Erfarenheter av strukturerade härledningar i undervisningen

Linda Mannila, Mia Peltomäki och Ralph-Johan Back

December 15, 2013

I artikeln "Strukturerade härledningar ökar förståelsen" i Nämnaren nr 3/2010 beskrevs de grundläggande principerna bakom *strukturerade härledningar*, ett sätt att presentera beräkningar och bevis enligt ett standardiserat och tydligt format. I denna uppföljande artikeln vill vi beskriva hur metoden har använts i undervisningen, samt resultaten från några empiriska studier som gjorts kring strukturerade härledningar i klassrummet med början från 2000-talet fram till i dag.

Inledande resumé

Strukturerade härledningar har utvecklats sedan mitten av 1990-talet av professorerna Ralph-Johan Back och Joakim von Wright vid Åbo Akademi och bidrar med ett fixt format för att skriva matematiska lösningar och bevis [1, 2, 4, 5]. Formatet baserar sig på grundläggande logik och förutsätter att varje steg i en beräkning motiveras explicit på en egen rad. Målet är att göra lösningar och bevis lätta att förstå, både för den som har skrivit ner dem samt för personer som ser t.ex. en lösning första gången.

Före vi går in på undervisningserfarenheterna presenterar vi nedan ett par exempel som visar den grundläggande syntaxen (Exempel 1) och en mer mångsidig användning av formatets möjligheter (Exempel 2).

Exempel 1: Ekvationslösning

$\bullet$ $\quad (x-1)(x^2+1)=0$

$\Leftrightarrow$ $\quad$ {Nollproduktregelen}

$\quad x-1=0 \vee x^2+1=0$

$\Leftrightarrow$ $\quad$ {Addera 1 till båda leden i den vänstra ekvationen}

$\quad x=1 \vee x^2+1=0$

$\Leftrightarrow$ $\quad$ {Subtrahera 1 från båda leden i den högra ekvationen}

$\quad x=1 \vee x^2=-1$

$\Leftrightarrow$ $\quad$ {En kvadrat kan aldrig vara negativ, högra ekvationen är alltså falsk}

$\quad x=1 \vee False$

$\Leftrightarrow$ $\quad$ {Regel för disjunktion}

$\quad x=1$

Varje steg består av två termer, en relation och en motivering, som beskriver varför det gäller att den första termen står i den angivna relationen till den följande termen. För att reservera ordentligt med utrymme för både termer och utförliga motiveringar skrivs dessa på separata rader. Härledningen skrivs i två kolumner, där den första används för relationssymbolerna (i detta exempel ekvivalens, $\Leftrightarrow$), medan den andra ger plats för termerna och motiveringarna.

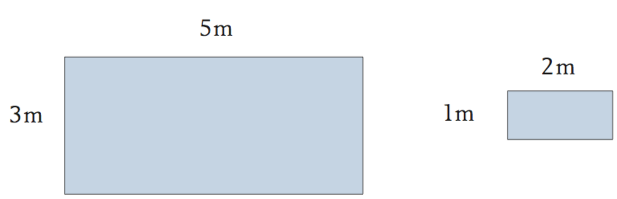
Exempel 2: Textproblem

Jan skall måla golvet i sina två rum två gånger. Vardagsrummet är 5 m långt och 3 m brett, och köket 2 m långt och 1 m brett. Hur mycket målfärg borde Jan köpa då den genomsnittliga åtgången är 1 liter per 2,5 m^2*?*

I textuppgifter som denna lönar det sig ofta att först rita en figur som illustrerar den aktuella problemsituationen. Då vi vill inkludera bilder, diagram eller tabeller i en lösning ritar vi dem före eller efter själva härledningen, och hänvisar sedan till dem i härledningen. På detta sätt hålls härledningen klar och tydlig, utan avbrott i form av bilder eller annat material.

Detta exempel visar också användningen av antaganden och observationer. Då man skall presentera en lösning som en strukturerad härledning börjar man med att lista allt man redan vet, dvs. den information man får ur uppgiftstexten. Detta görs i form av *antaganden*. I vissa uppgifter finns inga antaganden, i andra finns ett eller flera. Utgående från antagandena kan man ofta få reda på ytterligare information som man kan ha nytta av för att lösa huvudproblemet. Denna tilläggsinformation kan man lägga till som *observationer*.

I det följande löser vi den aktuella uppgiften och använder oss av figurer, antaganden (märkta med a-d) och tre observationer (märkta med 1-3). Vi skiljer den introducerande delen (uppgiftsspecifikation, antaganden och observationer) från själva bevisdelen med tecknet $\Vdash$ (kan uttalas “bevisas av”).



•	Hur mycket målfärg behövs för att måla golven, när
(a)	de skall målas två gånger, och
(b)	vardagsrummet är 5 m långt och 3 m brett, och
(c)	köket är 2 m långt och 1 m brett, och
(d)	den genomsnittliga åtgången målfärg är $\frac{1\ \text{l}}{2,5\ \text{m}^2}$
[1]	{Vardagsrummets yta fås ur (b)}
	Vardagsrummets yta är $5m \cdot 3m = 15m^2$
[2]	{Kökets yta fås ur (c)}

Kökets yta är $2m \cdot 1m = 2m^2$

[3] {Totala golvytan fås ur [1] och [2]}

Totala golvytan är $15m^2 + 2m^2 = 17m^2$

$\Vdash$ "Mängden målfärg"

$=$ {Golvet skall målas två gånger}

$2 \cdot$ "totala golvytan" $\cdot$ "genomsnittsförbrukningen"

$=$ {Totala golvytan ges i observation [3] och genomsnittsförbrukningen i antagande (d)}

$2 \cdot 17\mathrm{m}^2 \cdot \dfrac{1\ \mathrm{l}}{2,5\ \mathrm{m}^2}$

$\approx$ {Räknar och förkortar med enheten m^2}

14 l

$\square$

Medan vi i det första exemplet hade att göra med termer som hade ett sanningsvärde, är termerna här aritmetiska uttryck. Vi använder därför likhet ("lika med" och "ungefär lika med") som relation i stället för ekvivalens, och får att "mängden målfärg" är lika med $2 \cdot 17m^2 \cdot \dfrac{1l}{2,5m^2}$, vilket i sin tur är ungefär lika med $14\,l$.

Den som vill läsa mer om själva metoden kan vända sig till den ovannämnda artikeln i Nämnaren 3/2010, samt den litteraturlista som den inkluderar. Vi kommer i resten av denna artikel att fokusera på hur strukturerade härledningar har använts i undervisningen samt presentera resultaten från några empiriska studier.

Strukturerade härledningar i undervisningen - en historisk överblick

Före vi dyker djupare in på resultaten från några av de större studierna, vill vi ge en historisk överblick över de olika sätt på vilka strukturerade härledningar introducerats i undervisningen.

Formatet har sedan början av 2000-talet använts i klassrummet av lärare och studerande på olika utbildningsnivåer:

- 2001: Strukturerade härledningar introducerades i undervisningen för första gången, då en omfattande 3-årig empirisk studie inleddes vid ett finskt gymnasium i Åbo för att undersöka om, och i så fall hur, metoden påverkar studerandes resultat. År 2002 inleddes ytterligare en likadan studie. Resultaten från dessa studier presenteras närmare nedan.
- 2004: Formatet användes i en kurs i logik och talteori vid ett gymnasium i Vasa.
- 2005: En kurs som kombinerade grundläggande logik samt strukturerade härledningar erbjöds för datanomstuderande vid en yrkesutbildning i Åbo.
- 2006: Formatet användes första gången i den obligatoriska grundkursen i logik för studerande i datavetenskap och datateknik vid Åbo Akademi och har därefter utgjort det standardiserade angreppssättet för kursen.

- 2007: Den valbara kursen "Logik och talteori" undervisades med strukturerade härledningar i två gymnasier i Åbo-regionen. Dessa kurser användes som grund för att utreda hur studerande upplever metoden, och resultaten från denna studie presenteras nedan.

- 2011: Strukturerade härledningar introducerades på grundskolenivå (årskurs 7 och 9) då en första version av ett digitalt läromedel i matematik baserat på detta format utvecklades som en kombination mellan lärandeplattformen Moodle (http://www.moodle.org) och textredigeraren LyX (http://www.lyx.org) [12, 13]. LyX är i grund och botten en LaTeX-editor som följer den så kallade *WYSIWYM*-principen ("What you see is what you mean", det du ser är vad du menar). LyX bygger på öppen källkod, vilket gjorde det möjligt för oss att utveckla egna tillägg till verktyget med stöd för strukturerade härledningar.

Inom vår forskningsgrupp har ca 200 studentexamensuppgifter i lång matematik[1] lösts med hjälp av strukturerade härledningar. Vi har därmed tillgång till en stor samling lösningar som visar att formatet lämpar sig för alla matematikens delområden.

Sedan 2008 har vi på regelbunden basis erbjudit ett stort antal fortbildningstillfällen för lärare som varit intresserade av att börja använda formatet i sin egen undervisning. Största delen av fortbildningen har finansierats av finländska Utbildningsstyrelsen samt 100-årsfonden för Teknologiindustrin i Finland.

År 2010 skrevs en del av repetitionsmaterialet för sista årets studerande vid gymnasiet om med strukturerade härledningar och publicerades på finska Rundradions webbsidor "Abitreenit". Målet med materialet var att erbjuda studerande tillgång till ett tydligt självstudiematerial med noggrant förklarade exempel.

Våren 2011 beviljade EU genom dess Central Baltic Interreg IV A -program understöd för ett 2,5-årigt projekt, med målsättningen att förbättra matematikkunskaperna och -färdigheterna genom nya undervisningsmetoder och IKT. Inom ramarna för detta E-Math-projekt har interaktiva matematikböcker för gymnasiet baserade på strukturerade härledningar utvecklats enligt den finländska, svenska och estniska läroplanen. E-böckerna innehåller en stor del skräddarsydd funktionalitet och ämnesspecifika verktyg, bl.a. en webbaserad editor som gör det lätt att skriva ner lösningar på uppgifter direkt i boken. Läromedlet har använts av ca 1000 studerande i 17 skolor i de deltagande städerna (Åbo, Stockholm, Mariehamn och Tallinn). Projektet avslutades i december 2013 och de e-böcker som utvecklats finns fritt tillgängliga från och med januari 2014.

Hur påverkar strukturerade härledningar lärandet?

Som redan nämndes ovan, utfördes i början av 2000-talet två omfattande 3-åriga empiriska studier (2001-2004, 2002-2005) kring användningen av strukturerade härledningar i lång matematik vid ett gymnasium i Åbo [9, 10]. Studiernas syfte var att undersöka hur de studerandes lärande påverkas då undervisningen baseras på strukturerade härledningar jämfört med det traditionella sättet.

För att studera detta delades de studerande som inledde sina gymnasiestudier in i tre grupper: en testgrupp med studerande på en IT-baserad linje, en kontrollgrupp inom vilken de studerandes utgångsnivå var så lik testgruppens som möjligt[2] och slutligen en tredje grupp som inte deltog i studien. Test- och kontrollgruppen hade lektioner vid samma tidpunkt, följde samma innehåll och hade exakt samma

[1] I Finland sträcker sig gymnasiestudierna över 3-4 år, varvid de studerande är 16-19 år gamla. Matematik undervisas på två nivåer - lång och kort, där den långa matematiken räknas vara förberedande för studier i naturvetenskap, teknik och medicin på universitetsnivå. Den långa matematiken innehåller 10 obligatoriska kurser, samt ytterligare minst tre valbara kurser. Gymnasieutbildningen avslutas med studentexamen, ett nationellt övergripande prov där lång matematik ingår som ett eget prov.

[2] I Finland har studerande rätt att själva välja vilken grupp de vill höra till, och det var därför inte möjligt att slumpa fram grupperna och inte heller att få två grupper som helt motsvarade varandra.

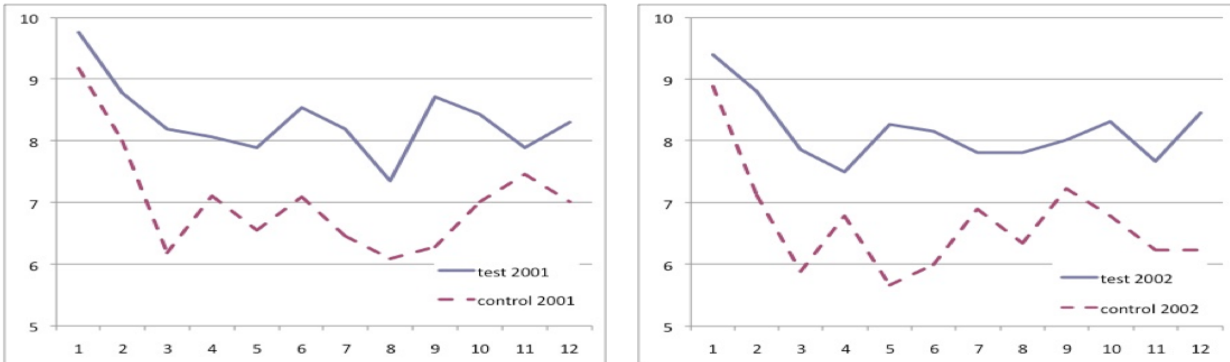


Figure 1: Resultat i de enskilda kurserna och studentexamensprovet under åren 2001-2004 och 2002-2005.

tentamen. Testgruppens undervisning baserade sig helt på strukturerade härledningar förutom i en kurs (geometri), medan kontrollgruppen genomgående undervisades på traditionellt sätt. Testgruppen och kontrollgruppen hade olika lärare.

I studierna jämfördes de studerandes resultat i de obligatoriska kurserna samt i studentexamensprovet i lång matematik. Graferna i Figur 1 visar de studerandes vitsord i de olika delmomenten: 1 = medelvitsordet i matematik från grundskolan, 2 - 11 = de 10 obligatoriska matematikkurserna och 12 = studentexamen. Betygsättningen går från 4-10, där 4 är underkänt och 10 motsvarar ett berömligt resultat.

Enligt resultaten från båda studierna klarade sig testgruppen bättre än kontrollgruppen i både de obligatoriska kurserna och studentexamensprovet. Som graferna visar kan dock en del av resultatet förklaras av skillnaden i utgångsnivån för test- resp. kontrollgrupperna. Testgruppens resultat är dock så pass mycket bättre att detta inte kan vara den enda förklaringen. Testgruppernas resultat stärks ytterligare av att andelen studerande som avbröt studierna i dem var mycket mindre än i kontrollgrupperna (Figur 2).

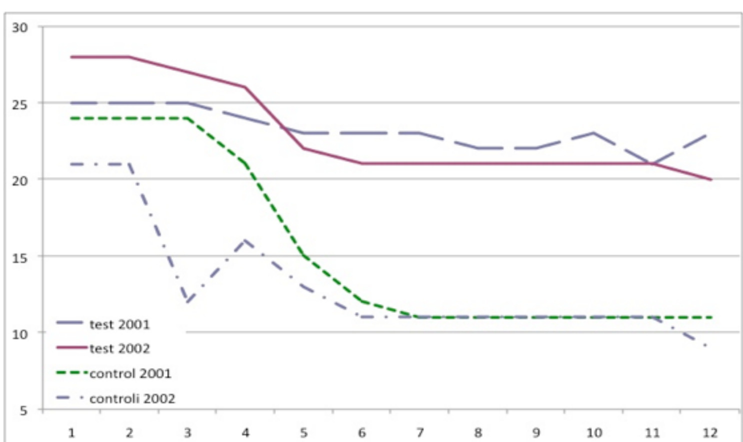


Figure 2: Antalet deltagare i test- och kontrollgrupperna under 2001-2004 och 2002-2005.

Eftersom test- och kontrollgrupperna hade olika lärare och representerade olika utbildningslinjer, kunde man försöka förklara skillnaderna i resultaten med att testgrupperna helt enkelt hade en bättre lärare eller att de studerandes intresse för IT automatiskt gjort dem mer motiverade att lära sig matematik. Vi kan ännu kontrollera dessa argument genom att jämföra testgruppernas lärares resultat från att ha undervisat en grupp av IT-intresserade studerande ett år före strukturerade härledningar togs i bruk, dvs. den grupp som inledde sina studier år 2000, undervisades enligt det traditionella sättet och skrev studentexamensprovet år 2003 (Figur 3). Här är urvalsprincipen den samma för de tre grupperna (2000-2003, 2001-2004, 2002-2005) och de har alla undervisats av samma lärare.

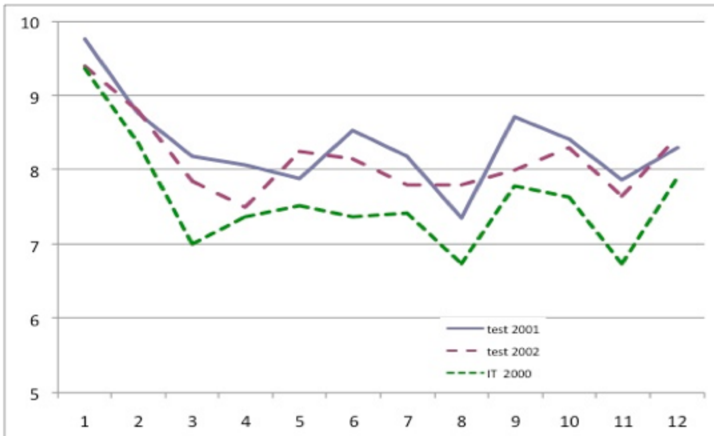


Figure 3: Resultaten för tre IT-grupper, 2000-2003 (traditionell undervisning), 2001-2004 och 2002-2005 (strukturerade härledningar)

Som figuren visar klarar sig de grupper som använt strukturerade härledningar bättre även i denna jämförelse. Skillnaden är inte lika markant som i de tidigare graferna, men den är fortsättningsvis tydlig; strukturerade härledningar verkar därmed kunna förbättra resultaten för gymnasiestuderande, även efter att man tagit potentiella felkällor i beaktande.

Hur upplevs strukturerade härledningar av de studerande?

Hösten 2007 utvärderades användningen av strukturerade härledningar i enskilda kurser på gymnasie- och universitetsnivå. I gymnasiet var det frågan om en valbar fördjupad kurs på temat logik och talteori med 22 deltagare (32% flickor, 68% pojkar). Målet med denna studie var att utreda hur studerande upplever strukturerade härledningar då de stöter på formatet för första gången i en kurs. Vi samlade in data via ett frågeformulär efter kursens slut, där fokus sattes på följande öppna frågor:

- Vilka *fördelar* upplevde du med att lösa problem med strukturerade härledningar?
- Vilka *nackdelar* upplevde du med att lösa problem med strukturerade härledningar?

De studerandes svar analyserades med hjälp av innehållsanalys i två omgångar. Den första omgången resulterade i en detaljerad kategorisering av de studerandes åsikter. I den andra analysomgången diskuterade vi kategorierna i en större grupp, varvid vi kom fram till tio huvudsakliga kategorier – fem som beskriver de upplevda fördelarna och lika många som beskriver nackdelarna.

Upplevda fördelar

Figur 4 illustrerar de fem huvudsakliga upplevda fördelarna av att använda strukturerade härledningar:

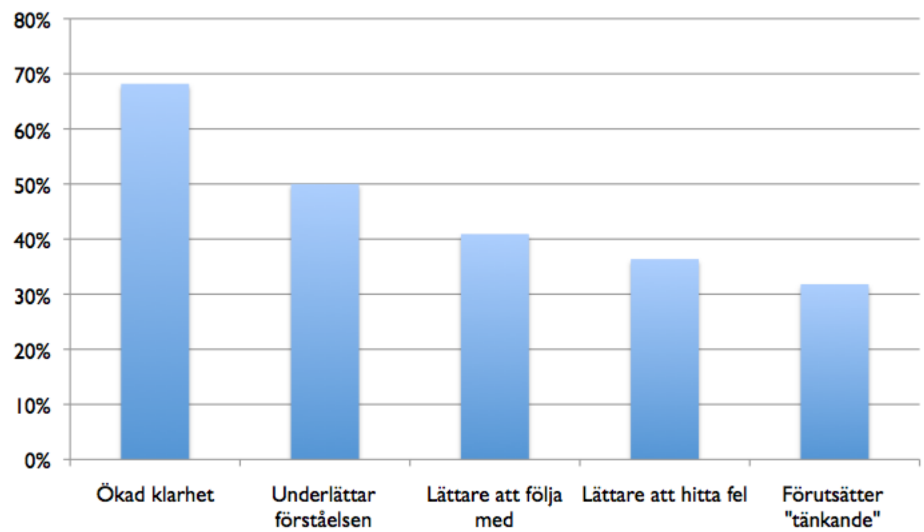


Figure 4: Upplevda fördelar av strukturerade härledningar (% av de studerande)

För att göra det lättare att förstå innebörden i dessa kategorier, ger vi som följande några exempel på studerandecitat för respektive kategori.

Ökad klarhet:

> "Jag tyckte faktiskt om den här kursen (sällsynt när det är frågan om matematik), strukturerade härledningar gjorde att allt blev mycket tydligare, tidigare har jag i princip bara skrivit någonting utan egentliga motiveringar och ibland har jag inte vetat vad jag har hållit på med."
>
> "Det ger uppgiften en klarhet så att man verkligen vet vad man gör."
>
> "Det blir tydligare och man vet vad man gör, för mig är det i alla fall enklare att förstå när det finns lite mera detaljer förklarade och inte bara en massa tal huller om buller..."

Underlättar förståelsen

> "Först tyckte jag det verkade helt onödigt att skriva på det sättet, men nu tycker jag att det är ett väldigt bra sätt, för nu förstår jag precis hur alla uppgifterna är gjorda."
>
> "Du lär dig mer om vad du egentligen gör."
>
> "Det är enklare att veta vad man (eller någon annan) tänkt då allt är förklarat."
>
> "Andra människor förstår [dina lösningar] bättre."

Lättare att följa med

> "Man ser och förstår lättare efteråt vad och hur man gjort en uppgift."

Lättare att hitta fel

"Det är lättare att märka felen."

"Det blir lättare att se om uppgiften är rätt."

"[När du använder det traditionella formatet kan du] missa mycket lättare när du går så 'snabbt' fram."

Förutsätter "tänkande"

"Här måste du 'berätta' vad du gör vilket tar mera tid och sätter igång din hjärna mera."

"Lösningarna kräver fler motiveringar och blir mer genomtänkta."

Upplevda nackdelar

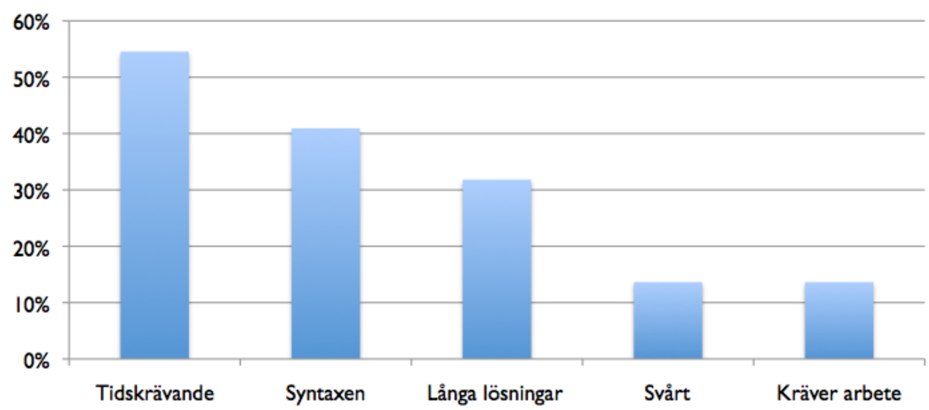


Figure 5: Upplevda nackdelar av strukturerade härledningar (% av de studerande)

På motsvarande sätt illustrerar Figur 5 de fem huvudsakliga upplevda nackdelarna av att använda strukturerade härledningar. Vi konkretiserar även dessa med hjälp av några utvalda studerandecitat.

Tidskrävande

"Det tar mycket längre tid och för mycket korta och enkla uppgifter känns det onödigt med strukturerade härledningar."

"Det tar lite för mycket tid."

Syntaxen

"Man måste använda svåra termer."

"Alla punkter, fyrkanter du måste komma ihåg tar bort koncentrationen från själva uppgiften."

"Mycket att komma ihåg."

Långa lösningar

> "Det går åt mycket papper."
>
> "[Strukturerade härledningar är] otroligt långa, småpetiga."mo

Svårt

> "[Det traditionella sättet att räkna] kan vara lättare och snabbare, då man inte behöver fundera på hur man skall beskriva sina mellansteg."

Kräver arbete

> "Man kan inte 'improvisera' eftersom man måste veta och berätta vad man gjort."
>
> "[Strukturerade härledningar] kräver mer energi."

Erfarenheterna i ett nötskal

De största fördelarna med strukturerade härledningar ur en studerandes perspektiv är alltså att de gör lösningarna klarare och lättare att följa samt leder till ökad förståelse. En stor del av dessa kommentarer kan härröras till motiveringarna och deras betydelse. En av de stora skillnaderna mellan att presentera en lösning som en strukturerad härledning jämfört med det traditionella sättet är att motiveringarna ges lika stor plats som de matematiska termerna. Genom att motivera varje steg blir lösningen en helhet som innehåller all information som behövs för att förstå vad som sker; utan förklaringar och motiveringar förblir den tankeverksamhet som den studerande eller läraren varit engagerad i implicit [6, 7]. Motiveringarna är inte enbart viktiga för de studerande, utan även för läraren, eftersom det är förklaringarna — inte det slutliga svaret — som gör det möjligt att följa med en studerandes förståelse [11].

Studerande är dock inte vana vid att motivera sina lösningar [6] och det är därför väntat att de dels kan uppleva det svårt att veta hur de skall motivera ("hur förklarar man matematik med naturligt språk?"), dels uppvisa ett visst motstånd mot att behöva motivera sina lösningar överhuvudtaget ("varför skriva ner en massa 'onödig' text?"). Två av de huvudsakliga nackdelarna som framkom i vår analys kan därför förankras i motiveringarna: då man även förklarar vad man gör blir lösningar längre, samtidigt som de också tar längre tid att skriva ner. En analys av uppgiftsdata från gymnasiekursen visade dock att strukturerade härledningar har potential att förbättra studerandes förmåga att motivera sina lösningar redan under en enda kurs [8]. Vidare verkar förklaringarnas betydelse öka ju svårare och mer obekanta uppgifter det är frågan om [3]. Motiveringarna förefaller därmed vara något av ett tveeggat svärd för de studerande — något som de å ena sidan upplever som en stor fördel, men som å andra sidan kräver mer tid och arbete: "det tar längre tid, men jag förstår bättre".

Formatet introducerar en viss grad av syntax, som man förutsätts använda. Detta pekades även ut av de studerande som en nackdel. Medan syntaxen kan kännas utmanande i början då man använder penna och papper och man måste komma ihåg alla detaljer, är den inget problem om man skriver sina lösningar på dator med hjälp av en textredigerare med inbyggt syntaxstöd. Vår forskningsgrupp har utvecklat en sådan editor och den har aktivt använts i E-Math-projektets interaktiva e-böcker.

Summering

Vi har i denna artikel gett en översikt över hur strukturerade härledningar har använts i undervisningen sedan början av 2000-talet och presenterat flera lovande resultat. Enligt de omfattande pilotstudierna från början av 2000-talet har metoden potential att förbättra studerandes resultat samt leda till en mindre andel avbrott i studierna. De studerande uppskattar att metoden gör det lättare att först, följa med i lösningar och hitta fel, men upplever samtidigt den ökade tidsåtgången, den nya syntaxen och de längre lösningarna som problematiska.

Vi lever i dag i ett brytningsskede där digitala läromedel håller på att åtminstone delvis ersätta traditionella pappersbaserade material. E-Math-projektet som introducerats kort i denna artikel har visat att man kan skapa interaktiva läromedel för matematikundervisningen som uppskattas av både studerande och lärare. Projektet kommer att presenteras i en uppföljande artikel i Nämnaren, men den som redan nu vill bekanta sig med projektet och de interaktiva e-böckerna kan läsa mer på adressen http://www.emath.eu/sv.

References

[1] Ralph-Johan Back. Matematik med litet logik: Introduktion till strukturerade härledningar i gymnasiematematiken. Technical Report TUCS Lecture Notes 7, Turku Centre for Computer Science, October 2008.

[2] Ralph-Johan Back. Structured Derivations: a Unified Proof Style for Teaching Mathematics. *Formal Aspects of Computing*, 22(5):629–661, 2010.

[3] Ralph-Johan Back, Linda Mannila, and Solveig Wallin. Student Justifications in High School Mathematics. In *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Lyon, France, 2009.

[4] Ralph-Johan Back and Joakim von Wright. Structured Derivations: a Method for Doing High-School Mathematics Carefully. Technical Report 246, Turku Centre for Computer Science, 1999.

[5] Ralph-Johan Back and Joakim von Wright. Matematik med litet logik: Strukturerade härledningar i gymnasiematematiken. Technical Report TUCS Lecture Notes 1, Turku Centre for Computer Science, October 2008.

[6] Tommy Dreyfus. Why Johnny Can't Prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1-3):85–109, 1999.

[7] Uri Leron. Structuring mathematical proofs. *American Mathematical Monthly*, 90(3):174–185, 1983.

[8] Linda Mannila and Solveig Wallin. Promoting Students' Justification Skills Using Structured Derivations. In *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, pages 64–69, Taipei, Taiwan, 2009. National Taiwan Normal University.

[9] Mia Peltomäki and Ralph-Johan Back. An Empirical Evaluation of Structured Derivations in High School Mathematics. In *ICMI 19: 19th ICMI Study Conference on Proof and Proving in Mathematics Education*, 2009.

[10] Mia Peltomäki and Tapio Salakoski. Strict Logical Notation is Not a Part of the Problem but a Part of the Solution for Teaching High-School Mathematics. In *Proceedings of the Fourth Finnish/Baltic Sea Conference on Computer Science Education - Koli Calling*, pages 116–120, 2004.

[11] Susan Pirie and Thomas Kieren. Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 23(5):505–528, 1992.

[12] Petri Sallasmaa, Tero Liimatainen, Linda Mannila, Mia Peltomäki, Tapio Salakoski, Petri Salmela, and Ralph-Johan Back. Interaktiivinen oppimisympäristö matematiikan opetukseen - kokemuksia ja tulevaisuuden haasteita. In Sanna Kankaanranta, Marja Vahtivuori-Hänninen, editor, *Opetusteknologia koulun arjessa II*. Jyväskylän yliopisto, Koulutuksen tutkimuslaitos, 2011.

[13] Petri Sallasmaa, Linda Mannila, Mia Peltomäki, Tapio Salakoski, Petri Salmela, and Ralph-Johan Back. Haasteet ja mahdollisuudet tietokonetuetussa matematiikan opetuksessa. In Marja Kankaanranta, editor, *Opetusteknologia koulun arjessa*. Jyväskylän yliopisto, Koulutuksen tutkimuslaitos, 2011.