Ulf Persson

Cirkeln

En cirkel kan tyckas vara ett simpelt objekt, men samtidigt är den fascinerande. Randen och skivan, längden och innehållet – vad är det och går det att mäta? Med hjälp av medelpunkten, diametern, radien, kordor, vinklar och talet π får vi en matematisk genomgång av cirkeln, men samtidigt också några mer filosofiska betraktelser.

Vad är en cirkel? Den är rund, säger barnet. ”Rund, rund” upprepar det, kanske för att framhäva att cirkeln ser likadan ut överallt. Det är klart att ett litet barn inte kan beskriva en cirkel, än mindre definiera den. Men en sak är säker, barnet känner igen en cirkel när det får syn på en.

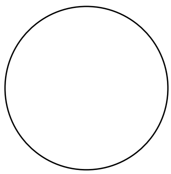
Det finns inget svenskt ord för cirkel. Detta är underligt, och att försöka hitta på ett svenskt ord nu vore bara löjligt. Men givetvis är cirkeln något som alla naturfolk känner till. Solen, fullmånen, ja vad mera träffar man på som är runt som en cirkel? Hjulen då? De är alla cirkelrunda, och inte utan anledning. Dock, hjul är en relativt sentida uppfinning. Mayafolken lär inte ha haft några hjul, däremot tillverkade de många cirkelrunda artefakter.

När man talar om cirkel så talar man i själva verket om två olika saker. Man talar om cirkelns längd och dess yta. Cirkelns längd hänvisar uppenbarligen till dess rand, och dess yta är den skiva denna rand innesluter. När man tänker på solen som en cirkel så är det givetvis solskivan som spökar. Det är en ganska stor skillnad mellan en cirkels rand, eller som man säger dess omkrets (och här har vi i alla fall ett svensk-klingande ord) och dess *innehåll*. Jag talar nu inte om den uppenbara skillnaden, utan att man betraktar dessa två visserligen intimt relaterade men dock skilda objekt på ganska olika sätt.

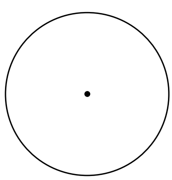
Cirkeln såsom rand ger associationer till rörelse. De gamla grekerna ansåg att cirkeln utgjorde den perfekta rörelsen, och detta fick implikationer på astronomin under en lång tid framöver. Cirkeln såsom rörelse är cyklisk. Dvs den kommer tillbaka om och om igen och upprepar alltid vad den har gjort tidigare. Cirkeln har varken början eller slut. Den är i en viss mening oändlig, men ändå är den ändlig. Cirkelrörelsen kan därvid tjäna såsom en mycket fruktbar filosofisk metafor. Och bland annat Nietzsche ansåg att tiden var cirkulär, att allting en gång kommer tillbaka för att återigen återupprepas. Detta går givetvis tillbaka till gamla myter. Enligt ur-indoeuropeisk tidsuppfattning var tiden cyklisk, vilket bland annat återspeglas i Eddans skapelseuppfattning med Ragnarök och undergång, följt av återskapelse. Med den judiska traditionen kom historien med i bilden, och den vetenskapliga uppfattningen? Geologen Hutton i slutet av 1700-talet beskriver en cyklisk värld, utan spår av en början, ej heller något hopp om ett slut; medan den moderna astrofysikaliska världsbilden talar om en dramatisk skapelse – Big Bang, precis som i Första Mosebok, samt en långsam obeveklig värmedöd.

Rotation

För att nu återgå till de gamla grekerna, varför ansåg de cirkelrörelsen vara den mest fulländade? Hur uppkommer en cirkel? Alla förflyttningar i rummet försiggår via translationer och rotationer. Att cirkeln ser likadan ut överallt, som barnet skulle vilja uttrycka det, beror på att den är en manifestation av just rotation. Låt en punkt rotera kring en fix punkt, och den vill beskriva en cirkel.



Så det är inte av en tillfällighet som det roterande hjulet har formen av en cirkel. Detta är inte en formell definition som skolbarn utsättes för när de första gången får förklarat för sig vad en cirkel är matematiskt sett. Ty begrepp såsom rotation, om än liksom cirkeln intuitivt klart, är inte så lätt att matematiskt beskriva i enkla termer. Istället så lär vi dem att cirkeln består av alla de punkter som har samma avstånd till en fix punkt, som visar sig ligga *mitt i* cirkeln (eller snarare den skiva cirkeln begränsar), och som vi följaktligen benämner cirkelns medelpunkt. Det är just denna punkt som roteras runt, och vid rotation så ändras inte avståndet till rotationspunkten.

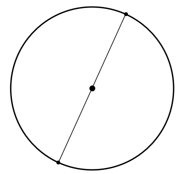


Barn brukar inte bli så värst glada över denna definition, åtminstone inte alla, men de matematiskt lagda brukar anamma det instinktivt och sedan förundras över att de någonsin har kunnat betrakta en cirkel utan att ha denna fundamentala egenskap i bakhuvudet. (Kanske de i själva verket alltid har haft det?).

Stora och små cirklar

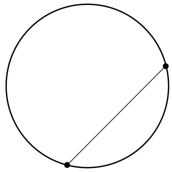
En cirkel kan vara stor och liten. En liten cirkel är på något sätt mera böjd än en stor cirkel. Ju större cirkeln är desto plattare ser den ut. Om cirkeln är verkligt stor så kan vi inte uppfatta den helt, och framför allt inte få rum att rita upp den på ett papper, inte ens ett stort papper som vi lagt på golvet. Då ser vi bara en del av en cirkel, och den delen ser ut som ett stycke av en rät linje. Om vi vet att det är en cirkel så kanske vi kan ana att den är lite böjd. Men medelpunkten ligger långt borta någonstans, och att denna lätt böjda linje skall komma tillbaka till utgångspunkten om vi drar ut den tillräckligt, verkar inte helt övertygande.

Men hur skiljer man på cirklar. Vi inför nu begreppet diameter, återigen ett ord som inte har någon kärnsvensk motsvarighet. Om vi vill ”omfamna' en cirkel så får vi ta i den i motstående punkter. Sådana punkter brukar i bland kallas anti-poda, även om detta är ett begrepp mer förknippat med sfären (som vi kommer till i nästa nummer) än till själva cirkeln. Ett par av antipoda punkter utgör ett par av punkter som är så åtskilda som det är möjligt. Om vi förenar, med tunt snöre eller i tanken, två antipoda punkter får vi en linje som går genom cirkelns medelpunkt. Och omvänt, om vi drar en linje genom cirkelns medelpunkt, kommer den att knyta an ett par av två antipoda punkter på dess rand, och således utgöra en diameter.



Nu är det två saker vi kan göra. Vi kan mäta längden på en diameter, och vi kan mäta längden på omkretsen. Det första är ganska lätt, ty längder mäter vi med linjaler, och linjaler ligger an räta linjer, så det är bara att lägga vid och mäta av, och i förekommande fall skarva. Men hur mäter vi längden på cirkelns omkrets?

Nu fungerar inte linjalen, cirkeln är ju böjd. Om vi nu inte kan mäta längden av omkretsen med linjalen, betyder då detta att den inte har någon längd? Vi kan fuska lite, genom att mäta närstående punkter på cirkeln och sedan successivt vrida linjalen lite grand, ty cirkeln är ju böjd. Men då mäter vi egentligen inte längden av cirkeln mellan successiva punkter, utan längden av kordan som förbinder dem. Och korda det är helt enkelt en rät linje som förbinder två punkter på en cirkel.



Punkterna behöver inte vara närstående, de kan tom. vara antipoda, och då har vi fått vår diameter igen. En diameter är i själva verket en speciell korda, nämligen den längsta av alla kordor. Men om vi tar ett snöre då? Lägger det längs cirkelomkretsen så gott det går och sedan ”vecklar ut” det till en rät linje. Fiffigt? Men vänta lite! Hur vet vi att inte längden ändras när vi vecklar ut den? Ja hur kan vi veta detta? Längden kan vi bara mäta när den är utvecklad, men längden av cirkeln i sitt så att säga naturliga tillstånd? Här kommer vi åter till en filosofisk fråga, och som alla filosofiska frågor har den inget uttömmande svar (det är därför filosofin överlever, och det är därför filosofer älskar att ställa filosofiska frågor). Nu måste vi vara praktiska, eller pragmatiska. Varför vill vi egentligen veta längden på en cirkel? Vad har detta för konsekvenser?

Tänk om cirkeln är ett hjul och vi vill veta hur långt den rullar på ett varv. Vi märker då ut ett litet märke på hjulet, ställer upp det på ett plant underlag (vilket för oss är enklare än vad det skulle ha varit för de gamla grekerna) med märket mot marken, och så låter vi den då sakta rulla tills märket ånyo har träffat marken. Vi har då två punkter på ett plan och vi kan mäta avståndet mellan dem. Huruvida detta motsvarar den riktiga längden låter vi vara osagt, men det motsvarar en längd som är mycket praktisk att veta.

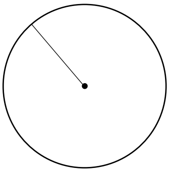
På detta sätt kan vi jämföra längderna av diametrar och omkretsar av cirklar, och vi förväntar oss att ju större diametrarna är desto längre är cirklarna. I själva verket visar det sig, och detta är inte intuitivt uppenbart (åtminstone inte för någon som inte fått sin intuition skadad av matematiska utantillläxor), att kvoten mellan omkretsen och diametern alltid är densamma. Och denna kvot uttryckes av ett tal, som vi betecknar π och därmed tror vi att vi har det i vår makt, och vi kan stolt skriva upp en formel

$$O = \pi D$$

där omkretsens längd betecknas med O och diameterns med D. Men vad är π egentligen? Talet finns, men att beskriva det är inte så lätt. Allt vad vi kan göra är att säga på ett ungefär. I den gamla skolan talade man ofta om 3 1/7 medan vi moderna människor föredrar att skriva 3,14. Men som alla skolbarn vet, så är inte detta exakta värden, utan decimalerna dyker upp i det oändliga. Detta är den första matematiska brunn som småbarn kommer i kontakt med.

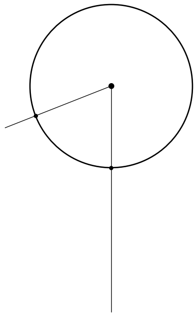
Linjer, strålar och sträckor

Om vi nu återvänder till cirkeln så skall vi inte glömma andra geometriska begrepp som är förknippade med den. Drar vi en linje från medelpunkten till dess perifieri, (ett finare ord för dess omkrets, som vi använder för att antyda att en punkt på omkretsen är så långt borta som möjligt från medelpunkten) får vi någonting som vi kallar radie. Återigen ett främmande ord.

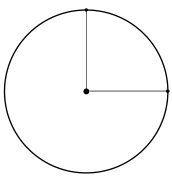


Alla radier har samma längd, och en diameter består av två i motsatt riktning pekande radier. Ja, vad är riktning egentligen för någonting. Och riktning i förhållande till vad? Om vi fixerar en punkt så kan vi tala om olika riktningar. Varje riktning representeras av en stråle som utgår från punkten.

Varje stråle från en cirkels medelpunkt skär cirkeln i en unik punkt. Och omvänt varje punkt på cirkeln definierar en stråle givet av den korresponderande radien (och dess förlängning). Vi säger att cirkeln parametriserar alla möjliga riktningar i planet.



Två radier som utgår från cirkelns medelpunkt bildar en vinkel. Det naturliga sättet att mäta en vinkel är att avgöra hur stor del av cirkelns längd, den som cirkelbågen utgör, som begränsas av radierna. Om denna är en fjärdedel talar vi om en rät vinkel.



Om den är en halv pekar radierna i motsatta riktningar, dvs i antipodala, och de bildar en diameter.

Från Babylonierna härrör vår konvention att dela in cirkeln i 360 lika stora delar, och kalla varje del en grad. På sådant sätt utgör en rät vinkel 90 grader, vinkeln i en liksidig triangel 60 grader, lutningen hos en diagonal i en kvadrat 45 grader och så vidare. Ett annat sätt är att normera radien till ett och helt enkelt beräkna längden av cirkelbågen. 360 grader motsvaras då av 2 π radianer, och en grad är ungefär 1/60 radian. Den senare enheten har matematiska fördelar, men till vardags är vi så vana vid gradtalen hos de välbekanta vinklarna att även matematiker tenderar att översätta π, π/2, π3 etc med 180, 90, 60 grader. Det förekommer även ett otyg att i vissa sammanhang dela in cirkeln i fyrahundra grader. Vad detta skall vara bra för förstår jag inte. Den gamla hederliga gradindelningen är en del av vårt kulturarv och en av de få direkta länkar vi har med Babyloniernas civilisation.

I nästa nummer fortsätter artikeln i en högre dimension och behandlar då sfären!

Ulf Persson *är professor i matematik vid Chalmers tekniska högskola.*