CHRISTER BERGSTEN

Vad är en parabel?

Med parabeln som exempel visas hur den historiskt-kulturella utvecklingen av idéer, uttrycksformer, metoder och verktyg kan berika och utveckla ett matematiskt begrepp och hur detta kan uppfattas. Vilka didaktiska problem och möjligheter ger detta i dagens skola?

En inblick i dagens skolmatematik visar att begrepp och metoder ofta hanteras isolerade, utan att integreras i ett större sammanhang, och att särskilt i gymnasiet det mesta bearbetas med algebraiska verktyg. Men just detta speciella matematiska symbolspråk vållar många elever stora problem, både vad gäller symbolernas mening och innebörd och hur de hanteras.

Sammantaget kan detta för skolelever ge en bild av matematiken som osammanhängande och svårförståelig, och de tillämpningar som lyfts fram i motiverande syfte blir lätt mer en typ av utsmyckning än en del av en integrerad matematisk kunskap. Ett exempel som kan illustrera detta är andragradskurvan. En mängd typer av problem och tekniker som behandlas i skolmatematiken är relaterade till denna klassiska graf. Några välkända exempel är följande:

– begreppet kvadratrot, som kan beröra en grundläggande utvidgning av talbegreppet från rationella till reella tal

– lösning av andragradsekvationer (med kvadratkomplettering) och därmed även en utvidgning av talbegreppet från reella tal till komplexa

– ett grundläggande exempel på polynom och polynoms egenskaper

– andragradspolynom är i skolan ofta den första typen av funktioner som studeras i samband med derivata och optimering.

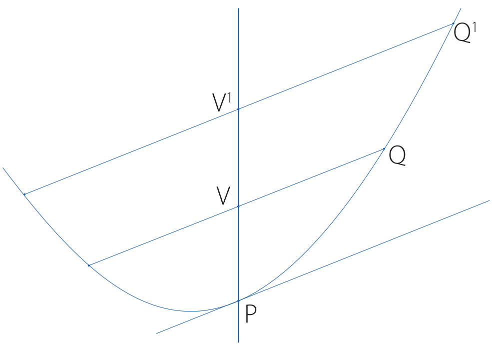
– i tillämpningar ofta kallad parabel, som studerades grundligt redan i den klassiska grekiska geometrin, vars reflektionsegenskap utnyttjas i parabolantenner och vars form återfinns i kaströrelsen

Hur man uppfattar eller förstår vad en andragradskurva är präglas av hur den beskrivs, definieras, behandlas, används, osv. Här spelar olika uttrycksformer en central roll, inte bara för hur en individ uppfattar ett sådant matematiskt ”fenomen”, utan också hur ”fenomenet” utvecklas genom historien och även påverkar utvecklingen av matematiken själv.

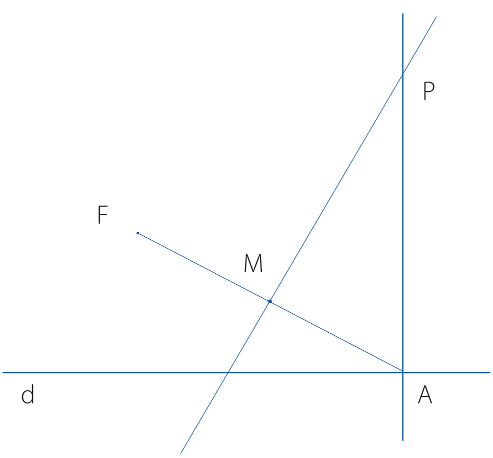
För Euklides, Arkimedes och Apollonius för mer än tvåtusen år sedan, var parabeln ett rent geometriskt objekt som definierades med ”vanligt” språk och analyserades mer eller mindre fullständigt med den konstruktiva och deduktiva geometrins verktyg (se Thompson, 1991). Arkimedes lyckades även, utan vår tids algebraiska verktyg, att bestämma arean av ett parabelsegment med hjälp av en konvergent geometrisk summa (se t ex Popp, 1978, s. 96 - 105).

Det är intressant att jämföra dagens algebraiska beskrivning av en andragradskurva med en ekvation i ett koordinatsystem med den generella geometriska egenskap hos en parabel som Arkimedes beskriver i följande lemma (se t ex Great Books, 1952; se även figuren nedan). Observera att den moderna notationen för kvadrat inte finns hos Arkimedes.

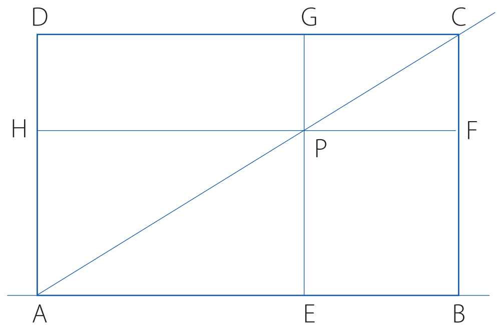
If from a point on a parabola a straight line be drawn which is either itself the axis or parallel to the axis, as PV, and if from two other points Q, Q' on the parabola straight lines be drawn parallel to the tangent at P meeting PV in V, V', respectively, then $PV : PV' = QV^2 : Q'V'^2$.



Två andra sätt att beskriva parabeln geometriskt ges i följande två figurer. I figuren närmast nedan ges en klassisk beskrivning av parabeln. Där är punkten F given, liksom den räta linjen d. En punkt P (rakt över en godtyckligt vald punkt A på d) som har samma avstånd till F som till d kan då konstrueras som i figuren: AF:s mittpunktsnormal genom M skär normalen genom A till d i P. Punkten P ligger då på en parabel med brännpunkt F och styrlinje d.



I följande figur är sträckan AB given och E en godtycklig punkt på AB eller dess förlängning. AD är lika lång som AE och sträckan AC (eller dess förlängning) skär normalen genom E till AB i P. P ligger då på en parabel. Detta visas av att kvadraten AEGD är lika stor som rektangeln ABFH, eftersom rektanglarna HPGD och EBFP har samma area.



I och med Descartes analytiska geometri på 1600-talet blev det möjligt att använda ett enkelt och manipulerbart algebraiskt uttryck för att beskriva läget för en punkt på en parabel inplacerad i ett koordinatsystem genom att ange sambandet mellan punktens x- och y-koordinater. En geometrisk form ”avbildas” på ett algebraiskt uttryck $y=x^2$. Därmed hade parabeln genomgått en metamorfos från ett geometriskt objekt till ett algebraiskt objekt. Genom att koppla dessa fundamentalt olika objekt till varandra blev det också möjligt att studera det ena objektets egenskaper med det andras verktyg. På detta sätt kan det algebraiska symbolspråket ses som ett didaktiskt verktyg för att bättre förstå ett geometriskt objekt (Bergsten, 2003; 2004).

Med hjälp av Descartes nya metod kunde kurvor ingen tidigare kunnat föreställa sig beskrivas och ritas, t ex parabler av högre ordning $y^n=px$, $n>2$, Fermats parabler $y^n=ax^m$ och nya domäner som högre dimensioner och kvadratiska former kunde börja utforskas.

Så snart den tungrodda geometriska analysen kompletterats med den smidiga algebraiska kalkylen utvecklades matematiken snabbt, särskilt genom insatserna av Leibniz och Newton. Inte bara de tre klassiska kägelsnitten (parabel, ellips, hyperbel), som nu också kunde kallas andragradskurvor, utan även motsvarande 3-dimensionella andragradsytor (paraboloid, ellipsoid, hyperboloid), kunde studeras som kvadratiska former, vilka med hjälp av egenvärdesteori och matrisnotation under 1800-talet fick en enhetlig och systematisk matematisk behandling, som också underlättade deras många tillämpningsområden.

När dagens datorer, med en snabbhet som troligen även antikens geometriker skulle häpna över, hanterar matriser och numeriska beräkningar så snabbt att användaren bara genom enkla handrörelser direkt kan omforma och studera parabelns och andra kurvors geometriska egenskaper som dynamiska figurer på en skärm, är det åter det geometriska objektet i sig som kan komma i fokus. Men det är efter en ny metamorfos som parabeln nu är ett dynamiskt objekt på en datorskärm. Matematiken har gett sig själv ytterligare ett didaktiskt verktyg, man skulle kunna säga för att bättre förstå sig själv.

Vad är då en parabel? Ett sätt att svara på frågan är det semiotiska: meningen förflyttar sig genom uttrycksformerna som det som betraktaren uttolkar ur dessa, mot bakgrund av de kunskaper och erfarenheter han/hon aktiverar. Den historiska utvecklingen av matematiken visar hur meningen ändrar ansikte när nya matematiska register utvecklas och används på objekt som tidigare studerades med andra register (se Duval, 2002). Via en semiotisk kedja (se t ex Presmeg, 2002) har skärningen mellan en kon och ett plan blivit en algebraisk ekvation med en diagonaliserbar kvadratisk form representerad av en symmetrisk matris, eller elektroniska punkter på en datorskärm.

För realgymnasieeleven i Sverige på 1960-talet var en parabel den geometriska orten för punkter med samma avstånd till en given punkt (fokus) respektive linje (styrlinje), som i figur en ovan, en egenskap som snabbt kläddes i den analytiska geometrins algebraiska uttrycksform $x^2=4ay$, på vilken en systematisk behandling av parabelns egenskaper grundades (se t ex läroboken av Sjöstedt & Thörnqvist, 1963). Kägelsnittsdefinitionen från Apollonius studerades också, om än som överkurs. Studiet av parabeln integrerades i området analytisk geometri.

Gymnasieeleven på 1990-talet fick parabeln serverad som en algebraiskt definierad andragradskurva $y=x^2$, dvs som grafen till en funktion, vars form ”prickas in” via en värdetabell. Någon diskussion av egenskaper utöver de uppenbara (att $y \geq 0$ och axelsymmetrin) gjordes sällan, som till exempel den avståndsinvarians som nämndes ovan eller en analys av dess tangent och normal. Tangenter hanterades med derivata. Parabeln bäddades in i området funktionslära. På samma sätt mötte universitetsstudenterna andragradsytorna genom studiet av kvadratiska former, inbäddat i området linjär algebra. Kommer 2000-talets gymnasieelever att möta parabeln i form av ett dynamiskt objekt på en datorskärm, vars egenskaper får undersökas laborativt, och fastställas geometriskt eller algebraiskt där detta är möjligt med hänsyn till elevernas förkunskaper. Och i vilket sammanhang ska det då bäddas in?

Ett användbart begrepp vid diskussion om sådana sammanhang är den integration av praktisk kunskap (typer av problem och metoder att lösa dessa) och teoretisk kunskap (teoretiska verktyg och teorier som ger en grund åt den praktiska kunskapen) som inom den antropologiska didaktikteorin kallas praxeologi (vad man kan beskriva som en matematisk helhet). En praxeologi M växer fram som ett svar på en fråga som varit problematisk och ställts av en grupp eller institution. Att studera M förutsätter därför en koppling till de frågor som ger M dess existensberättigande. Samtidigt måste ett studieobjekt synliggöras (objektifieras; se Radford, 2002) genom val av representationsform. Hur allt detta kan realiseras i ett klassrum är en konsekvens av den didaktiska transpositionen, som sätter gränser för vad som är möjligt (se t ex Barbé et al, 2005). Några punkter som då aktualiseras är dessa:

- Bild av en parabel (ikon)?
- Algebraisk representation (symbol)?
- En definierande egenskap ger inte bara formen utan också grund för vidare utforskning och analys.
- Objektifieringsprocessen för den lärande divergerar, också genom de olika matematiska helheter som aktiveras.

Med koppling till det matematiska klassrummet kan jag alltså konstatera att det historiska perspektivet inte bara ger färg och trevnad åt matematiken, det ger dessutom en kuliss och ett argument, och kan vara ett didaktiskt verktyg genom att visa på andra aspekter än de som presenteras i en rent metodorienterad matematikundervisning. Detta kan vara avgörande för att materialet ska få liv. Ett intressant perspektiv är att arbeta med vad Boero et al (1997) kallar ”röster och ekon”. Läraren låter elever arbeta med frågor och uppgifter kring historiskt viktiga matematiska problem/uttryck vilka utgör ”röster” som bär med sig ett innehåll och en diskurs från den valda kulturella horisonten. Genom detta arbete kopplas dessa ”röster” till elevens egna tolkningar, uppfattningar och erfarenheter så att eleven då skapar ett ”eko” (se vidare Fauvel och van Maanen, 2000, sid. 154 – 167). Exempel på övningar med detta syfte kan hämtas till exempel från de ”Problem Studies” som finns i Eves (1983).

En möjlighet är också att arbeta med vad jag kallar brouppgifter, dvs att översätta egenskaper mellan olika semiotiska register eller alternativa beskrivningar.

- Bygg en bro mellan parabeln och andragradsfunktionen definierad som $y=x^2$, i ett rätvinkligt koordinatsystem.
- Undersök reflektionsegenskapen hos en geometriskt definierad parabel respektive en algebraiskt definierad andragradskurva.
- Bygg en bro mellan avståndsparabeln och areaparabeln (se de två sista figurerna ovan).

Som exempel kan man utgå från andragradsfunktionen $y=x^2$ och från den bygga en bro till avståndsegenskapen hos parabeln. Sök då om möjligt en punkt $(0, a)$ på y-axeln (dvs fokus, då måste styrlinjen vara $y=-a$) sådan att $y^2+(y-a)^2=(y+a)^2$ för alla (x, y) med $y=x^2$. Detta ger $y=4ay$ och därmed fungerar det med $a=1/4$.

Avslutningsvis kan jag som en didaktisk slutsats lyfta fram följande observationer:

- I en lärandesituation kan de objektifieringsprocesser som lyfts fram genom de olika uttrycksformerna resultera i fundamentalt olika utfall/begreppsbilder
- Möjligheten att relatera till andra uttrycksformer (semiotiska register) styrs av den övergripande didaktiska situationen, som en följd av den didaktiska transposition som ägt rum.

LITTERATUR

Barbé, J., Bosch, M., Espinoza, L. & Gascon, J. (2005). *Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools.* Educational Studies in Mathematics 59, 235-268.

Bergsten, C. (2003). *Algebra som innehåll och aktvitet. I Utvikling av matematikk-undervisning i samspill medlom praksis og forskning.* Konferensrapport. Skriftserie for Nasjonalt senter for Matematikk i Opplæringen, No 1-2003. Trondheim.

Bergsten, C. (2004). *Beyond the representation given – The parabola and historical metamorphoses of meanings*. SMDF Medlemsblad, nr 10, 37-49.

Boero, P., Pedemonte, B. & Robotti, E. (1997). *Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a Vygotskian perspective.* Proceedings of the 21st International Conference on the Psychology of Mathematics Education, Lahti, Finland, vol. 2, 81-88.

Duval, R. (2002). *The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics*. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education., 1(2), 1-16.

Eves, H. (1983). *An introduction to the history of mathematics.* (Fifth Edition) New York: Saunders College Publishing.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds). *History in mathematics education.* The ICMI Study. Dordrecht: Kluwer.

Great Books of the Western World (1952). *Book of lemmas' by Archimedes*, in Vol. II. Chicago: Encyclopædia Britannica, Inc.

Popp, W. (1978). *History of mathematics. Topics for schools.* Milton Keynes: The Open University Press.

Presmeg, N. (2002). *Semiotics as a framework for mathematics and language.* In C. Bergsten & B. Grevholm (Eds.), Mathematics and Language. Proceedings of Madif 4 (pp. 49-54). Linköping: SMDF.

Radford, L. (2002). *The seen, the spoken, and the written: a semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge.* For the Learning of Mathematics, 22(2), 14-23.

Sjöstedt, C-E. & Thörnqvist. (1963). *Analytisk geometri.* Stockholm: Natur och Kultur.

Thompson, J. (1991). *Historiens matematik.* Lund: Studentlitteratur.