Ulf Persson

Sfären

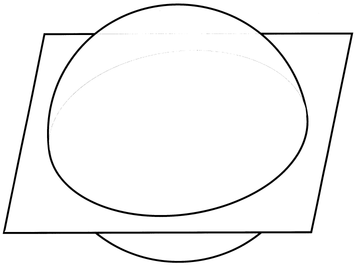
I förra numret inleddes denna artikelduo med Cirkeln. Nu går författaren upp en dimension och visar på sfärens egenskaper och landskap. Denna del bygger på den förra och en del begrepp som dyker upp här finns förklarade i den.

Solen och månen är sfärer, men dessa ser vi bara på avstånd såsom cirkelskivor. Mer lättillgängliga sfärer utgörs av bollar och allehanda olika frukter som apelsiner. Att jorden väsentligen är en sfär är ett faktum som knappast är helt uppenbart för gemene man, men fundamentalt. Och så känner vi alla till en perfekt sfär, i vars centrum vi befinner oss, nämligen himmelskupan eller himmelsfären, eller i mera högtidliga sammanhang den *celesta sfären*. Himmelskupan är en *perfekt sfär* eftersom den är en matematisk abstraktion och består av alla riktningar. Eftersom vi inte kan bedöma avstånd till stjärnor och andra himlakroppar uppleves dessa som liggandes på samma avstånd, och således fästa på en imaginär sfär.

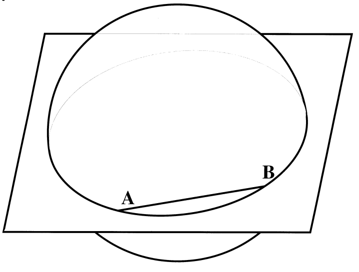
Sfären har liksom cirkeln en enkel matematisk definition, den *består av alla punkter med ett fixt avstånd till en fix punkt, sfärens medelpunkt*. Sfären omger en volym, som vi brukar benämna klot, och som är motsvarigheten till skivan i cirkelfallet. Men i motsats till cirkeln kan vi i allmänhet bara se sfären och inte det inomliggande klotet.

Liksom i fallet med cirkeln kan man också dra kordor i en sfär. Kordor som går genom medelpunkten kallas *diametrar*, och dessa skär sfären i två så kallade *antipoda(la)* punkter. Antipoda punkter är så långt ifrån varandra som det är möjligt på en sfär.

En sfär kan ses som bestående av många cirklar, den är rund överallt. Ett plan som skär en sfär gör så i en cirkel. Den största möjliga cirkeln på en sfär kallas en *storcirkel*, och bildas via skärningen av ett plan genom centrum.



Om man tar två punkter, som inte är antipodala, bildar de tillsammans med centrum ett unikt plan. Detta plan är en del av en storcirkel. Avståndet utefter storcirkelbågen är det kortaste avståndet mellan punkterna.

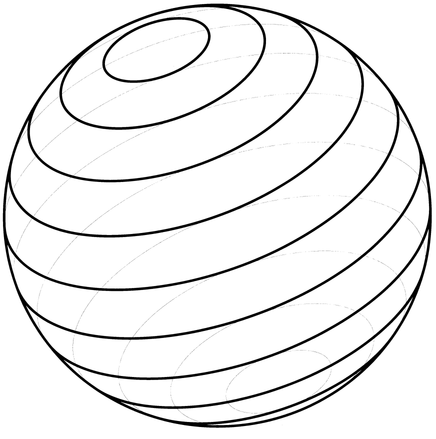


Skepp som korsar oceaner, och framför allt flygplan som färdas mellan avlägsna orter försöker i görligaste mån följa en storcirkel. Storcirklar på sfären spelar således samma roll som linjer i planet. Tar man en cirkel på sfären och beräknar förhållandet mellan dess omkrets och dess radie, mätt via en storcirkelbåge, så upptäcker man att denna kvot varierar med storleken. För mycket små cirklar är den mycket nära π medan den för en storcirkel bara är 2.

Tre punkter som förenas med storcirkelbågar utgör en så kallad *sfärisk triangel*. Det anmärkningsvärda med en sådan är att vinkelsumman är större än 180°, eller bättre, π radianer (se del 1, Cirkeln). Ju större yta triangeln har desto större är diskrepansen. Om sfärens radie normaliseras till ett kan man visa att diskrepansen uttryckt i radianer är precis lika med triangelns yta.

Se på stjärnorna och bestäm din plats på jorden

En cirkel som roterar har inga fixpunkter. En sfär som roterar har dock två, genom vilken man kan dra en diameter, som utgöres av rotationens axel. Vi är alla bekanta med en roterande sfär, nämligen himmelssfären. En roterande sfär, dvs en sfär med två specifika punkter fixerade, de så kallade *polerna*, förlänas ett naturligt koordinatsystem, *de sfäriska koordinaterna* som liksom så mycket annat går tillbaka till de gamla grekerna. De två polerna bestämmer ett system av koncentriska cirklar med dessa som medelpunkter.



Dessa koncentriska cirklar brukar kallas *latituder*, eller med ett svenskt ord breddgrader. En av dessa breddgrader är speciell, nämligen den som ligger lika långt från bägge polerna och som brukar kallas *ekvatorn*. Ekvatorn är den enda storcirkeln bland latituderna. Ekvatorn delar, liksom alla storcirklar, sfären i två halvsfärer, eller hemisfärer. Om en av polerna kallas den norra, så kallas motsvarande halvsfär, eller halvklot, det norra. Vidare kan man betrakta alla storcirklar som går genom polerna. Eftersom dessa är antipoda finns det många, i själva verket en i varje riktning. Dessa storcirklar (eller mera exakt, de halvcirklar som begränsas av polerna) går under beteckningen *longituder*, med ett svenskt ord längdgrader.

Varje latitud bestämmes av ett gradtal, nämligen dess avstånd till ekvatorn. Således motsvaras ekvatorn av noll. Latituder på norra halvsfären får positivt tecken, medan de på södra får negativt. På motsvarande sätt tillordnas longituderna gradtal. På sådant sätt kan (nästan) varje punkt på sfären bestämmas unikt av en longitud och en latitud. Undantaget utgöres av polerna, vars longituder inte är väldefinierade. Man skulle kunna tänka sig att ett annat system med koordinater på sfären skulle undgå detta, men så är inte fallet. Hur man än försöker koordinera punkterna på sfären så är det alltid två punkter (som dock kan sammanfalla!) som ger problem, eller som man brukar uttrycka det matematiskt, ger upphov till singulariteter.

Vi är alla väl bekanta med de geografiska längd- och breddgraderna på vår jord, bestämda av polerna, givna av rotationsaxeln. Men dessa är bara återspeglingar av himmelsfärens longituder och latituder. Det är via himmelsfärens förändring när vi förflyttar oss på jorden som redan de gamla grekerna insåg att jorden måste vara en sfär. (Om man räknar med jordens inre är den ett klot, men vi kan tänka oss jorden som en sfär då dess inre är ouppnåeligt för oss.) Det tog lite längre tid för oss att inse att det inte är himmelsfären som roterar, utan att jorden är vår karusell. Att bestämma en orts latitud är i princip enkelt, det är bara att bestämma lutningen av himmelsfärens rotationsaxel. Vid nordpolen är den vinkelrät mot marken, vid ekvatorn är den parallell med marken. Att under vår civilisations historia en ljusstark stjärna – Polstjärnan (för övrigt den enda stjärna som har ett svenskt namn) – har råkat befinna sig i närheten av den norra polen, har inte varit en nackdel. Att bestämma en orts longitud, dvs avståndet till en viss fix longitud associerad till noll, som av historiska tillfälligheter har blivit Greenwhichlongituden, är ett tekniskt mycket svårare problem. Lösningen var av fundamental vikt för sjöfarten och stimulerade utvecklingen av exakta och robusta klockor.

Detta att se på stjärnorna för att bestämma sin position på jorden kan ses som en mycket träffande och vacker bild av vetenskapen. Man löser inte sina praktiska problem genom att stirra på sina fötter, utan genom att lyfta på blicken.

Historiska avstånd

Avstånd på himmelsfären beräknas naturligt i grader (°) eller radianer, och av gammal hävd findelas grader i minuter (′) och sekunder (″). Detta är en konvention som går tillbaka till Babylonierna och som fortfarande används av astronomerna. På detta sätt kan man få ett naturligt sätt att beskriva hur stora objekt är i synfältet. Hur stor är månen egentligen? Som en enkrona eller en femkrona eller rentav som en fotboll eller en luftballong? Frågan är givetvis meningslös, det beror på avståndet vi betraktar dessa objekt på. Däremot kan vi tala om *vinkelavståndet*, och detta är vinkelavståndet på himmelsfären, eller det vi kallar vårt synfält. Månen och solen är ungefär en halv grad i diameter, och det skulle behövas ungefär 250000 månar (eller solar) för att täcka hela himlavalvet. Om vi täckte himlavalvet med fullmånar, så skulle detta inte förmå att ge fullt dagsljus ty solen är ungefär en miljon gånger ljusstarkare än månen. Täckte vi däremot hela himlavalvet med solar skulle ändå inte den solstrålning som skulle komma oss tillgodo vara mer än en tiotusendel av den totala strålning som solen sänder ut, ty jordens diameter är bara en hundradel av solens. Således skulle den bara uppta 20 bågsekunder sett från solen. Multiplicerar vi bägge dessa tal ser vi att solen sänder ut 2,5 miljarder mer solstrålning än vad som når jordytan. Med andra ord på en sekund sänder solen ut lika mycket solenergi som jorden upptager under en mansålder. Tala om slöseri!

De naturliga måttenheterna på en sfär utgöres således av vinkelmåtten grader eller *radianer*. Måttenheten *metern* är en konvention (tills nyligen definierad via en prototyp av platina förvarad i ett parisiskt källarvalv), men en noggrant utvald sådan. Meningen var att ekvatorn skulle vara 40 miljoner meter (om jorden inte vore tillplattad vid polerna, skulle detta motsvara ett avstånd från polerna till ekvatorn på 10 miljoner meter). Detta val, istället för 36 miljoner meter, antyder att den moderna alternativa gradindelningen spökar. Således motsvarar 40 miljoner meter 2π radianer eller 360°. En grad är ungefär elva mil (men skulle ha varit precis tio om vi hade skaffat oss en Babylonisk meter istället), och avståndet mellan Treriksrösets latitud 69° och Smygehuks 55° motsvarar ungefär 155 mil. Vidare motsvarar en minut, eller en sextiondels grad, omkring 1800 meter, och brukar refereras till såsom en *nautisk mil* (för att skilja den från en engelsk sådan). En hastighet av en nautisk mil i timmen kallas för *en knop*. För en navigatör på ett skepp, van vid att räkna i grader och minuter, är en sådan enhet ganska naturlig och innebär en direkt translation av himmelssfären till jorden (eller snarare till havet).

Om jorden skulle vara projicerad ut på himlavalvet, skulle Vänern framstå dubbelt så stor som månen, och den skarpögde skulle kunna urskilja medelstora städer med blotta ögat, ty blotta ögat förmår urskilja vinkelavstånd på ett par minuter. Den nyfikne kan ju testa genom att titta lite närmare på Karlavagnens stjärnor, av vilka en är en dubbelstjärna.

Horisonten – en storcirkel på himmelssfären

Storcirklar på himmelssfären upplever vi som räta linjer, ty vi ser denna sfär från medelpunkten (var vi än befinner oss utgör vi medelpunkten för vårt synfält) och storcirklar fås som snitt med plan genom ögat. En storcirkel vi är bekanta med är horisonten. Den obrutna horisonten upplever vi bara på ett spegelblankt hav. Horisonten är en stor cirkel på himmelsfären och en liten cirkel på jordklotet. Om våra ögon befinner sig säg två meter över den stilla havsytan är avståndet till horisonten cirka 5 km. Detta skall jämföras med storcirkelomkretsen 40000 km, och avståndet utgör i storleksordningen 0,0008 radianer.

$$\frac{2\pi}{8000} \sim 0{,}0008 = 8 \times 10^{-4}$$

Den del av jordytan vi kan överblicka är således bara en mycket liten del, i själva verket ungefär en tiondels miljondel.

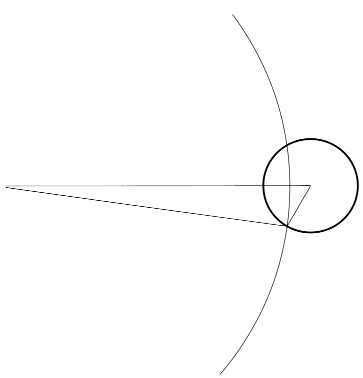
$$\frac{1}{4} \times 6{,}4 \times 10^{-7}$$

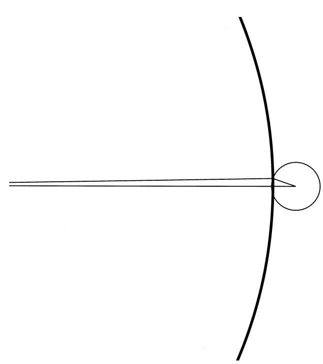
Om alla världens invånare vore jämnt utspridda på jordklotet, såväl på land som i småkanoter på haven, skulle vi dock finna åtskilliga hundra av dem paddlande över horisonten. Horisonten är således en liten cirkel på jorden, ty diametern på den cirkel den utgör är en bråkdel av jordradien. Däremot utgör den en stor cirkel, nästan en storcirkel på himmelsfären, ty himmelsfären utgör vårt synfält. Jag kunde ha skrivit en storcirkel, men det är faktiskt inte riktigt sant. Horisonten ligger något under himmelsekvatorn, och således ser vi något mer än halva himmelsfären, åtminstone ute på det lugna öppna havet. Skulle vi ha ekvatorn utritad på himmelsfären skulle vi knappast se skillnad på denna och horisonten. Om vi nu avlägsnar oss från jordytan så inträffar det smått paradoxala att horisonten såsom cirkel på jorden blir större och större, samtidigt som den blir mindre och mindre som cirkel på himmelsfären. Kommer vi tillräckligt högt upp så kan vi börja ana böjningen. När vi betraktar jorden från månen har horisonten krympt så mycket att vi kan se den helt. Den är nu en ganska liten cirkel, två grader i diameter (fyra gånger större än månen) och omsluter den skiva som utgör den synliga jorden. Horisonten betraktad på jorden däremot är en stor cirkel, nästan en storcirkel men inte riktigt. Det fattas ungefär en grad. Far vi ut i rymden på ett solavstånd har horisonten krympt så att den är osynlig för blotta ögat, men utgör nu en mycket bättre approximation av en storcirkel.

Vad finns på andra sidan?

Låt oss föreställa oss jorden liggande på ett plan med sydpolen som kontaktpunkt. Hur skulle det kännas att gå på planet fram till sydpolen? Ända fram kommer vi inte, men en halvmil från sydpolen kan vi fortfarande gå upprätta med jorden som ett så gott som platt tak strax ovanför oss. Går vi halva distansen till måste vi krypa, ty då ligger klotet bara en halv meter ovanför planet. Några hundra meter till kan vi krypa fram innan det blir stopp. Skulle nu jorden rulla en liten aning så krossas vi.

När vi nu är vana att betrakta jorden som en sfär kan vi ställa oss den naturliga frågan: vad är vår antipod? Barnet som gräver en grop i trädgården – var kommer det att hamna om det är tillräckligt ihärdigt och inte avviker för mycket från en diameter? Svaret Kina är givetvis naivt och helt felaktigt, såvida man inte råkar befinna sig i Chile eller Argentina. För oss svenskar vore Australien en bättre gissning, Nya Zeeland skulle stämma för spanjorer. I själva verket hamnar vi i havet en bra bit söder om Nya Zeeland, och en karta som samtidigt visar antipoder avslöjar att överlappningen mellan kontinenter och deras antipoder är mycket marginell, dvs antipoden till platser på land återfinns oftast på haven. Men detta att gräva ett hål genom jordens medelpunkt



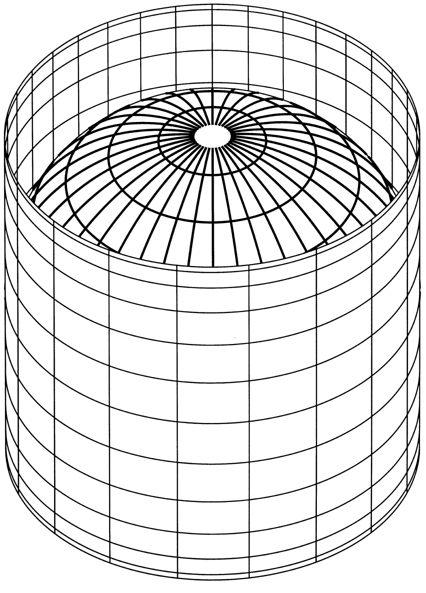


är det ingen som lyckats med, och troligen kommer det aldrig att någonsin göras. Men ett fritt fall genom en sådan tunnel vore säkert en upplevelse, förutsatt att man vore extremt värmetålig.

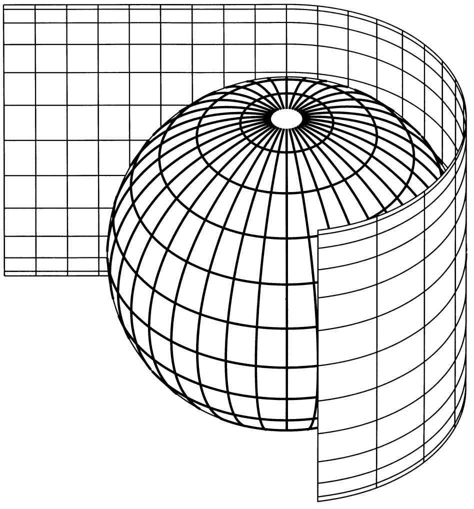
En platt bild av en sfär

En cirkel kan rätas ut, om inte annat så utföres detta av det roterande hjulet; men däremot kan vi inte platta ut sfären på planet, utan att den spricker överallt. Detta bör vara välbekant för var och en som någon gång skalat en apelsin. Anledningen till detta är att vinkelsumman i sfäriska trianglar inte stämmer överens med platta, euklidiska, trianglar. Det leder till problem om vi vill göra platta kartor över jorden. Varje representation av sfären, eller en del därav, kallas en kartprojektion. Alla kartprojektioner är behäftade med defekter, och beroende på syftet, kan man välja lämplig projektion.

En naturlig projektion som betraktades av Arkimedes var att omskriva en cylinder kring en sfär. Låt den tangera längs ekvatorn och låt centrumlinjen sammanfallande med polardiametern. Man kan nu avbilda sfärens punkter, bortsett från de alltid trilskande polerna, genom att expandera latituderna till cylindern.



Arkimedes noterade att denna projektion till sfären bevarade ytan, och den utgjorde således en så kallad *ytbevarande projektion*. Speciellt kunde han då beräkna sfärens yta, såsom varande identiskt med den omskrivna cylindern. Genom att skära upp cylindern längs en lämplig longitud, och likt cirkeln veckla ut den på ett plan, erhåller man en plan ytriktig projektion.



En annan projektion av planet som också grekerna kände till, var att projicera från t ex nordpolen till ett plan genom ekvatorn. Detta kallas den *stereografiska projektionen*, och den har egenskapen att den är konform, dvs vinkelbevarande.

En annan, något mera matematiskt avancerad konform projektion uppfanns av flamländaren Mercator på 1500-talet, och är känd under dennes namn. Denna kartprojektion kom att spela en mycket central roll för sjöfarten och präglar fortfarande vår geografiska uppfattning av världen.

Mot högre sfärer

Kan man tala om sfärer i fjärde dimensionen? Givetvis kan man det, ty den matematiska definitionen vi har använt för cirklar och sfärer fungerar i alla dimensioner. Att utröna vad som utgör högre sfärer är ett spännande äventyr som vi överlåter till en annan gång.

***Ulf Persson** är professor i matematik vid Chalmers Tekniska Högskola.*