan variant är att skriva ihop tabellerna i ett kvadratiskt nät som här intill. Tabell 1–10 kallar jag fortsättningsvis grundtabellerna.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fingerräkning

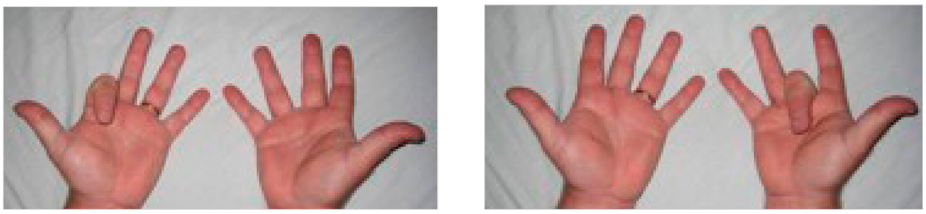
I Sverige har det under vissa tidsepoker, t ex så sent som på 1980-talet, ansetts fult att räkna på fingrarna. Att räkna på fingrarna är inte att räkna på riktigt. Idag uppmuntras elever att räkna på fingrarna eller att använda konkret material i räkningen. Fingrarna och det konkreta materialet blir till hjälp att förstå den abstrakta räkningen. De exempel på fingerräkning som jag hittat handlar uteslutande om ental som multipliceras. De är alltså ett sätt att multiplicera de tal som finns i grundtabellerna.

Nians tabell

En metod för nians tabell är att hålla båda händerna framför sig. Numrera fingrarna 1–10 från vänster till höger som i bilden här intill.

Om man vill räkna $2 \cdot 9$ viker man ner andra fingret. Fingrarna till vänster om det nedvikta fingret representerar tiotal och fingrarna till höger representerar ental. I exemplet $2 \cdot 9$ har vi ett finger till vänster och 8 till höger, $2 \cdot 9 = 18$

För att räkna ut $9 \cdot 8$ viker man ner åttonde fingret. Då har vi 7 fingrar till vänster och 2 till höger om det nedvikta fingret. Vi får $9 \cdot 8$ till 72.

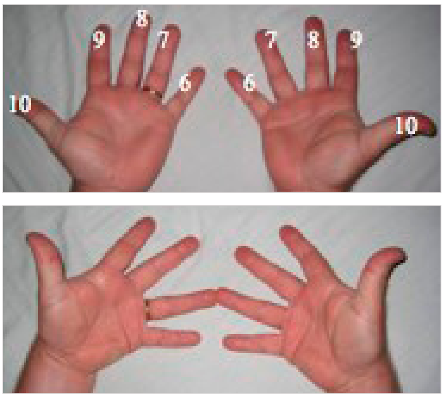


nians tabell

Broräkning

En annan fingerräkningsmetod som fungerar för fler än en grundtabell är broräkning (Hvenekilde 1991). Det räcker med att kunna grundtabell 1–4 för att kunna räkna alla tal upp till grundtabell 10.

Man håller upp båda händerna framför sig med handflatan uppåt. Numrera fingrarna inifrån och ut, börja med 6. För att beräkna $7 \cdot 7$ sätter man ihop "7 fingrarna" så att det bildas en bro. Bron (ringfingrarna) tillsammans med de fingrar som är under bron (lillfingrarna) är tiotal. I exemplet har vi 4 st tiotal, alltså 40. Sen tar man de fingrar som är kvar över bron och multiplicerar vänster hand med höger. I exemplet har vi 3 fingrar över bron på vänster hand och lika många på höger hand. $3 \cdot 3 = 9$. Slutligen adderar vi produkterna med varandra. $40 + 9 = 49$. Vi får $7 \cdot 7 = 49$.

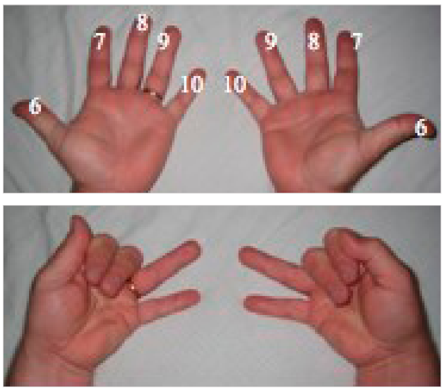


broräkning

Nedvikningsräkning

Ett annat sätt som bygger på samma princip som broräkning men som är visuellt tydligare är nedvikningsräkning. Det handlar fortfarande om att räkna ut tal i grundtabellerna upp till tio med hjälp av tabell 1–4.

Fingrarna numreras från 6–10, utifrån och in. För att räkna ut vad $8 \cdot 8$ är fäller vi ner alla fingrar upp till och med 8 på höger hand och alla fingrar upp till och med 8 på vänster handen. De nedfällda fingrarna representerar tiotalen. Vi har 6 st så det blir $6 \cdot 10 = 60$. Fingrarna som fortfarande är uppfällda multiplicerar vi med varandra, höger hand med vänster hand. $2 \cdot 2 = 4$ Vi lägger ihop våra tal, $60 + 4 = 64$. $8 \cdot 8$ är alltså 64.



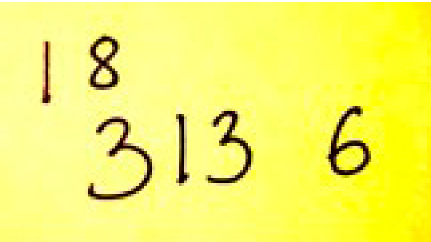
nedvikningsräkning

Algoritmer

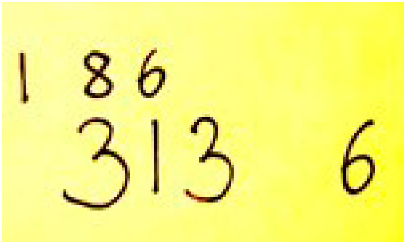
En algoritm kan sägas vara en uppsättning instruktioner för att lösa en uppgift, som från givna förutsättningar med säkerhet leder till något givet mål. Den kan också beskrivas som en systematisk procedur för hur man genom ett begränsat antal steg utför en beräkning eller löser ett problem.

Strykningsmetoden

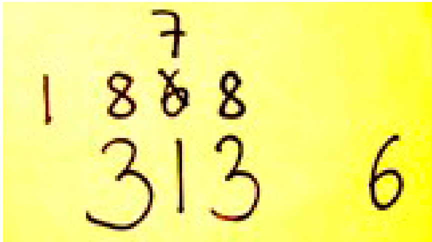
Denna metod är anpassad efter tal där en av faktorerna är ensiffrig. För den andra faktorn finns ingen begränsning. Man räknar från vänster till höger (Thompson 1996). Exempel: 6 · 313.



Först beräknas 3 · 6 …



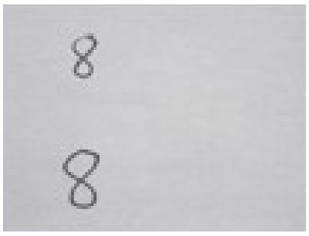
… sedan 1 · 6 …



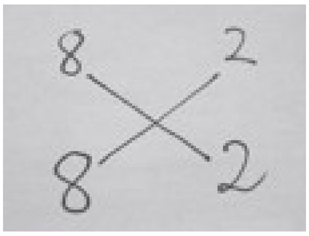
… slutligen 3 · 6. 1 adderas till 6. Eftersom 6 inte längre används stryks denna, därav metodens namn. Produkten blir 1878.

Tabula pigri – latmanstavlan

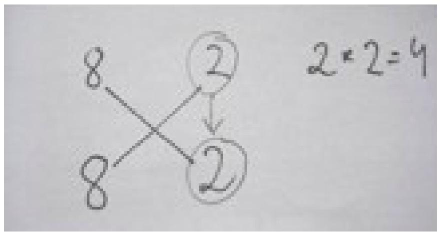
Under 1500-talet i Sverige (och Europa) ansågs multiplikation som ytterst komplicerat. Särskilt den nedre högra fjärdedelen av grundtabellerna var så svår att det i många räkneläror fanns ett speciellt hjälpmedel som kallades Tabula pigri, latmanstavlan (Ahlqvist 2000). Om den ska bli ett hjälpmedel ska talen man vill multiplicera vara större än 5. Den övre hälften av grundtabellerna förväntades man kunna räkna ut i huvudet.



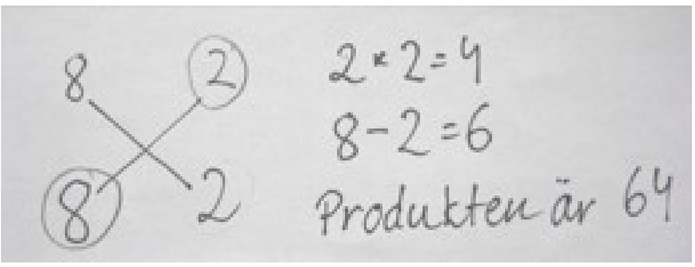
Vi vill räkna ut 8 · 8. Siffrorna skrivs under varandra.



Till höger om siffrorna skrivs det som saknas upp till 10, dvs 2 resp 2. Mellan siffrorna ritas ett kryss.



Först beräknas produkten av talen till höger. 2 · 2 = 4



Sen räknar man ut differensen mellan talet längst ner till vänster och det övre högra talet, 8 – 2 = 6. Subtraktionens svar ger tiotalssiffran, dvs 6. Svaret blir 60 + 4 = 64

Egyptisk multiplikation

Den egyptiska multiplikationen är en av de tidigaste nedskrivna uppställningar som man känner till. Metoden finns nedskriven på Rhindpapyren, ett ark fullt av matematiska beräkningar som dateras till 1600 f Kr (Thompson 1996).

Egyptierna använde sig av en fördubblingsmetod och undvek på så sätt den svårare multiplikationen.

I egyptisk multiplikation sätter man alltid 1 överst i vänstra kolumnen. I den högra sätter man en av de två faktorerna. Sen fördubblar man stegvis talen i kolumnerna tills man i den vänstra har de tal man behöver för att få summan av den andra faktorn i multiplikationen. De talen markeras med en punkt eller ett streck och motsvarande tal iden vänstra kolumnen adderas och då har vi kommit fram till svaret.

Problem nr 32 på Rhindpapyren ser ut som följer (översatt till våra siffror och vår läsriktning):

	1	12	
	2	24	
/	4	48	
/	8	96	summa 144

Forskare har tolkat problemet som en multiplikation av $12 \cdot 12$. 12 står överst i högra kolumnen och om man lägger ihop de markerade talen i vänstra kolumnen (4 och 8) får man 12. $12 \cdot 12 = 144$

Den ryske bondens algoritm

Det här är en metod som användes av ryska handelsflottan under mitten av 1900-talet (Olsson 1999). Den påminner om den egyptiska multiplikationen, men här skrivs båda faktorerna överst i två kolumner. Talen i den vänstra kolumnen halveras successivt och talen i den högra kolumnen fördubblas successivt. Låt oss räkna $23 \cdot 17$. Det spelar ingen roll vilket tal som står till vänster men eftersom den kolumnen kommer att halveras går det fortast om vi sätter det minsta talet där.

17	23
8	46
4	92
2	184
1	368

17 ska halveras och 23 fördubblas. Vid halvering behåller man endast heltalet och avrundar nedåt. Hälften av 17 blir 8,5. Under 17 ska det stå 8. En fördubbling av 23 ger 46, under 23 ska det stå 46.

Halveringen och dubbleringen fortsätter på samma sätt tills vänsterkolumnen kommer till 1.

17	23
~~8~~	~~46~~
~~4~~	~~92~~
~~2~~	~~184~~
1	368

Nästa steg är att stryka alla rader med jämnt tal i halveringskolumnen.

De tal i dubbleringskolumnen som inte är strukna adderas.

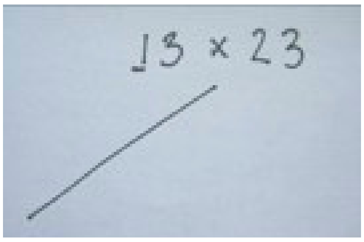
$23 + 368 = 371$

$17 \cdot 23$ blir alltså 371.

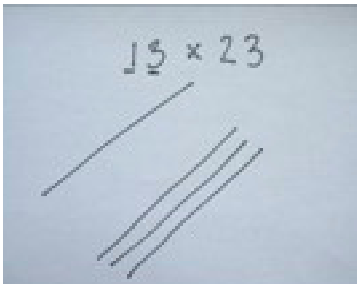
Streckmultiplikation

Streckmultiplikation är en enkel metod som innehåller många steg. Felmarginalen är däremot liten till skillnad från den i Sverige vanligaste tabellmetoden. Metoden är bra för enklare uträkningar, upp till tresiffriga tal.

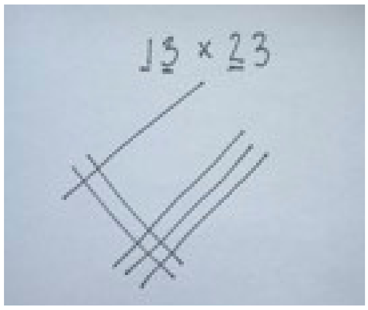
Som exempel beräknar vi 13 · 23:



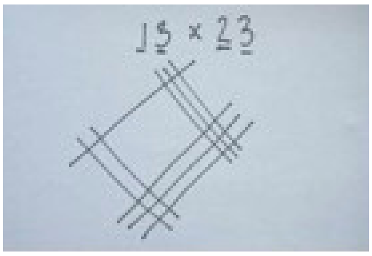
Vi börjar med talet längst till vänster, ettan i 13 och drar ett diagonalt streck.



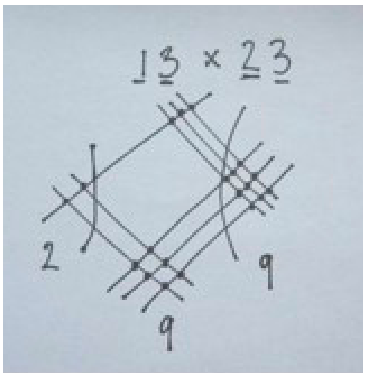
Sen tittar vi på trean, andra siffran från vänster. Tre streck dras, lite under det första strecket, i en samlad klump.



Turen har nu kommit till tvåan i 23. Vi drar 2 streck diagonalt åt andra hållet som korsar trettons streck.

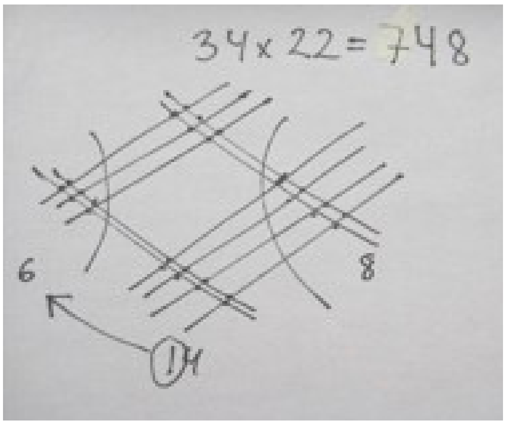


Vi drar sen tre streck, som symboliserar trean i 23, lite till höger om tvåans streck.



Avslutningsvis räknas de korsningar som uppstår ihop. De knutpunkter som är längst till vänster är 2. Längst till höger är det nio och i mitten är det 3+6 knytpunkter. Vårt resultat blev 299.

Ytterligare ett exempel på streckmultiplikation, 34 · 22:



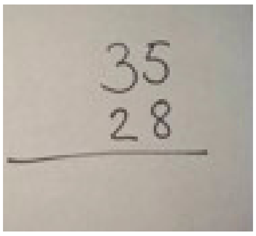
Här blir korsningarna i mitten fler än 10, tiotalet förs då över till vänster, hundratalen.

Metoden fungerar för hur stora tal som helst, det är egentligen samma uppställning (fast grafisk) som vår vanliga. Ental för sig, tiotal för sig osv.

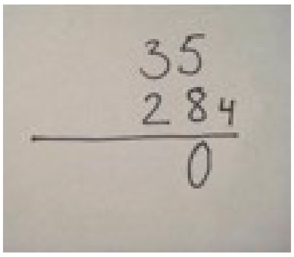
I praktiken blir metoden däremot svår när talen blir för stora. Om tal med mer än 6 siffror ingår blir det så många streck att man lätt tappar överblicken.

Korsräkning – per crocetta

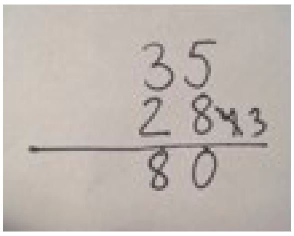
Den här metoden passar bäst för multiplikation med tvåsiffriga faktorer. Uppställningen är som vid traditionell tabellmultiplikation (Thompson 1996). Minnessiffrorna sätts inte ut i per crocetta. Jag sätter ut dem här för att öka tydligheten. Exempel, 35 · 28:



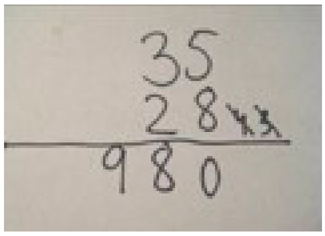
Den första uppställningen.



8 · 5 = 40
Nollan sätts under entalen, fyran hålls i minne eller skrivs på strecket, till höger om talen.



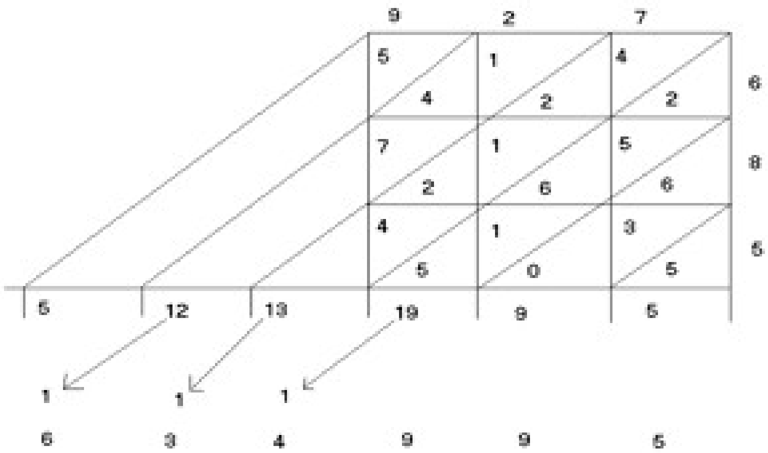
Multiplicera korsvis.
(8 · 3) + (2 · 5) = 34
Addera minnessiffran.
34 + 4 = 38
Åttan sätts till vänster om nollan, trean är ny minnessiffra.



2 · 3 = 6
Addera minnessiffran.
6 + 3 = 9
Nian skrivs till vänster om åttan.

Nätverksmultiplikation

Ett annat sätt att beräkna multiplikation som var vanligt i Italien på 1500-talet är nätverksmultiplikation. Låt oss räkna ut 927 · 685. Man börjar med att rita upp ett rutnät, se bilden här nedan. Antal kolumner och rader bestäms av talens storlek. Sen skriver man 927 ovanför rutorna och 685 till höger om rutorna. Produkterna skrivs i rutorna, tiotalen överst och entalen under. Avslutningsvis adderar man snett nedåt från höger till vänster. Eventuella minnessiffror adderas till kommande diagonal. 927 · 685 = 634995.



Algoritm för multiplikation enligt Sun Zi

Sun Zi var en kinesisk matematiker som förmodas ha skrivit sitt verk någon gång mellan 280 och 470 e Kr (Johansson 2004). Sun Zi beskriver noggrant algoritmen för multiplikation till skillnad från addition och subtraktion där en del kunskap tas för given. Nedan finns två exempel.

		3	1
	3	1	

Talen skrivs in i ett rutnät. Talen som ska multipliceras står i den övre och undre raden. I mitten skrivs svaren på beräkningarna. Entalssiffran i den nedre raden ska stå rakt under den ”högsta” siffran i den övre raden.

		3	1
	9	3	
	3	1	

Vi börjar med att multiplicera den första siffran i översta raden, 3, med varje siffra i 31.

			1
	9	3	
		3	1

Därefter tar vi bort siffran i den övre raden som vi använt och flyttar nedre raden ett steg åt höger. Det gör vi för att nästa beräkning, $1 \cdot 31$ ska få rätt storlek.

			1
	9	6	1
		3	1

Vi fortsätter att multiplicera den återstående siffran i övre raden med den nedre raden, 31. Trean i 31 adderas med trean i 93.

	9	6	1

Avslutningsvis tar vi bort de återstående siffrorna i övre och nedre raden så att bara svaret blir kvar.

	1	5	7
3	4		

Metoden fungerar även för större tal. Här utför vi multiplikationen $157 \cdot 34$. Entalet i den nedre raden skrivs rakt under det högsta talet i övre raden.

	1	5	7
3	4		
3	4		

$1 \cdot 4 = 4$
$1 \cdot 3 = 3$

		5	7
5	1	0	
	3	4	

$5 \cdot 4 = 20$, 2 i minne
$5 \cdot 3 = 15$ addera minnessiffran så får vi 17
$34 + 17 = 51$

			7
5	3	3	8
		3	4

$7 \cdot 4 = 28$, 2 i minne
$7 \cdot 3 = 21$ addera minnessiffran så får vi 23
$510 + 23 = 533$

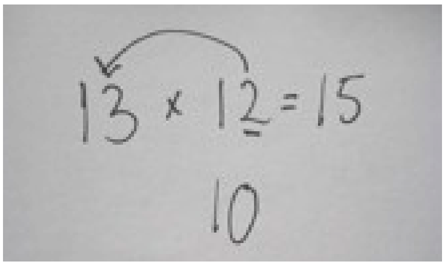
5	3	3	8

Ta bort alla siffror utöver svaret.

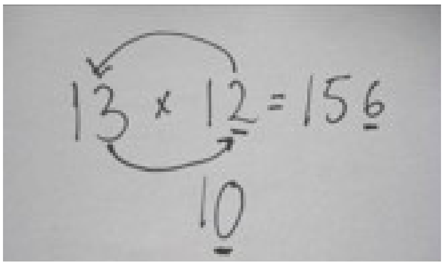
Den glade indiern

Följande metod har jag hittat på Internet. Det är en metod som bara fungerar för vissa tal. Jag kallar metoden för ”Den glade indiern” för läraren var så strålande glad när han gick igenom den. Läraren kommer från Indien och här märks det att indier lär sig högre multiplikationstabeller utantill (Hveneklide, s. 106). Detta är en specifik metod för att räkna tal från 11 · 11 till 19 · 19 och kan beskådas på www.youtube.com/watch?v=hLdKsKep1og (2008-08-21).

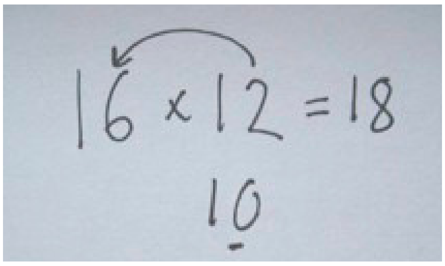
Här följer två exempel:



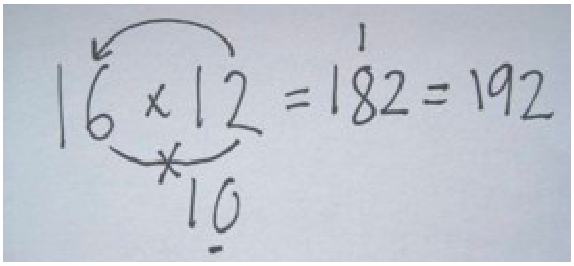
Beräkna 13 · 12. Vi utgår från 10 som är basen. 12 är 2 mer än 10 så den 2:an adderas till 13. Summan, 15, skrivs direkt efter summatecknet.



Beräkningen avslutas med att entalen multipliceras. 3 · 2 = 6 skrivs efter 15. 13 · 12 = 156



Beräkna 16 · 12. 12 är 2 mer än 10, den tvåan adderas till 16.
18 skrivs direkt bakom summatecknet.



Entalen, 6 och 2 multipliceras. Produkten blir 12. Eftersom basen är 10 (med en nolla) ska det bara vara en siffra till efter 18. Ettan i 12 hamnar ovanför åttan, de adderas. Slutsumman blir 192.

Nämnaren
på nätet

Litteratur

Ahlqvist, Thomas. *Matematik i Sverige under 1500-talet*, 2000, s. 3, 19

Hveneklide, Anne (red.). *Matte på ett språk vi förstår*, Stockholm 1991 s. 101ff, 105, 33

Lie, Branka i Hveneklide, Anne. *Matte på ett språk vi förstår*, Stockholm 1991 s. 139

Johansson, Bo Göran. *Matematikens historia*, Lund 2004 s. 163ff

Mcleish, John. *Matematikens kulturhistoria*, Falun 1994, s. 105f

Olsson, Stig. *Matematiska nedslag i talens värld*, Värnamo 1999. s. 33ff.

Thompson, Jan. *Matematiken i historien*, Lund 1996, s. 27ff, 366, 367

Streckmultiplikation www.youtube.com/watch?v=A8lcbmclkcl

Den glade indiern www.glad2teach.co.uk/fast_maths_calculation_tricks.htm

www.youtube.com/watch?v=hLdKsKep1og.