Edward Silver & Margaret Smith

Samtalsmiljöer

Sveriges matematiklärare är nu mitt uppe i Matematiklyftet och det tycks råda stor samstämmighet om att det är en uppskattad fortbildningssatsning. I några kommuner har uppföljning redan påbörjats, andra kommuner håller som bäst på med modularbetet och ytterligare andra väntar på att starta. Var än din kommun just nu befinner sig tidsmässigt i Matematiklyftet så kan det vara angeläget att tänka på vad som sedan ska hända. Ett syfte med Matematiklyftet är att stärka den fortbildningskultur som finns på enskilda skolor. För att få det arbetet uthålligt och långsiktigt finns mycket stöd att hämta i Nämnaren. Här återpublicerar vi, lätt redigerad, en serie om fyra artiklar från 2001-02, fri att använda i lärarutbildning och lärares kompetensutveckling.

Rapporter från vetenskapliga institutioner som *National Academy of Sciences* och *National Research Council* samt matematiklärarorganisationen *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM har stimulerat lärare och beslutsfattare att verka för en reformering av vår matematikutbildning. I dessa rapporter som kom 1989 och 1991 beskrivs innebörden av begreppet matematikkunnande med särskild betoning på områden som resonemang, problemlösning, begreppsförståelse och kommunikation. Av dessa kan man nog hävda att kommunikation är det nyaste. Betoningen på kommunikation i den nutida diskussionen om matematikutbildning visar på en radikal omorientering i relation till hur man traditionellt undervisat i och lärt in matematik.

Traditionell undervisning

Sedvanlig matematikundervisning har särskilt i grundskolans senare år och i gymnasiet ägnat liten eller ingen direkt uppmärksamhet åt kommunikationens roll i elevernas lärande, utom vad gäller lärares egna behov av att kunna tillhandahålla tydliga förklaringar och en teknisk vokabulär och symbolism som inslag i ett matematikspråk. I ett traditionellt matematikklassrum förväntas läraren förklara och eleverna komma ihåg. Läroböcker och arbetsblad förser eleverna med övningar – typiska kortfattat beskrivna frågor, var och en med ett enstaka korrekt svar – avsedda att lösas av elever som arbetar ensamma utan kommunikation med varandra. Svaren på övningarna erhålls i det typiska fallet genom att man använder en procedur som läraren alldeles nyligen har undervisat om. Sålunda har tystnad, memorering och imitation länge varit den traditionella matematikundervisningens kännetecken. Eleverna har alltför sällan uppmanats att förklara eller motivera sitt tänkande eftersom ett svar förväntas kunna bli bekräftat enbart genom att läraren samtycker eller genom att det överensstämmer med facit.

I motsats till denna tradition har nuvarande försök att reformera matematikundervisningen ökat medvetenheten om hur väsentligt det är med kommunikation och samtal i matematikundervisningen. Det stora intresset för kommunikation är relaterat till andra viktiga drag i det samtida tänkandet, såsom en ökad medvetenhet om matematisk aktivitet som en social process, en djupare förståelse för den roll social interaktivitet spelar för att stödja lärande samt en önskan att utveckla mera ”autentiska” former för utvärdering som alternativ till frågor i flervalstest.

En ny vision

De dokument som lägger grunden för matematikutbildningsreformen i USA lyfter fram klassrummet som en plats som bör vara rik på kommunikation. NCTM:s *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* pekar ut ”att lära sig kommunicera matematiskt” som ett av fem huvudmål för eleven. Kommunikation är också uppmärksammat som ett av fyra stora genomgående temata för klasserna K–12. Kommunikation är även ett framträdande tema i NCTM:s *Professional Standards for Teaching Mathematics*. I själva verket handlar tre av dokumentets sex ”standards” för matematikundervisning uttryckligen om klassrummet som en plats för samtal och lärare ses som främjare av det matematiska samtalet. Så till exempel identifieras ett antal aspekter av lärarens samtalsroll: ”... att framställa frågor och uppgifter som väcker, engagerar och utmanar varje elevs tänkande; att noga lyssna till varje elevs idéer; att be elever klargöra och motivera sina idéer muntligt och skriftligt; att avgöra vad som ska följas upp djupare bland de idéer som elever för fram i en diskussion; att avgöra när och hur matematisk notation och språk ska fogas till elevens idéer; att avgöra när information ska tillhandahållas, när ett spörsmål ska förklaras, när man bör skapa en modell, när ledning bör lämnas och när eleven bör få brottas med en svårighet; att övervaka elevernas deltagande i diskussioner och avgöra när och hur varje elev bör uppmuntras att delta”.

Utöva matematik

I den vision av ett reformerat matematikklassrum som presenteras i ”Standards” är eleverna sysselsatta med att utöva matematik snarare än att få matematik gjord åt sig. I en sådan miljö har eleverna inte bara möjlighet att lämna ett svar utan också möjlighet att förklara och motivera sitt tänkande och att diskutera sina observationer. I dessa matematiska miljöer är det naturligt med kommunikation för att bekräfta och motivera. När elever utmanas till att tänka och resonera om matematik och att muntligt eller skriftligt överföra resultaten av sitt tänkande till andra, kommer de också mötas av ett krav på att uttrycka dessa idéer klart och övertygande. På så sätt omskapas klassrummen till arenor där kommunikation blir ett kännetecknande drag. Att överföra idéer inom den matematiska praktikens kulturella normer är en verksamhet som påvisar både behovet av och värdet av det matematiska resonemanget. Även om Harold Fawcetts pionjärarbete 1938 om att använda social samverkan vid undervisning i geometri visar att ovanstående inte är en fullständigt ny idé i matematikutbildning, så är det nuvarande intresset för kommunikationsfrågor mer spritt än någon gång tidigare och också mer centralt i reformansträngningarna än vid någon annan period i matematikutbildningens historia.

En titt in i Mrs Nelsons klassrum

För att fullt ut inse vad den här visionen skulle kunna innebära, tar vi nu med dig till Mrs Nelsons klassrum där hon försökt skapa en kommunikationsrik miljö i vilken hennes elever kan lära sig matematik. I det här exemplet på klassrumsaktivitet möter vi henne tillsammas med sjundeklassare när de sysslar med ett problem som är relaterat till två matematiska nyckelbegrepp för grundskoleelever: förhållande och area. Mrs Nelson bad sina elever att samarbeta i par för att lösa följande problem:

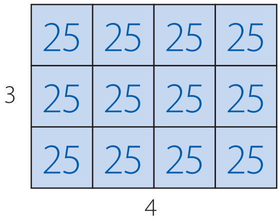
> Förhållandet mellan en rektangels längd och dess bredd är 4 till 3. Dess area är 300 kvadrattum. Vilken är dess längd och dess bredd?

Eftersom samarbete vid problemlösning var vanligt i hennes klassrum började eleverna genast arbeta tillsammans – de läste problemet, gjorde skisser för att få hjälp till att förstå problemet och diskuterade möjliga strategier för att lösa det. Under tiden de arbetade uppmanades några elever två och två att förklara den logiska grunden för en speciell ansats, att föreslå andra ansatser eller att lägga fram övertygande bevis för att en föreslagen lösning svarade mot villkoren som fastlagts i problemet. När tillräcklig tid gått för att eleverna skulle kunna försöka ge en lösning på problemet, frågade Mrs Nelson efter frivilliga att komma fram och presentera sin lösning. Eftersom detta var vanlig praxis i klassrummet, erbjöd sig ett antal samarbetande par att dela med sig av sin lösning.

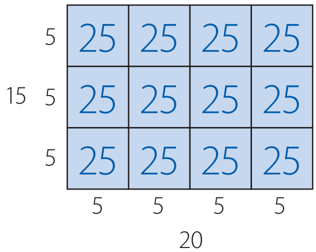
Ur gruppen av frivilliga valde Mrs Nelson Lee och Randy. Efter att kortfattat ha återgivit informationen som givits i uppgiften påpekade Lee att 3 gånger 4 är 12 och att de behövde ”ett tal som både 3 och 4 kunde gå upp i”. När Mrs Nelson frågade varför de hade multiplicerat 3 och 4 påpekade paret att förhållandet mellan längden och bredden ursprungligen var givet som ”4 till 3”. Lee och Randy fortsatte med att säga att de hade fastslagit att ”3 går i 15 fem gånger och att 4 går i 20 fem gånger också”. Eftersom 15 gånger 20 är 300, arean av den givna rektangeln, drog de slutsatsen att dessa tal representerade bredden respektive längden av rektangeln. Vid slutet av deras presentation frågade Mrs Nelson klassen om de hade några frågor till Lee och Randy. Mrs Nelsons fråga under presentationen efterliknades av en kommentar från en av eleverna att han inte förstod lösningen, i synnerhet inte varifrån talet 12 hade kommit.

Varken Lee eller Randy kunde förklara varför de hade multiplicerat 3 och 4 eller hur resultatet av den multiplikationen hängde samman med deras tänkande för att nå lösningen. Mrs Nelson antydde då att hon också undrade hur de hade fått fram talen 15 och 20. Lee och Randy förklarade att de hade tittat efter ett tal ”som både 3 och 4 gick upp i”, varefter Mrs Nelson och en annan elev samtidigt frågade hur pojkarna hade fått fram talet 5. Lee och Randy replikerade med att 5 var vad ”3 och 4 går i”. I detta läge frågade en av eleverna i klassen *Gissade ni bara eller kontrollerade ni?* till vilket pojkarna samfällt svarade *Ja!*. Fast Lee och Randys svar på problemet var korrekt så hade den förklaring till ”gissa och kontrollera”-strategin som de framfört tydligt gjort deras kamrater konfunderade över sambandet mellan den information som givits i problemet, den använda strategin och det uppnådda svaret.

Mrs Nelson var bekymrad över att eleverna var förvirrade av den presenterade lösningen men hon föredrog att inte gå in och själv förklara lösningen. Istället frågade Mrs Nelson klassen om någon hade ett annat sätt att se på problemet som de skulle vilja dela med sig. Rachel och Keisha anmälde sig frivilligt



Uppdelning av rektangeln i 12 kvadrater, vardera med en area av 25 kvadrattum.



Användning av delkvadraterna för att bestämma rektangelns dimensioner.

till att presentera sin lösning. Efter att ha läst upp problemet högt för att på nytt göra klassen bekant med villkoren som fastställts, gjorde Keisha en skiss av en rektangel och betecknade längden 4, bredden 3 och arean 300 kvadrattum. Hon förklarade att 3:an och 4:an representerade förhållandet mellan längden och bredden snarare än den verkliga längden och bredden av rektangeln. Rachel fortsatte presentationen och angav att det skulle finnas 12 kvadrater i rektangelns inre, vilket framgår av figuren, eftersom 3 gånger 4 är lika med 12. Därför, slutade paret, måste de 300 kvadrattum som utgör rektangelns area vara jämnt fördelade på de 12 kvadraterna. Genom att dividera 300 med 12 bestämde de att vardera av de 12 kvadraterna skulle innehålla 25 kvadrattum. På förslag av Mrs Nelson skrev Rachel 25 i varje kvadrat för att klargöra just detta.

I detta läge protesterade en av eleverna i klassen mot den föreslagna uppdelningen och argumenterade istället för att 25 gånger 12 är 400. Som svar menade Keisha att 25 gånger 12 är 300 och hon utförde multiplikationsalgoritmen som stöd för sin å sikt. Trots detta var flera elever fortfarande av en annan åsikt. Med hjälp av ett förslag från Mrs Nelson utnyttjade Keisha rektangeln för att påvisa att i den fanns fyra 25:or i varje rad vilket innebar att varje rad hade en summa av 100. Eftersom det fanns tre rader skulle alltså summan för hela rektangeln bli 300. Denna alternativa förklaring till 25 gånger 12 verkade övertyga de elever i klassen som inte hade accepterat den tidigare förklaringen som byggde på multiplikationsalgoritmen. Rachel förklarade sedan att för att finna längden och bredden av den ursprungliga rektangeln så måste man bestämma sidans längd i varje inre kvadrat. Om arean av varje kvadrat var 25 så skulle, menade hon, sidan i varje kvadrat vara 5 tum. Medan hon hänvisade till diagrammet som visas i figuren förklarade hon att längden av hela rektangeln på så vis skulle vara 20 tum, eftersom den innehöll sidorna av fyra kvadrater, och att rektangelns bredd skulle vara 15 tum eftersom den innehöll sidorna i tre kvadrater. När deras presentation var avslutad beskrev en av eleverna lösningen och strategin som Keisha och Rachel hade visat som ”cool”. En annan elev påpekade att deras svar var identiskt med det som Lee och Randy hade givit. Som genmäle till denna kommentar noterade Mrs Nelson att deras svar förvisso var det samma men att de hade använt en annan ansats för att lösa problemet.

Matematiska samtalsmiljöer – en närmare titt

Även av detta korta utdrag bör det vara tydligt att Mrs Nelson lyckats skapa en miljö i sitt klassrum i vilken eleverna förväntar sig att uppmanas arbeta med utmanande problem som kan lösas på flera olika sätt och att få förklara sitt tänkande och försvara sina resonemang. Fastän diskussionen inte alltid fortlöpte smidigt – Lee och Randy hade avsevärda svårigheter med att förklara sin lösningsmetod – så hördes Mrs Nelsons röst bara ett fåtal gånger under vardera av de två presentationerna och de följande diskussionerna, som tog ungefär sju minuter. Även om hennes ingripande antagligen var av avgörande betydelse för samtalets flöde i klassrummet så var hennes relativa tystnad under framföranden och förklaringar ett tecken på att elever i hennes klass var vana vid att uppmanas redogöra för sitt matematiska tänkande och sätt att resonera, inte bara av läraren utan också av andra elever. Mrs Nelson hade alltså avsevärd framgång i skapandet av en matematisk samtalsgemenskap.

I denna episod framträder tre viktiga ingredienser för ett framgångsrikt skapande av en matematisk samtalsgemenskap – tre drag hos klassrumsmiljön som måste inarbetas och upprätthållas av läraren. För det första måste samtal och kommunikation ses som centrala i uppgiften att undervisa i och lära sig matematik. För det andra behöver eleverna förses med givande uppgifter som kan utgöra grund för en innehållsrik matematisk konversation. Det tredje draget är att läraren behöver övervaka elevernas matematiska samtal och vidta lämpliga åtgärder för att främja diskussioner som kan stödja elevernas lärande av betydelsefulla matematiska idéer.

Tala, berätta, delta

För vissa lärare kan det vara enkelt att få eleverna att tala om matematik. Elever på tidigare stadier är till exempel ganska villiga att berätta om sina idéer och att förklara sitt tänkande. I några fall kanske lärare med äldre elever kan skörda frukterna av ett sådant arbete som gjorts av lärare i tidigare år vad gäller att uppmuntra eleverna till samtal, såsom fallet var i Mrs Nelsons klass. Hon hade nytta av det tidigare arbete som gjorts av läraren i åk 6 vid hennes skola vad gäller att uppmuntra elever till att ge sig in i och uppskatta matematiska diskussioner. I vår observation av Mrs Nelsons klassrum såg vi också hur hon lät elever presentera sina lösningar för att utveckla ett öppet forum för matematiska samtal i klassrummet och hon använde även samarbetande mindre grupper som mer ”lokala” forum. Båda dessa arbetssätt ger många naturliga tillfällen för matematikdiskussion (Silver et al., 1990).

En fortlöpande utvecklingsprocess

Även om vissa lärare inte har några svårigheter med att få elever att samtala, så stöter många andra på ett visst motstånd från eleverna eller möter andra former av hinder. Faktum är att för många lärare, särskilt i åk 4–6 eller senare klasser, så är det inte ovanligt att avsevärd tid används enkom för att uppmuntra eleverna till att föra matematiska samtal. Den traditionella matematikundervisningen är så stark vad gäller metoden att lära enskilt under tystnad att elever ofta börjar mellanklasserna i grundskolan (middle schools) med en färdig uppfattning om att det är just på detta sätt som matematikundervisning måste bedrivas. Lärare upptäcker också ofta att eleverna är vana vid att ”svara” utan vare sig förklaring eller motivering. Att bygga upp elevers förmåga att tala om lösningsstrategier eller att motivera svar blir därför inte något som kan genomföras enkelt och snabbt, snarare måste det ske gradvis som en fortlöpande förhandlingsprocess mellan läraren och eleverna.

Förtroende och respekt

Lärare i QUASAR-projektet, se nästa sida, har funnit att en avgörande faktor då det gäller att skapa samtalsmiljöer i klassrummet är en atmosfär av förtroende och ömsesidig respekt. Om inte klassrumsmiljön är trygg för eleverna vad gäller att tänka och tala så vill de inte presentera sina trevande idéer och hypoteser, ifrågasätta påståenden som förbryllar dem eller dela med sig av alternativa tolkningar. Eftersom elever, särskilt i grundskolans mellan- och senare klasser, kan ha en viss benägenhet att kritisera sina kamraters inlägg med nedsättande ord som t ex ”fåniga” eller ”dumma” är det viktigt att läraren etablerar klassrumsnormer för samtal och social samverkan. Elever måste uppmuntras att ifrågasätta varandras idéer och påståenden, men ändå ska lärare kräva att elever respekterar varandra som personer. Det är acceptabelt att kritisera en persons idéer, men inte själva personen. Inte minst i fattiga tätortskommuner har QUASAR-lärarna upptäckt hur avgörande en trygg klassrumsatmosfär är för att utveckla matematikundervisningen. Ofta har de haft stöd av större skolprojekt med målsättningen att skapa en miljö av förtroende och ömsesidig respekt för hela skolan. Sådana ansträngningar på skolnivå skapar en allmänt understödjande miljö, inom vilken matematiklärarna kan skapa klassrumsmiljöer för samtal utan att behöva vara rädda för kollegors ifrågasättande eller löje.

Språk och klassrumsmiljö

Ett betydelsefullt inslag för att stärka elevers tilltro till sig själva och respekt för andra är att uppmärksamma språket i klassrummet. Så till exempel bemödade man sig särskilt vid en QUASAR-skola att anställa matematiklärare som talar spanska, vilket är första språk för majoriteten av elever vid skolan. Samtal mellan elever och mellan lärare och elever i många klassrum, inte enbart i dem som officiellt betecknats som tvåspråkiga, kan då föras på spanska eller innefatta diskussioner som fritt rör sig fram och åter mellan engelska och spanska. Lokalt utvecklat undervisningsmateriel för matematik är förberett så att båda språken är tillgängliga samtidigt (på samma sida eller på separata blad) varigenom eleverna erbjuds möjligheten att läsa och/eller svara på endera språket. Därutöver har en del kommersiellt material som enbart varit tillgängligt på engelska översatts till spanska för att användas vid skolan.

Vid en annan QUASAR-skola, där eleverna talar ett antal skilda språk och de flesta lärarna enbart talar engelska, arbetar lärare med eleverna i sina klasser för att utveckla en gemensam uppfattning om det matematiska språket och de förlitar sig på elever som gör översättningar till klasskamraterna och till läraren, när samtalet rör sig över flera språk. I en sådan situation arbetar alltså lärarna hårt för att tillfredställa elevernas behov av att uttrycka sina idéer på andra språk och för att tillhandahålla en miljö som stöder detta, samt för att säkerställa att de idéer som kommuniceras har en form som kan förstås av alla medlemmar i klassrumsmiljön.

QUASAR – Quantitative Understanding: Amplifying Student Achievement and Reasoning var ett nationellt reformprojekt inriktat på att förstärka matematikundervisningen för elever i grundskolans mellanstadium (middle school) i ekonomiskt missgynnade samhällen. Under fem år arbetade lärare vid sex skolorter spridda över USA med att utveckla ett undervisningssätt inriktat på förståelse, med hjälp av uppgifter och förhållningssätt som uppmuntrade tänkande, resonemang och kommunikation.

Att sträva mot rika samtalsmiljöer

Ironiskt nog kan målet att bygga en atmosfär av tillit och ömsesidig respekt ibland komma i konflikt med målet att ha rika diskussioner, speciellt inledningsvis då en matematisk samtalsmiljö ska utvecklas. Vi har funnit flera exempel på utmaningar som en lärare kan ställas inför då behoven att uppmuntra till samtal i stort och att utveckla det matematiska samtalet ska balanseras. Ett exempel de diskuterar var hämtat från en sjätteklass i vilken många av eleverna talade engelska som andraspråk och där eleverna var något förlägna och nervösa inför att ge en presentation inför publik. Det första momentet i kursen handlade om statistisk representation av data. Sedan eleverna blivit bekanta med flera tekniker för att representera data (t ex stolpdiagram, linjära grafer, bilddiagram) bad läraren dem att undersöka klasskamraternas favorit inom någon kategori som de valde själva (t ex tvprogram, musikgrupper).

Eleverna arbetade i grupper för att samla data från klasskamrater och andra i skolan, varefter de gjorde en grafisk framställning av vad de funnit. Därefter valde varje grupp en representant som presenterade arbetet för klassen varefter eleverna i klassen inbjöds att ställa frågor för att öka sin förståelse. Utöver att tillgodose flera matematikmål avsåg läraren att använda det här projektet som en erfarenhet som skulle hjälpa hennes elever att bli trygga vid presentationer inför publik och i diskussioner. För att försäkra sig om att alla tryggt kunde delta gav hon tydliga regler för diskussionen inklusive att göra klart att förlöjligande eller brist på respekt inte skulle tolereras. I detta avseende var den efterföljande diskussionen en stor succé. Eleverna lyssnade noga till varje presentation och i sina frågor och kommentarer var de mycket respektfulla mot varandra. Deras frågor hade emellertid en tendens att behandla icke-matematiska aspekter på processen, t ex ”Hur bestämde du vilka tv-program som skulle tas med?” och ”Hur lång tid tog det att göra grafen?”.

Som vi noterat hade läraren uträttat mycket i riktning mot att skapa en atmosfär i vilken eleverna lärde sig att respektera varandras idéer och delta i diskussioner om uppgifter. Under drygt en lektion pågick en diskussion i klassrummet som till stor del fritt rörde sig fram och åter mellan engelska och spanska medan eleverna uttryckte sina idéer och förklarade sina arbeten.

Likväl blev viktiga matematikinnehåll (t ex varför en viss grafisk form valdes för de data som presenterades; hur frågor om skala kom in vid tolkningen av grafen som skapats av vissa grupper) i realiteten förbisedda i elevernas frågor och kommentarer och lärarens diskreta försök att rikta uppmärksamheten mot några av dessa ämnen misslyckades.

Genom att tillåta klassdiskussionen att fortskrida som den gjorde lyckades läraren med att bygga upp en känsla av ömsesidigt förtroende och trygghet för eleverna att delta i en allmän diskussion, men genom att göra så lät hon flera möjliga problemområden passera utan att bli undersökta.

Ett steg i taget

Lärare kämpar med spänningar som uppstår mellan krav som att ”uppmuntra elever att delta”, att ”utmana varje elevs tänkande” och att ”be elever att motivera sina idéer” (NCTM, 1991). Även om lärare kan ha för avsikt att etablera diskussionsmiljöer fyllda av en konversation rik på matematiska idéer och med debatter kring matematiska påståenden kan de inledningsvis finna det svårt att föra eleverna förbi ett tämligen ytligt sätt att behandla pågående aktiviteter eller problem. Vi anar att lärare legitimt kan bestämma sig för att pressa elever till mera diskussion av matematiska idéer måste få vänta till ett senare tillfälle. Också en lärare som hävdar att hennes elever förstår att idéer är det som värderas högst i diskussioner i hennes klassrum kan bestämma sig för att det är klokt att gå mot målet ett steg i taget.

Om man ser utvecklingen mot samtalsmiljöer i klassrummet som en resa så förefaller det rimligt att börja inom ett tryggt, möjligen icke-matematiskt område, inom vilket eleverna inledningsvis känner sig mera hemma, varefter det skulle vara möjligt att gradvis förflytta sig till områden inom vilka de matematiska idéerna inte ligger i bakgrunden utan snarare i förgrunden under diskussionen. Ett kritiskt element när man gör denna förflyttning är att ställa eleverna inför så rika uppgifter att de därigenom verkligen kan få personlig erfarenhet av de betydelsefulla idéer som man vill behandla.

Berikande problem

– exempel på möjligheter och svårigheter då berikande problem används i undervisningen

För att uppmuntra samtal kring matematik är det viktigt att rikta elevers uppmärksamhet mot uppgifter som stimulerar dem att tänka och resonera kring viktiga matematikidéer. Enligt *Professional standards for teaching mathematics* är berikande uppgifter sådana som inte åtskiljer matematiskt tänkande från begrepp eller färdigheter, som fångar elevernas nyfikenhet och som inbjuder dem att spekulera och följa upp sina ingivelser. Berikande uppgifter stimulerar till flera lösningsmetoder, innefattar olika framställningar och utmanar elever att motivera, göra antaganden och tolkningar. På så vis kan dessa uppgifter tillhandahålla rika möjligheter till diskussion.

Så var den uppgift som användes av Mrs Nelson en problemställning som gav eleverna möjlighet att utforska de viktiga matematiska idéerna area och förhållande. Problemet kunde lösas på flera sätt, t ex genom att gissa och kontrollera, genom mer formell algebra, genom resonemang grundat på kunskap om area och/eller sambandet mellan längd och bredd. Det kunde representeras med skiss, i en fysisk modell, i numerisk eller algebraisk framställning. Som konsekvens av detta koncentrerades elevernas uppmärksamhet på att undersöka och förstå begrepp, processer och relationer snarare än att mekaniskt tillämpa procedurer, formler eller algoritmer.

Att ställa frågor

Matematiklärare skulle nog knappast argumentera mot att ge berikande uppgifter i klassrummet. Ändå har uppgifter med de egenskaper som beskrivits inte precis flödat över i den traditionella undervisningen. Några kan också finna det svårt att infoga sådana uppgifter i sin klassrumsundervisning, eftersom de är vana vid mera traditionella övningar som inte avser att utveckla eftertanke och resonemang i första hand utan snarare innebär tillämpning av genomgångna procedurer.

Exempel ges från Mr Johnsons sjundeklass. Vid ett tillfälle gav han elever i uppgift att uttrycka förhållanden framställda på flera olika sätt (t ex 4:12, 15/25, 1/5, 1/2 även muntligt) i så enkel form som möjligt. Läraren gick igenom lösningar till några exempel och uppmanade sedan eleverna att arbeta med varandra i små grupper, för att låta dem uppleva matematik som en samarbetsaktivitet. Medan de arbetade gick han runt i rummet och stannade då och då upp för att ställa frågor. När de flesta i klassen hade gjort uppgiften ledde han en diskussion i helklass för att gå igenom lösningarna. För att stimulera klassrumssamtalet ställde han frågor till eleverna om deras svar; ”Hur vet du det?”, ”Är det rimligt?” eller ”Kan du motivera ditt resonemang?”.

Det finns lovvärda inslag i Mr Johnsons undervisning vid det här tillfället. Han ställde bra frågor för att locka fram elevernas tänkande och han gav eleverna tillfälle att dela med sig av sina lösningar och sitt sätt att resonera. Han hade gjort tydliga framsteg som svarade mot att ”att lyssna noga till varje elevs idéer, att be eleverna att muntligt klargöra och motivera sina idéer” (NCTM, 1991). Ändå var samtalet i klassrummet inriktat mot hur varje enskilt förhållande, skrivet på sin enklaste form, kunde erhållas genom att tilllämpa en väl repeterad procedur, såsom att ”multiplicera medelvärdena och extremvärdena” eller ”dividera täljare och nämnare med största gemensamma faktor”.

Varje förhållande betraktades enskilt och ingen generalisering gjordes i form av diskussion om sambandet mellan begreppen förhållande och proportionalitet. Fastän Mr Johnson uppenbarligen förstod vikten och värdet av att be elever att dela med sig av sitt tänkande och motivera sina svar så var diskussionen enbart inriktad på ”att ge svaret” eller ”förklara hur du gjorde”.

Berikande aktiviteter

Episoden ovan visar att lärare kan få svårt att leva upp till kravet att ställa frågor och ge uppgifter som lockar fram, engagerar och utmanar varje elevs tänkande. I detta fall begränsade Mr Johnsons val av uppgifter och sätt att fråga vad eleverna faktiskt kunde diskutera i klassen. För många lärare är det naturligt att egna försök med lektionssamtal påbörjas med liknande uppgifter som tidigare använts. Olyckligtvis är få exempel som varit ”stöttepelare” i sedvanlig matematikundervisning lämpliga för berikande samtal. Det finns behov att förändra den uppsättning uppgifter som brukar användas.

Lyckligtvis finns det flera vägar att finna eller skapa bra uppgifter. Man kan t ex ha möjlighet att påverka vilka läroböcker som ska användas på skolan eller i skoldistriktet. Lärare kan utnyttja att nyskapande undervisningsprogram, med gott om rika matematikuppgifter börjar bli kommersiellt tillgängliga (syftar på amerikanska förhållanden, övers. anm.). Så använde till exempel Mrs Nelson och hennes kollegor *Visual Mathematics* och fann detta vara en god källa till utmanande och engagerande problem för elever i grundskolan. Vid en annan QUASAR-skola användes i stor utsträckning delar av ett undervisningsprogram från *Connected Mathematics*. Många lärare befinner sig dock i en situation i vilken de förväntas använda traditionella läroböcker med uppgifter som är mindre stimulerande och berikande. I sådana fall behövs kompletteringar. En bra källa är presentationer och arbetsgrupper i lokala, regionala och nationella lärarmöten. Vidare erbjuder också vissa kommersiella förlag utmärkta källor med kompletteringsuppgifter som lärare kan använda i sin undervisning. Ett exempel på hur dessa externa källor kan integreras i undervisningen beskriver en följd av lektioner utformade av en lärare i klass åtta vid en QUASAR-skola baserad på Marilyn Burns *En matematisk dragkamp*. Det är ett komplicerat resonemang inbakat i en berättelse. En lösning av uppgiften innefattar inte bara logiskt resonemang utan också en gedigen förståelse för kvantitativ likhet.

Eleverna uppmanades att lösa problemet och att sedan förbereda en skriftlig redovisning av metod och resonemang samt motivera sin lösning. Efter att ha avslutat uppgiften lämnade eleverna in skriftliga arbeten till läraren som gick igenom lösningarna och inbjöd utvalda elever att presentera sin lösning för hela klassen. Läraren hade förmåga att använda denna aktivitet, som innehöll både muntlig och skriftlig framställning, som ett medel att påvisa ett antal olika lösningsidéer. Några elever använde diagram och figurer för att lösa problemet. Andra gav beskrivningar med vardagsspråk av deduktiva resonemang medan de arbetade med logiskt ekvivalenta storheter. Ytterligare andra tog i bruk formella algebraiska metoder där relationer mellan storheter representerades av ekvationer.

Öppna problemställningar

Tidningar kan utgöra en riklig källa till problem, nyttiga också som stimulans då elever kan skapa egna matematikproblem. Därigenom blir de uppmärksammade på kommunikationsfrågor som inte syns när problem alltid presenteras färdigformulerade. Andra utvägar för lärare kan vara att på egen hand omforma slutna problem till öppna som kan engagera och utmana elever. Det kan t ex innebära att istället för att uppmana eleverna att bestämma storleken av en vinkel i en figur, så kan läraren be dem att finna storleken på så många vinklar de kan finna. Istället för att be eleverna visa hur man konstruerar en likbent rätvinklig triangel genom att dra en linje inuti en kvadrat så kan läraren be dem visa alla de olika figurer som är möjliga att skapa genom att låta en enda linje gå genom en kvadrat. Det är intressant att observera att problemet som Mrs Nelson använde i lektionen kunde ha gjorts mera öppet genom att fråga om eller varför det finns eller inte finns en unik lösning till den givna arean och förhållandet, eller generellt för varje given area och/eller förhållande.

Ett annat sätt är att undersöka vanliga uppgifter ur ett icke formaliserat perspektiv genom att t ex använda grafiska tekniker för att undersöka numeriska relationer.

> ***Mrs Nelsons problem***
> Förhållandet mellan en rektangels längd och dess bredd är 4 till 3. Dess area är 300 kvadrattum. Vilken är dess längd och dess bredd?

Mrs Nelson presenterar problemet i sjunde klass innan eleverna lärt sig lösa andragradsekvationer. En speciell poäng är att problem som är av rutinkaraktär på ett senare stadium kan vara utmanande och berikande om det presenteras tidigare. Att ”vänta” med problem tills eleverna lärt in all relevant teori är inte alltid bra, en tidigare presentation kan ge upphov till intressanta samtal som tänjer gränserna och stimulerar strävan efter ny kunskap. När det gäller problemet som presenterades av Mrs Nelson så kan man vänta sig att om det använts i samband med algebra så skulle det lett fram till en andragradsekvation och en algebraisk lösning. Men Mrs Nelsons använde problemet med sina elever som ännu inte studerat formell algebra på ett annat sätt. Hon lät dem använda åskådliga modeller för att undersöka och diskutera algebraiska samband utan bruk av symboler. Val eller formulering av uppgifter som är värda att arbeta med är en mycket väsentlig del för att skapa en god miljö för diskussion i klassrummet.

Om betoning av kommunikation och diskussion ska leda till ökat kunnande så är det avgörande att fokusera berikande uppgifter som är möjliga att representera på flera sätt och som är öppna för flera lösningsstrategier där det krävs motiveringar och inte bara svar. Även om urval och användning av goda matematikuppgifter är väsentligt så garanterar det inte att klassrumssamtalet fokuseras mot de betydelsefulla matematiska idéerna. Även med tillgång till bra uppgifter ställs lärare inför utmaningar när de försöker utveckla elevers förklaringar eller eftersträvar motiveringar som grundas på att tillämpa sunt förnuft i en komplicerad situation.

Att leda och stödja samtal

I Mrs Nelsons klass representerade valet av en uppgift, som hade potential att utmana eleverna till att tänka och resonera, ett första steg. För att utvinna alla förtjänster hos uppgiften när det gäller elevernas lärande så krävs emellertid genomtänkt stöd och ledning. Mrs Nelson sörjde för sådant stöd på flera sätt. Hon gav eleverna tillräckligt med tid att utveckla och undersöka sina egna idéer och att diskutera problemlösningar, till en början med bänkkamrater och sedan med hela klassen. Detta gav två budskap i klassen: en reflekterande undersökning värderades högre än snabbhet och att förstå metoden som användes för att lösa problemet var lika betydelsefullt som att finna en korrekt lösning. Det senare kom fram under elevredovisningarna då Mrs Nelson och flera elever efterlyste motiveringar och förklaringar snarare än att bara acceptera en numeriskt korrekt lösning.

Så försökte t ex flera elever, och också Mrs Nelson, få klarhet i den strategi som eleverna Lee och Randy använde. När det framgick att ytterligare utfrågning av Lee och Randy sannolikt inte skulle belysa de matematiska sambanden i problemet så beslöt Mrs Nelson att rikta uppmärksamheten mot de matematiska idéerna och relationerna i uppgiften genom att be ett annat par av elever att förklara sin lösning. Keisha och Rachel gav då en beskrivning på högre nivå och lämnade en klar motivering och förklaring till sin lösningsprocedur. Genom att välja duktiga elever som Keisha och Rachel för att ge en alternativ förklaring till problemet lade Mrs Nelson ansvaret för förklaringen på eleverna. På så sätt visar hon att det är lika värdefullt att de själva presenterar modeller till lösningar och ger förklaringar av hög kvalitet som att läraren gör det.

Matematiska samtal

En liknande strävan att uppmuntra matematiskt tänkande och kommunikation beskrivs i en annan QUASAR-episod, i vilken Ms Healys elever försökte finna arean hos en oregelbunden figur som ritats på centimeterrutat papper.

Klassen kom snabbt överens om en lösning uttryckt i kvadratcentimeter, men det rådde långt mindre enighet när det gällde att uttrycka arean i kvadratmillimeter. Istället för att då tillhandahålla en procedur för att omvandla kvadratcentimeter till kvadratmillimeter för att ”hålla det hela igång” så beslöt Ms Healy att fortsätta med problemet ytterligare tills eleverna nått en stabil förståelse för denna aspekt på relationen mellan centimeter och millimeter. Därför gav hon dem mer tid att diskutera problemet med sina kamrater och gav dem arbetsmaterial (till exempel kvadratiska bitar måttsatta i centimeter, centimeterskalor, miniräknare) för att stödja deras undersökning. Senare, när eleverna gick fram för att dela med sig av sin lösning till klassen, stimulerade hon andra elever att ställa frågor kring resonemanget, vilket både gav stöd till lösningen som just presenterades och aktiverade övriga elever. Genom några fokuserande frågor från Ms Healy och ett flitigt frågande från eleverna under presentationer så nådde de slutligen fram till en lösning som tydliggjorde relationen mellan kvadratcentimeter och kvadratmillimeter, en lösning som de flesta eleverna verkade förstå.

Att lära sig tala om matematik är inte helt lätt. Elevers försök att på ett bra sätt delta i en meningsfull diskussion behöver ofta ett omfattande stöd från läraren. Cobb, Wood och Yackel (1994) skilde mellan övningar i klassrumssamtal som gällde att ”tala om matematik” och att ”tala om att tala om matematik”. I det senare fallet överför läraren normer för det matematiska samtalet till eleverna. Det kan gälla att begränsa vad för slags kommentarer till varandras idéer som kan accepteras eller att beskriva egenskaperna hos goda förklaringar som också är till hjälp för klasskamraterna. I exemplen från Mrs Nelsons och Ms Healys undervisning finner vi elever som ”talar om matematik” i sina presentationer. Exempel på att ”tala om att tala om matematik” är inte lika synliga, men i båda fallen är det uppenbart att normer för samtalet etablerats. Mycket av den tidigare diskussionen, som handlar om att etablera förtroende och ömsesidig respekt i klassrummet lägger också en grund för att lära sig tala matematik i klassrummet och att eleverna känner sig säkra att uttrycka sina idéer utan fruktan för att väcka löje.

Att ställa krav

I Ms Healys och Mrs Nelsons undervisning finns exempel på framgångsrik användning av uppgifter som ställer höga kognitiva krav. Bland de faktorer som visat sig utveckla elevers lärande finns att ge tillräckligt med tid att arbeta med en uppgift, att läraren fortsatt med att kräva motivering, förklaring och mening och utnyttjat bra framställningar från duktiga elever. I sin analys av klassrumsbaserade faktorer som stödjer eller hämmar matematiktänkande och resonemang på hög nivå ger Henningsen och Stein rika beskrivningar av undervisning som varit förknippade med att upprätthålla eller förflacka höga kognitiva krav. Dessa beskrivningar framhäver relationen mellan viktiga faktorer i klassrum och pedagogik å ena sidan och kvaliteten hos matematikinlärning som kan inträffa å den andra. Att upprätthålla höga kognitiva krav vid introduktion av uppgifter är viktigt.

Mycket tyder på att elevers kunskapsutveckling kring tankeförmåga, resonemang och skicklighet i problemlösning är relaterad till i vilken grad uppgifterna ställs upp och införs på ett sätt som engagerar dem på hög nivå. Genom att ställa och vidmakthålla kraven på uppgifter och genom att uppmuntra och stödja samtalet i kring dessa högnivåuppgifter skapar lärare ett rum för lärande av meningsfull matematik. Att hålla uppgifter på en hög nivå när de introduceras kan emellertid innebära en ytterligare utmaning för lärare, i synnerhet som det finns en stark tradition att göra rutin av en problematisk uppgift genom att tydligt föreskriva en viss procedur. Men på så sätt kommer eleverna att berövas tillfället att tänka igenom uppgiften på egen hand. För att illustrera denna problematik betraktar vi följande exempel.

För att utveckla sina elevers problemlösningsförmåga förser Mr Robinson dem regelbundet med problem som inte har rutinkaraktär. Under ett avsnitt av kursen som berör talteori och räkning bad han eleverna att lösa följande problem: Beräkna summan av de 25 första konsekutiva hela talen. Eleverna arbetade på problemet i små grupper under ett antal minuter medan Mr Robinson gick omkring i rummet och observerade arbetet. Sedan ledde Mr Robinson en diskussion kring problemet i storgrupp. Han började med att be dem tänka på summan av talen från 1 till 25 som en mängd summor av storleken 26, se figuren.

$$1, 2, 3, 4, \ldots , 22, 23, 24, 25.$$

När han markerade grupper om 26 kom en elev genast på en lösning och sträckte ivrigt upp handen. Eleven förklarade att man kunde bestämma summan från 1 till 25 genom att finna ut hur många 26:or det finns och sedan lägga ihop antalet 26:or. Mr Robinson kommenterade: ”Ja, eller man kan multiplicera” varefter eleverna fick uppmaningen att avsluta uppgiften som hemarbete. Genom att välja det här problemet hade Mr Robinson identifierat en värdefull uppgift – den innehöll viktiga matematiska idéer, den kunde lösas på fler än ett sätt (till exempel vanlig addition, genom att kombinera termer i lämpliga grupperingar som multipler av 10, genom att skapa ”trappstegsmönster”) och den var förbunden med andra matematiska idéer (till exempel triangeltal) och procedurer (att finna den allmänna termen i en följd). Han lät emellertid inte eleverna behandla uppgiften så att de engagerades i utmanande högnivåaspekter hos uppgiften.

Istället för att tillåta och uppmuntra sina elever att själva stå för tankearbetet och resonemanget som ingick i uppgiften så valde Mr Robinson att själv göra detta åt dem. På det viset reducerades en potentiellt komplicerad uppgift till en skäligen enkel övning i att räkna och addera. Mr Robinsons framsteg på vägen mot att berika den matematiska undervisningsmiljön och etablera en samtalsenhet i klassrummet ligger uppenbarligen i hans val av en kognitivt komplicerad och utmanande uppgift med potential att engagera eleverna i matematisk aktivitet och samtal. Trots detta lyckades han inte utnyttja uppgiftens fulla potential, kanske av sin omsorg om att eleverna inte skulle bli överdrivet frustrerade av eller förvirrade av svåra problem eller på grund av oro för att använda alltför lång tid på ett en staka problem. För att Mr Robinson skulle ha kunnat utveckla samtalet kring denna uppgift behövde eleverna haft mer tid att brottas med problemet, fler tillfällen att undersöka och diskutera olika ansatser och mer uppmuntran att utforma sina egna generaliseringar och motiveringar.

Dilemma med goda problem

Komplicerade matematikuppgifter införs ofta på ett sätt som reducerar uppgiftens kognitiva krav. En reduktion blir lätt direkt följd av påtryckningar från elever som är frustrerade av uppgiften. Romagno (1994) beskriver ett liknande fenomen; en brist på engagemang hos elever när en lärare försökte använda utmanande problem i en niondeklass allmän kurs och han döpte det till ”Dilemmat med det Goda Problemet”. I det aktuella fallet blev eleverna frustrerade när de ombads att lösa uppgifter till vilka lämpliga procedurer inte var omedelbart tillgängliga och de pressade sin lärare på mera strukturerad ledning för att lätta på deras frustration. Enligt Goldsmith och Schifter (1993) kan lärare, som känner ansvar för att skydda sina elever från känslor av frustration eller tillfällig brist på framgång, finna det svårt att se sina elever kämpa med idéer.

Ball (1991) har pekat på liknande dilemman också när lärare söker införa mera diskussion i matematikundervisningen. Att finna sätt att stödja elever i samtal när de kämpar med kognitivt komplicerade situationer är inte lätt för lärare, eftersom denna roll är helt oförenlig med mer konventionella uppfattningar om matematikundervisning som tidigare beskrivits. Att vara den som främjar verksamheten gör det nödvändigt för läraren att avstå från sin roll som auktoritet i klassrummet. Läraren måste utgå från elevernas idéer och kunskaper snarare än att förmedla sitt eget sätt att arbeta med och kunna matematik. Behov av att hålla eleverna sysselsatta, att ge eleverna framgång och av att klara av kursen kan få läraren att ställa frågor som enkelt kan besvaras, att skapa situationer som garanterar eleverna framgång och att själv styra lektionen i önskad riktning.

För lärare med begränsad erfarenhet med undervisning fokuserad på användningen av värdefulla matematikproblem är det en avsevärd utmaning att kunna förändras från ”fördelare av kunskap” till ”främjare av inlärning”. *Professional standards for teaching mathematics* formulerar många förväntningar på lärare. I synnerhet krävs att lärare skall veta när de skall förmedla fakta och när de inte ska det, när lärare själva skall lämna förklaringar och när de skall locka fram förklaringar från eleverna, när lärare skall presentera notation och språk för bruk i klassen och när de skall uppmuntra till påhittade symboler eller att tala eller styra deras idéer och utmana dem att motivera sina tankar. Dessutom är det, som vi har sett, väsentligt att lärare både omhuldar denna rika diskussion och säkerställer att eleverna är sysselsatta med viktiga matematiska uppgifter. Vi har i ett annat sammanhang skrivit att Professional Standards for Teaching Mathematics ger en underbar bild av en sista anhalt på en lång resa – klassrum som matematiska diskussionssamhällen – men att man misslyckas med att visa lärare de olika vägar man kan färdas för att nå detta mål och om de utmaningar som kan möta utefter vägen.

Som Silver (1996) har påpekat är skapandet av samtalsmiljöer i klassrum särskilt utmanande eftersom de flesta lärare saknar personlig erfarenhet av sådana miljöer (gäller amerikanska förhållanden, övers. anm.). De flesta lärarutbildningsprogram ger inte blivande lärare mera omfattande erfarenhet av det matematiska samtalet, inte heller doktorandutbildningar för lärare. Fortbildningskurser är också otillräckliga källor för sådana erfarenheter. Trots att de flesta lärare har studerat den matematik de kan i traditionella klassrum, så begärs det nu av dem att skapa undervisning som de har föga erfarenhet av, varken som lärare eller som studerande. För att hjälpa lärare att röra sig bort från en metodik med enskild verksamhet och reproduktion till en undervisning som berikas av samtal så krävs det nya erfarenheter och uttalat stöd.

Betrakta till exempel fallet med Mrs Nelson. Hennes framgång med att skapa samtalsgrupperingar i klassen berodde i inte ringa grad på de olika former av stöd som stod till hennes förfogande. Flera år före de klassrumshändelser som beskrivits tidigare gick hon en serie utmärkta kurser för lärare, som gavs vid ett närliggande universitet. I dessa deltog hon i en samtalsgrupp kring tänkande, resonemang och kommunikation, och där hennes eget lärande i matematik underlättades och fick stöd. Mrs Nelsons kollegor vid skolan, av vilka många också försökte skapa samtalsgrupperingar i sina egna klasser, var en annan värdefull källa till stöd. Dessa gav förslag till varandra om matematikuppgifter som ”fungerade” bra i klassen och om effektiva metoder att främja och hålla igång elevsamtal. En tredje källa till stöd var Mrs Nelson själv. Hon utvecklade en förmåga att granska sin egen praxis på ett kritiskt sätt och att reflektera över faktorer som verkade bidra till framgång eller misslyckande under en lektion. De tre formerna av erfarenheter och stöd ger en anvisning om vad som antagligen kan vara till hjälp för en bred grupp lärare när de genomför en resa mot att skapa och behålla samtalsgrupperingar i sina klasser: Ta för det första med någon på resan – kollegial gemenskap är av stort värde. Sök efter potentiellt värdefulla idéer, resurser och erfarenheter. Reflektera för det tredje över egna framsteg och justera färdriktning eller strategi i enlighet med det.

Att ha stödjande kollegor

Elever är inte unika i sitt behov av att känna att de arbetar i trygga, stödjande miljöer. Lärare har samma behov. När lärare utforskar nya former av pedagogik är det viktigt att de känner att deras angelägenheter uppfattas av kollegor och att de uppmuntras och stöds av kollegor och handledare i sina ansträngningar att ändra stämningen i sitt matematikklassrum och sina elevers inlärningsmöjligheter. Lärares förmåga att hantera oundvikliga utmaningar längs vägen beror i stor utsträckning på kollegornas förmåga att ge stöd och samarbetsmiljöer i just den praktik där diskussionen kring undervisningen sker. Inom QUASAR har vi sett värdet av kollegor som lär tillsammans på skolan, som ett sätt att ge stöd och hjälp när lärare stöter på utmaningar och gör framsteg i att etablera samtalsgrupper i sina klassrum (Stein, Silver & Smith, 1998). Kraften i kollegieskapet har också observerats av andra.

I beskrivningen av en viss lärares utveckling mot matematikundervisning berikad av kommunikation och undersökande arbetssätt refererar till exempel Silver et al. (1990) till den kritiska roll som en kollegial samverkan spelade i hennes fall. Romagno (1994) pekar på värdet i att arbeta tillsammans med en kollega och av att få tid att ”brottas med” de många bryderier man stöter på medan man försöker utveckla arbetssättet. Lärares arbetskamrater är en mycket betydelsefull resurs för stöd genom utvecklingsprocessen, men även andra resurser, utanför skolsamhället, kan vara till hjälp.

Att öka kompetensen

För att bli framgångsrika i att undervisa i matematik på det sätt som formuleras i *Professional standards for teaching mathematics* behöver lärare en bred, djup och flexibel kunskap om innehåll och om pedagogiska alternativ. Några av de utmaningar som möter vid skapandet och upprättandet av samtalsgrupper hör ihop med begränsningar i matematikkunskaper – både avseende stoff och form för undervisning. Det är sannolikt avgörande att alla lärare, liksom Mrs Nelson, får erfarenhet av att själv studera matematik på ett sätt som understryker samtalets betydelse. Detta är viktigt inte bara därför att det ger lärare en personlig studieerfarenhet utan också för att det ger möjlighet att själv se, höra, debattera och utvärdera förklaringar och motiveringar i matematik. Även om det inte är i sig tillräckligt så kan en rik erfarenhet av att studera matematik på detta sätt, med ökning av kompetens och självförtroende, vara mycket nyttig. Med detta mål kan lärare delta i universitetskurser speciellt utformade för lärare med avsikt att utveckla matematikkunskaper genom undersökande arbetssätt och diskussion. Sådana kurser förekommer på många orter. I QUASAR har vi sett hur förvärvet av färdigheter i matematik från sådana kurser kan vara ett viktigt bidrag till lärares utveckling vad gäller matematiska samtal. Vi har också sett värdet av en bred mångfald av andra formella och informella erfarenheter som planerats för att vidga lärares matematiska och pedagogiska kunskaper, såsom workshops och gemensam planering för kollegor inom samma stadium. Vi kan ge lärare det goda rådet att utnyttja sådan professionella utvecklingsmöjligheter, särskilt som dessa är en värdefull källa till rika matematikuppgifter och ger förslag till hur man skapar och hanterar samtalsgrupper i klassen.

Tid för reflektion

Det finns få skäl att förvänta sig att resan mot samtalsgrupperingar skulle vara enkel eller kort. Faktum är att man stöter på utmaningar på vägen. Silver och Smith (1996) anför att ”sidospår” eller ”vilopauser” kan förväntas under resan och att detta inte skall ses som misslyckanden. Det är orealistiskt att vänta sig en välputsad lösning till ett komplicerat matematiskt problem första gången man tänker på det, och det är oklokt att förvänta sig omedelbar succé i nybörjarförsök att skapa samtalsmiljöer. Det som är speciellt viktigt är att läraren ger sig in i återkommande reflektioner över sin utveckling och fortsatta steg, så som Mrs Nelson förmådde göra.

Schroeder (1996) pekar på kraften i självreflektion som stöd när en lärare försöker introducera nya former av undervisning. Grundat på egen erfarenhet, som en äldre lärare som försökte utveckla det sätt hon undervisade i matematik på, så framhåller Schroeder värdet av att ha skrivna planeringar och blad för reflektion till lektioner som avses innehålla innovativa undervisningsinslag. För att lärare med flera klasser eller undervisningsuppdrag skall klara omfattningen av denna uppgift föreslår hon att man reflekterar över en veckas lektioner i taget och reflekterar över varje klass eller undervisningsuppgift endast en dag per vecka.

Smith (1995) beskriver kraften i ett personligt reflekterande som incitament till lärande och förändring i QUASAR-projektet under det första årets införande av reforminriktad undervisning. En äldre lärare förde en journal i vilken hon noterade tankar över sina framgångar och sina ansträngningar. Genom sina regelbundna analyser gjorde denna lärare anmärkningsvärda framsteg på bara ett år mot att införa en ny form av matematikundervisning. Om lärare söker hjälp av kollegor, letar efter potentiellt användbara resurser utanför skolenheten och regelbundet reflekterar över erfarenheterna så finns det goda skäl att vänta sig att resan mot samtalsgrupper kommer att bli framgångsrik. För att förbättra matematiklärandet hos alla elever, så hoppas vi att många lärare kommer att följa med på denna viktiga resa!

LITTERATUR

Ball, D. L. (1991). What's all this talk about discourse? *Arithmetic Teacher,* 39, 44–48.

Bennett, A. B., & Foreman, L. (1989, 1991). *Visual mathematics course guide,* Volume 1 and Volume 2: *Integrated math topics and teaching strategies for developing insights and concepts.* Salem, OR: Math Learning Center.

Burns, M. (1982). *Math for smarty pants.* Boston: Little, Brown and Company.

Brown, C. A. & Smith, M. S. (1997). Support ing the development of mathematical pedagogy. *The Mathematics Teacher,* 90(2), 138-143.

Brown, C. A., Stein, M. K., & Forman, E. A. (1996). Assisting teachers and students to reform the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics,* 31 (1–2), 63–93.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1994). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. In E. A. Forman, N. Minnick, & C. A. Stone (Red), *Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children's development* (s 91–119). New York: Oxford University Press.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students´ thinking during instruction. *Educational Psychologist,* 23(2), 163–180.

Goldsmith, L. T., & Schifter, D. (1993). *Characteristics of a model for development of mathematics teaching.* Newton, MA: Center for the Development of Teaching, Educational Development Center, Inc.

Lappan, G., Fitzgerald, W., Friel, S., Fey, J. T. & Phillips, E. (1995). *Connected mathematics.* Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional standards for the teaching of mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Romagnano, L. (1994). *Wrestling with change: The dilemmas of teaching real mathematics.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Schroeder, M. L. (1996). Lesson design and reflection. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 1(8), 648–652.

Silver, E. A. (1996). Moving beyond learning alone and in silence: Observations from the QUASAR project concerning some challenges and possibilities of communication in mathematics classrooms I L. Schauble & R. Glaser (Red), *Innovations in learning: New environments for education* (s 127–159). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Silver, E. A., Kilpatrick, J., & Schlesinger, B. (1990). *Thinking through mathematics.* New York: College Entrance Examination Board.

Silver, E. A., Smith, M. S., & Nelson, B. S. (1995). The QUASAR project: Equity concerns meet mathematics education reform in the middle school. I E. Fennema, W. Secada, & L. B. Adajian (Red), *New directions in equity in mathematics education* (s 9–56). New York, NY: Cambridge University Press.

Silver, E. A. & Adams, V. M. (1987). Problem solving: Tips for teachers – Using openended problems. *Arithmetic Teacher,* 34(9), 34–35.

Silver, E. A., & Smith, M. S. (1996). Building discourse communities in mathematics classrooms: A worthwhile but challenging journey. I P. Elliott (Red), *Communication in mathematics, K–12 and beyond* (s 20–28). (1996 yearbook of NCTM). Reston, VA: NCTM.

Silver, E. A., Kilpatrick, J., & Schlesinger, B. (1990). *Thinking through mathematics.* New York: College Entrance Examination Board.

Smith, M. S. (1995). One teacher's struggle to balance students' needs for challenge and success. I D. T. Owens, M. K. Reed, & G. M. Millsaps (Red), *Proceedings of the 17th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s 181–186). Columbus, OH: The ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation*, 2 (1), 50–80.

Stein, M. K., Grover, B. W. & Henningsen, M. (1996). Enhanced instruction as a means of building student capacity for mathematical thinking and reasoning. *American Educational Research Journal*, 33 (2), 455–488.

Stein, M. K., Silver, E. A., & Smith, M. S. (1998). Mathematics reform and teacher development from the community of practice perspective: An example from the QUASAR project. I J. Greeno & S. Goldman (Red), *Thinking practices: A Symposium on mathematics and science learning.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.