Nämnaren
på nätet

Ekvationer

– *ett kapitel i skolalgebran*

Bengt Ulin

Filosofen och matematikern René Descartes (1596–1650) utgav år 1637 som privattryck en skrift med titeln *Regulæ ad directionem ingenii*, ungefär ”Regler för andlig vägledning”. Med en god portion optimism ansåg han sig ha funnit en universell och underbar metod, *admiranda methodus*, för att lösa problem av de mest skiftande slag. I grova drag kan hans metod sammanfattas i följande tre punkter:

1. Reducera varje slag av problem till ett matematiskt problem.
2. Reducera varje slag av matematiskt problem till ett algebraiskt problem.
3. Reducera varje algebraiskt problem till lösningen av en enda ekvation.

Förvisso kom ekvationer att spela en viktig roll i naturvetenskapen. Mest berömda är kanske J C Maxwells eleganta ekvationer som gav en sammanfattande grundval för elektriska och magnetiska fenomen. Det finns – redan inom skolans ram – många kategorier av ekvationer, så en stark begränsning är här ofrånkomlig: låt oss se på den begynnande undervisningen om förstagradsekvationer med en obekant, en undervisning som kan ta fart efter en inledning i algebra och räkning med negativa tal.

Hur motivera eleverna?

Om vi går till vår vardag, hur många utanför en yrkesutövning med inslag av matematik har ställt upp en ekvation för ett problem i vardagen? Ytterst få, förefaller det. Att undervisa om ting som vi inte använder i vardagen innebär ett visst handikapp. Många lärare har nog haft elever som i början av ekvationsläran ställt frågan: vad ska vi ha ekvationer till – det går ju bra med huvudräkning? Frågan är berättigad, för till en ekvation som $x + 5 = 9$ ser de allra flesta direkt lösningen $x = 4$. Eftersom detsamma kan sägas om de grundekvationer, som svarar mot de fyra räknesätten, alltså av typerna

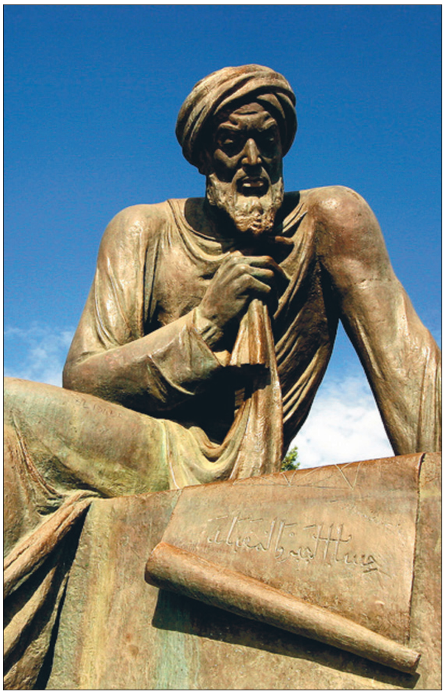
$$x + a = b, \qquad x - a = b, \qquad px = q \text{ och } \frac{x}{p} = q$$

är det önskvärt att kunna motivera eleverna bättre än att säga: vi ska senare se hur nyttiga ekvationerna kan vara. Till dess får vi ha tålamod med att träna på ekvationer som vi löser snabbare i huvudet.

Ett sätt är att formulera en uppgift som vore svår att lösa med huvudräkning och att därefter demonstrera hur man väljer x som en obekant storhet, ställer upp ekvationen och löser den. Då är det lättare för eleverna att se framtiden an med tillförsikt. Ett annat sätt är att berätta lite från algebrans barndom.

I Bagdad uppfördes på 800-talet ett Visdomens hus, till vilket man enligt Katz [1] knöt matematikern al-Khwarizmi som matematiklärare. Han kom från en region söder om Aralsjön och hade varit student i Visdomens hus innan han blev lärare där. Han utgav år 825 en lärobok i algebra, där kapitlet om ekvationer inleds med en presentation av två lösningsmetoder, *al-Jabr* och *al-Muqabala*. Med våra symboler skulle dessa metoder illustreras med exemplen

$$3x + 2 = 4 - 2x \qquad \text{respektive} \qquad 5x + 2 = 4.$$



Uzbekistansk staty över al-Kwarizmi

I den första adderas $2x$ till vardera ledet, i den senare subtraheras 2 från de båda leden. Metoden al-Jabr gav sedermera upphov till det övergripande begreppet algebra. Det bör tilläggas att al-Khwarizmi gick vidare i sin bok till att även behandla ekvationer av andra graden [1].

Träningsmoment

1. Inledningsvis kommer eleverna att lära sig tekniken att *bevara likheten* i uppställda ekvationer genom att behandla båda leden på samma sätt.

2. Nästa moment gäller konsten att ställa upp ekvationer. Det handlar om att välja en storhet som obekant och att därefter *översätta text till algebra*. I en del problem är det inte alltid lätt att avgöra vad för storhet man bör välja som obekant. Här är ökad erfarenhet särskilt betydelsefull. Det är också av stor vikt att eleverna i en tidigare årskurs fått träna på "översättning", dvs klara av frågor av typ: *Om en kostnad är k kronor, hur ska vi skriva den dubbla kostnaden? Om en sträcka är a meter, hur lång är en 5 meter längre sträcka?* En sådan pre-algebra bör också omfatta förenkling av linjära bokstavsuttryck. Den ger vind i seglen åt ekvationslösningen under de nästföljande skolåren. (Se t ex [3] och [4].)

3. Övning i att lösa tillämpningsproblem, där x-et uppträder i båda leden.

I träningsmoment 2 och 3 kan man förstås öka elevernas engagemang genom att ge dem uppgifter med ett intressant innehåll. Här några typexempel:

1. Den 13 december är natten 7 timmar längre än dagen i Basel.
   Hur lång är dagen då i Basel?

2. En rektangulär bild med längd 15 cm och höjd 10 cm ska förstoras så att dess längd blir 36 cm. Hur hög blir då bilden?

3. En legering, "gammelmetall", innehåller lika stora andelar koppar och zink. Hur mycket gammelmetall och hur mycket ren koppar ska smältas samman så att man erhåller 1 ton mässing med halterna 62 % koppar och 38 % zink? (Uppgiften är hämtad från [2].)

4. Vilken vikt ska ett bräde av granved ha för att helt under vattenytan kunna lyfta ett föremål av vikt 5 kg? Träets täthet är 0,7 kg/dm^3.

Det är som bekant lärorikt att jämföra olika lösningar med varandra. I fråga om uppgift 2 kan man låta eleverna söka efter en grafisk lösning med hjälp av likställighet: bilden läggs in i hörnet av en blivande större rektangel, där bildens längd utökas till 36 cm. I dess slutpunkt reser man en normal. Eleverna får upptäcka att man ska förlänga en av bildens diagonaler tills den skär normalen.

En klassisk metod är *regula de tri* (Nämnaren 2011:4). Uppgift 3 kan försvåras till att råvarorna ersätts med exempelvis två mässingsorter, den ena med 70 % Cu och 30 % Zn, den andra med 60 resp 40 %, varvid 65 % kopparhalt ska uppnås.

5. Salthalten 1,5 % hos 20 kg saltlösning ska höjas till 3 %? Hur mycket salt ska tillsättas?

6. Pensionen är summan av inkomstpension (i) och premiepension (p). Den senare får vara högst 30 % av hela pensionen. Hur stor kan premiepensionen vara om i = 25000 kr?

7. Ett 4 kg tungt isstycke av temperatur 0° sänks ner i 12 kg 50-gradigt vatten. Vilken blir sluttemperaturen när isen smält? 1 kg is kräver 80 kcal för att smälta till 0-gradigt vatten.

8. Beräkna sluttemperaturen, då 100 g vattenånga av temperatur 100° förs in i 5 kg vatten av temperatur 15°. Det åtgår 540 kcal för att överföra 1 kg 100-gradig ånga till 100-gradigt vatten.

Pythagoras sats kan ge upphov till en ekvation som skenbart är av grad 2:

9. I en rätvinklig triangel ABC är ena kateten 3 m. Den andra kateten ska vara 2 m kortare än hypotenusan. Hur lång blir denna?

Här kommer x^2-termerna att ta ut varandra, så att en ekvation av första graden uppkommer. Uppgift 9 kan ges en praktisk tillämpning: A och C kan vara två synkroniserade sändare som sänder ut vågor av en och samma våglängd. I vilken punkt B på normalen till AC genom C är distansen till A en halv våglängd större än avståndet till C?

Som avslutning några uppgifter för elever som är mer försigkomna. Nämnaren presenterade ett problem som har en vacker lösning utan ekvation:

> En melon på 2 kg innehåller 99 % vatten. Sedan vatten avdunstat i värmen hade vikten minskat till 1 kg. Till vilket värde sjönk vattenhalten?

Man kan göra en ekvationsvariant:

10. Hur mycket vatten behöver avdunsta från melonen för att vattenhalten ska sjunka till 95 %?

11. Banorna för Jupiter och Saturnus kan grovt betraktas som cirklar kring solen i ett plan genom denna. Omloppstiderna för dessa planeter är ungefär 12 år respektive 30 år. När de befinner sig i samma riktning från solen talar man om en ”stor konjunktion”. Hur stort är tidsavståndet mellan två sådana konjunktioner?

Till sist ett problem som gavs i en kvalificeringstävling för högstadiet 16.11.1995:

12. En simmare på väg uppströms i en flod märkte först efter 10 minuter att han tappat sina badbyxor. Han vände då och simmade (lika snabbt som tidigare) tillbaka och kom ikapp badbyxorna 1,2 km från den plats där han tappade dem. Hur snabbt flöt floden?

Speciellt intressant med detta problem är att svaret visar sig vara oberoende av simhastigheten.

LITTERATURTIPS

[1] Katz, V. J. L. (1993). *A History of Mathematics*. HarperCollins.
[2] Locher-Ernst, L. (1945). *Arithmetik und Algebra*, 6:e uppl. Birkhäuser, Basel 1945. En utförlig läro- och övningsbok på tyska, erbjuder bl a en värdefull, stor exempelsamling.
[3] Ulin, B. (1982) En aritmetikuppgift med många utblickar. *Nämnaren* nr 1. Göteborgs universitet.
[4] Ulin, B. (1988). *Att finna ett spår*, kap.3.5. Utbildningsförlaget.