Mormors glasögon och räkning modulo nio

I förra numret av Nämnaren beskrevs en metod för att kontrollera uträkningar i multiplikation. Metoden kallades där för ”mormors glasögon”, en benämning som använts av en folkskollärare på Åland, och den bygger på räkning med siffersummor. Närmare bestämt går man tillväga så att man först räknar ut de båda faktorernas (upprepade) siffersummor, multiplicerar dessa och tar siffersumman igen; sedan jämförs denna sista siffersumma med siffersumman för den produkt man hade kommit fram till. Om de inte överensstämmer har man utfört multiplikationen felaktigt. Det noterades också att man kunde snabba upp sina kontrollräkningar genom att utelämna eventuella nior, eller andra siffror vars summa är nio.

Det kanske kan förefalla som om dessa mormors glasögon är en listig men perifer och lite udda räknemetod. Inget kunde vara mera fel. Det handlar i själva verket, i lätt förklädnad, om ett av de viktigaste och mest centrala begreppen inom modern algebra – nämligen så kallad moduloräkning. Och skälet till att mormors glasögon fungerar kan i matematiska termer uttryckas som att ”moduloräkning respekterar ringstrukturen”. Låt mig nu i begripliga ordalag försöka förklara vad detta betyder.

De hela talen $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ fungerar bra för tre av våra fyra räknesätt, nämligen addition, subtraktion och multiplikation. I abstrakt algebra betyder en ring precis en mängd på vilken man kan räkna med plus, minus och gånger. Om vi alltså låter bokstaven $\mathbf{Z}$ beteckna mängden av alla hela tal så kan vi säga att $\mathbf{Z}$ är en ring. Det finns också många andra ringar, och ett särskilt intressant exempel för oss är ringen $\mathbf{Z}_9$. Denna består bara av nio element: $[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]$, som brukar kallas restklasser, eftersom de betecknar rester man får efter division (med nio). Man räknar med dessa på vanligt vis, med den lilla skillnaden att man hela tiden drar bort eller lägger till multiplar av 9 så att man håller sig mellan 0 och 8. Man säger att man räknar *modulo nio*. Exempelvis har man $[4] + [6] = [1]$, $[5]–[7] = [7]$ och $[6] \cdot [5] = [3]$.

Man sätter sedan hakparenteser kring alla heltal och låter $[m] = [n]$ så snart m och n ger samma rest vid division med nio. Det vill säga $[10] = [-8] = [1]$, $[-2] = [16] = [7]$, $[30] = [12] = [3]$ och så vidare. Detta att ”moduloräkning respekterar ringstrukturen” betyder nu helt enkelt att man kan välja att göra sina additioner, subtraktioner och multiplikationer före eller efter det att man skriver dit hakparentesen, resultatet blir ändå detsamma: $[m \pm n] = [m] \pm [n]$, $[m \cdot n] = [m] \cdot [n]$.

Nu tillbaka till mormors glasögon. Vårt talsystem har basen 10 och alla tiopotenser tillhör restklassen $[1]$, eftersom $[10] = [1 + 9] = [1]$, $[100] = [1 + 99] = [1]$, $[1000] = [1 + 999] = [1]$ och så vidare. Det följer att siffersumman av ett heltal precis är dess rest efter division med nio. (Fast för tal delbara med nio ska man då välja ”resten” 9 snarare än 0.) Annorlunda uttryckt, att ta siffersumman av ett tal är som att sätta dit hakparenteser runt talet. Exempelvis får vi

$$\begin{aligned}[357] &= [3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 1] \\ &= [3] \cdot [1] + [5] \cdot [1] + [7] \cdot [1] \\ &= [3] + [5] + [7] = [6]\end{aligned}$$

och

$$[4031] = [4] + [0] + [3] + [1] = [8].$$

Detta förklarar att man får samma svar om man tar produkter av siffersummorna eller om man tar siffersumman av produkten – siffersummetagning respekterar ringstrukturen! För multiplikationen $357 \cdot 4031 = 1439067$ får vi alltså $[357 \cdot 4031] = [357] \cdot [4031] = [6] \cdot [8] = [3]$ vilket stämmer med att $[1439067] = [3]$. Eftersom tal delbara med nio ger noll vid räkning modulo nio inser man också varför man får utelämna nior i kalkylerna. Observera dock baksidan av denna medalj – man kan även lägga till nior utan räkningarna ändras! Om man tolkar en slarvigt skriven nolla i svaret 1439067 som en nia så kommer mormors glasögon inte att se någon skillnad. Till sist kanske jag borde påpeka att moduloräkning i sig inte har någon speciell koppling till talet nio, den fungerar lika bra för alla heltal –

och i viss mening allra bäst för primtal.

Mikael Passare