# Geometri på rutat papper

DARINA JIROTKOVÁ

I artikeln visar jag hur det är möjligt att genom ett flertal delupptäckter vägleda elever fram till djupare upptäckter i geometri. En av dessa är metoden för att bestämma alla pythagoreiska tripplar genom att använda enkla konstruktioner på rutnätspapper. Uttryckt i algebraiska termer så letar vi efter alla heltalslösningar till $x^2+y^2=z^2$. Tonvikten ligger på ett konstruktivistiskt förhållningssätt. Studien baserades på en serie experiment som genomfördes med elever i olika åldrar och med lärarstuderande. Målet med denna forskning är att utveckla och styra elevers upptäcktsprocesser. Detta kan ge dem möjlighet att känna framgångens glädje och tillfredsställelsen i att göra små och stora upptäckter, att utveckla sitt tänkande om orsakssamband och ge dem insikter i aritmetikens och geometrins strukturer, i synnerhet kopplingarna mellan dessa. I slutet av artikeln finns ett antal uppgifter som kan användas med elever i grundskolans tidigare del.

Sedan 1990, när det blev möjligt att förändra kursplanerna vid Fakulteten för undervisning i Prag, har geometrikursen för blivande lärare i det som motsvarar svensk grundskolas tidigare år [1] genomgått stora förändringar med avseende på innehåll och begreppsbildning.

Skälen till att dessa förändringar genomfördes var det rådande missnöjet med den gällande kursen i geometri. Dessutom var vi övertygade om att det som avgör kvaliteten i det pedagogiska arbetet inte bara är studenternas ämneskunskaper eller vad de har presterat i examinationer, utan även deras attityd till matematik och till elever, deras intellektuella självförtroende, baserat på

[1] I Tjeckien studerar dessa blivande lärare i 5 år, om de även väljer att studera ett främmande språk, vilket leder till magisterexamen. De studerar alla skolans ämnen, och tiden som avsätts för matematik är i genomsnitt 2,5 timmar per vecka under 7 terminer. Här ingår kurser i aritmetik, geometri och didaktik. Blivande gymnasielärare i matematik studerar ämnet i 5 år med ungefär 8 timmar per vecka i olika delområden. De väljer också ett andra ämne som de studerar parallellt med matematik.

kvalitativt tänkande och förståelse för de mekanismer som avgör elevers matematiska beteende och utveckling.

Efter flera års aktionsforskning, 1994–2000, under ledning av M. Hejný, beslöts att de traditionella målen i geometrikursen skulle slopas. Dessa mål innebar att visa studenterna en vacker och logiskt precis, axiomatisk, euklidisk geometri och att förse dem med färdigförpackad, systematiskt ordnad kunskap. De flesta studenter lyckades inte förstå strukturen, och därför blev deras kunskap i stor utsträckning formell. Det var mycket annorlunda än vad som några år senare skulle förväntas av deras undervisning. Dessa traditionella mål ersattes av nya, som vi hoppades skulle öppna vägen för studenterna att lära sig en rad färdigheter som både de och deras presumtiva elever skulle behöva för att göra likväl som för att lära sig matematik. Vi lade huvudvikten på utveckling av kognitiva förmågor, som att experimentera, att upptäcka, att argumentera, att skapa bilder av geometriska begrepp och att utveckla dem genom gruppdiskussioner. Avsikten var också att betona utvecklingen av studenternas egen förmåga att föra resonemang och att tolka dessa bilder och se deras plats i den geometriska världens struktur. Dessutom ville vi att studenterna skulle utveckla förmågan att undersöka sina egna tankeprocesser, att upptäcka misstag i sitt tänkande och att kunna agera effektivt när de upptäckte misstagen. Vi fick även ta med i beräkningen att spännvidden i studenternas förkunskaper var mycket stor.

Innehållet i den nya kursen avspeglar studenternas behov i deras framtida roll som lärare, och en lärobok producerades speciellt för dem (Hejný & Jirotková). Läroboken skrevs på ett sådant sätt att principerna i det konstruktivistiska förhållningssättet kunde tillämpas i alla situationer (Hejný & Kurina, 1998; Noddings, 1990). Med detta menar vi att läraren inte endast överför kunskap till eleverna utan även presenterar problem, ställer frågor och leder diskussioner i klassen. Läraren är inte längre domaren som avgör vad som är fel och vad som är rätt. Eleverna memorerar inte formler, definitioner, algoritmer, teorem och bevis för dessa. Utgående från sitt individuella arbete, sina egna experiment samt presentation och diskussion av sina resultat söker de efter nya samband, formulerar hypoteser och konstruerar gradvis ny kunskap. Nya problem initieras ofta av eleverna själva. Vissa problem kan förbli olösta eller delvis olösta under ett antal lektioner innan eleverna, tillsammans med läraren, kommer fram till någon slutsats. Misstag anses inte vara negativa, utan ses i stället som tillfällen att lära. Eleverna vägleds till att se misstag, att söka efter orsaker och att föreslå strategier för att avhjälpa och undvika dem i framtiden.

En del av de idéer som används i denna artikel kommer från läroboken ifråga (Hejný & Jirotková, 1999).

## Forskningsmetodik

Under flera år genomförde vi aktionsforskning under geometrikursen för blivande lärare för motsvarande svensk grundskolas tidigare år. Parallella grupper undervisades av Hejný och Jirotková för att vi skulle kunna diskutera och jämföra utfallet efter varje lektion. Scenariot för varje lektion var noggrant planerat i förväg. Studenterna fick börja varje pass med ett fem minuter långt test, och resultatet av detta analyserades för att studenterna skulle få respons på sina kunskaper och färdigheter. Studenterna utmanades att reflektera kring sina lösningsprocesser på speciella uppgifter som de åtog sig att göra utanför klassrummet. I slutet av terminen fick studenterna lösa helt nya uppgifter som kunde lösas genom att de använde samma arbetsmetoder som introducerats under terminen. Självreflektion kring lösningsprocessen var också ett krav. Studenternas skriftliga arbete analyserades för att man skulle se vilka kunskaper de förvärvat utan verklig förståelse. Detta innebar att innehåll och ansatser gradvis förändrades. Dessutom introducerades ett nytt sätt att utvärdera, vilket innebar att studenterna fick poäng för alla relevanta aktiviteter, och poängen ackumulerades under kursen och avgjorde vilket slutbetyg de fick. Forskningsarbetet pågår fortfarande, med särskild tonvikt på hur effektiv den konstruktivistiska ansatsen är när det gäller utveckling av ny kunskap hos studenterna (Jirotková & Stehlíková, 2003). Den forskningsmetod som tillämpas i denna del av arbetet består av halvstrukturerade studentintervjuer som spelas in, skrivs ut och analyseras. Resultatet diskuteras sedan med de intervjuade.

Grunden för vårt arbete utgjordes dels av Hejnýs mångåriga, 1976 till 1988, experimentella undervisning av elever i olika åldrar, dels av Hejnýs och Jirotkovás kurser med blivande lärare i elementär och analytisk geometri från 1990 till 2001.

## Resultat

I det här avsnittet visar vi hur man kan leda studenterna till djupare insikter genom ett flertal delupptäckter, som vi antydde i inledningen. Olika problemsituationer presenterades för elever i åldrarna 6–7 år och äldre och till lärarstuderande. Vi har valt några av dessa tillsammans med de framväxande lösningarna för att ge exempel på hur man kan handleda eleverna till upptäckten av pythagoreiska tripplar (Hall & Rowland, 1997). Detta exempel är ett collage av flera lösningsprocesser, sammanställda över tid med olika grupper av elever eller lärarstuderande i olika geometrikurser. De faktiska lösningarna av problemsituationerna beskrivs i detta avsnitt som *episoder*.

Handledarna presenterar helt enkelt problemsituationen, utan att ge eleverna någon detaljerad instruktion. De ställer bara frågor och ger tips som kan hjälpa eleverna att hitta lösningar samt leder diskussioner med och mellan eleverna. Eleverna förväntas lösa uppgifterna genom att använda sina egna erfarenheter – de nya erfarenheter de får genom sitt experimenterande och genom omfattande diskussioner med varandra. De konstruerar ny kunskap genom generalisering. Det händer ofta under denna process att elever själva kommer på nya problem.

Den terminologi som genomgående används i dessa uppgifter är *rutnätspapper*, alltså rutat papper, *nätpunkter*, som är skärningspunkterna mellan horisontella och vertikala linjer, *nätsträcka*, en sträcka vars ändpunkter är nätpunkter, *nätlinjer*, en rät linje som går genom minst två nätpunkter. *Nättriangel* och *nätpolygon* definieras på motsvarande sätt.

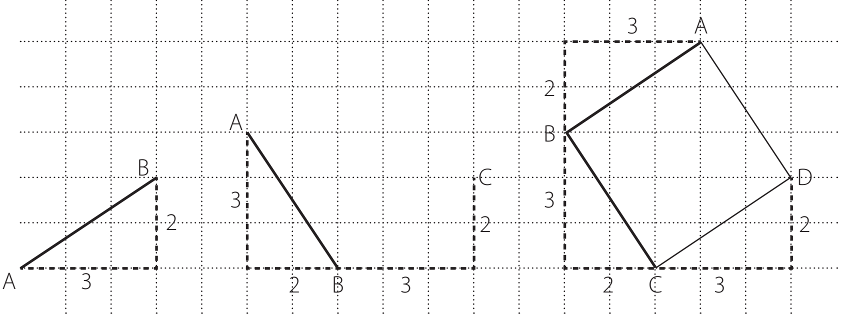
Den inledande problemsituationen för eleverna var helt enkelt att mäta nätsträckor på rutnätspapper så exakt som möjligt. Lösandet av detta problem gav upphov till ett nytt: Var det möjligt att hitta diagonala nätsträckor vars längder kan uttryckas som ett heltal? Lösningen på detta problem förde oss till den algebraiska konstruktionen av alla pythagoreiska tripplar. Vi introducerade problemet genom att använda följande situation:

## Problemsituation 1 – Att rita kvadrater i rutnätet

Utgå från en given nätsträcka och rita minst en kvadrat för vilken den givna linjen utgör en sida.

**Episod 1 – Upptäckten av hur man konstruerar en nätkvadrat**

Efter att ha experimenterat och ritat olika kvadrater, upptäckte studenterna flera sätt att rita kvadraten. Två av dessa följer nedan.




Figur 1

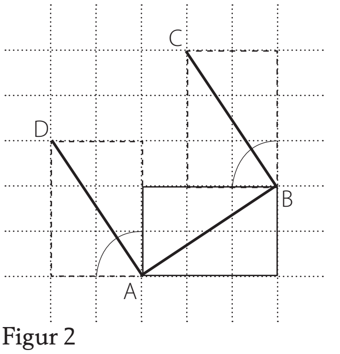
**1**

Utgå från den givna nätsträckan AB (se figur 1). Från A gå tre steg åt höger och sedan två steg upp för att komma till punkt B. Vrid sedan papperet -90°. Utgå från punkt B, ta tre steg till höger och sedan två steg uppåt för att komma till punkt C. Vrid papperet -90°. Upprepa samma procedur för att komma till punkt D. Upprepa proceduren för att komma tillbaka till A.

→

**2**

Rita rektangeln vars sidor ligger på rutpapperets linjer och vars diagonal är AB (se figur 2). Vrid denna rektangel medurs 90° runt punkt B. Rita den roterade rektangelns diagonal med början vid B. Den andra ändpunkten är C. Vrid nu den ursprungliga rektangeln 90° moturs runt punkt A och rita den roterade rektangelns diagonal med början i A och med D som andra ändpunkt. Förbind CD, och du får kvadraten ABCD.



Figur 2

**Kommentar**

Den kunskap som studenterna får genom att rita kvadraten gör att de kan rita en nätlinje genom en nätpunkt vinkelrätt mot en annan nätlinje.

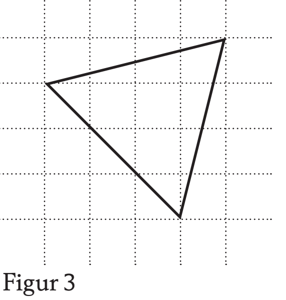
## Problemsituation 2 – Att söka liksidiga trianglar

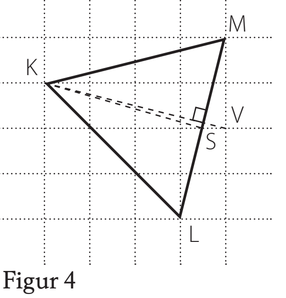
Hitta åtminstone en liksidig triangel.

**Episod 2 – Liksidig triangel**

Den bästa approximationen av en liksidig triangel som studenterna kunde finna framgår av figur 3. En diskussion om huruvida sidorna var lika ägde rum. Två motsatta synsätt dominerade diskussionen. En grupp studenter var övertygade om att den var liksidig efter att ha mätt den. Den andra uppfattningen ledde till konstruktionen av figur 4 med argumentet:

> *Om triangeln KLM är liksidig måste linjen KS vara dess höjd. Men det är den inte eftersom den vertikala linjen från K är KV och inte KS.*


Figur 3



Figur 4

**Kommentar**

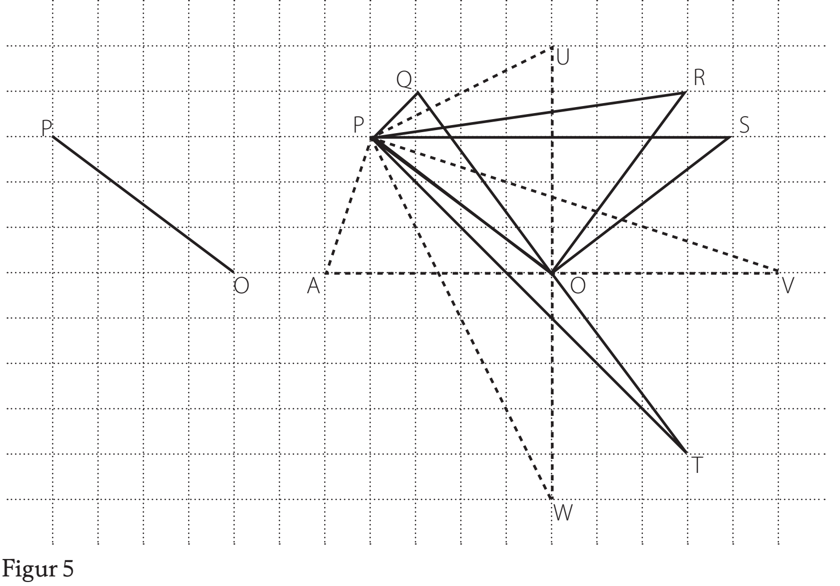
Problemsituation 2 förblev olöst på detta stadium. Vi fortsätter inte med den i denna artikel. Den löstes av studenterna när de kopplade problemet till nättrianglars area. Hur då?

**Episod 3 – Likbenta trianglar**

För att problemet skulle bli lättare ombads studenterna att söka efter likbenta trianglar när en av de lika långa sidorna var given. De tyckte att exemplet de fått i figur 5 var intressant och det gav upphov till en omfattande diskussion om huruvida triangeln POW var likbent eller inte. En hypotes uttrycktes mycket starkt:

*Ingen diagonal nätsträcka kan ha måttet ett exakt heltal.*

De använde idéerna som beskrevs i episod 2 för att bevisa att triangeln POW är likbent: Linjen som sammanbinder mittpunkten på PW och O är vinkelrät mot PW och därför är triangeln OPW likbent. Därför är sträckan OP exakt 5 enheter, trots att den är diagonal, vilket motbevisar hypotesen. En ny upptäckt gjordes dock, och ett nytt problem formulerades av studenterna själva.




Figur 5

## Problemsituation 3 – Att söka diagonala nätsträckor som har heltalsmått

Hitta så många diagonala nätsträckor som möjligt vars längd kan uttryckas som ett heltal relaterat till den enhet som rutnätet ger.

**Episod 4 – Likbenta nättrianglar med en sida utefter en nätlinje**

Studenterna som tagit intryck av sin senaste upptäckt fokuserade sin uppmärksamhet på den nya uppgiften och hittade flera av dessa trianglar. Nu fick handledaren ingripa för att styra studenternas sätt att experimentera. De fick följande vägledning: Om man ordnar sina experiment och väljer lämpliga belägg från dem visar sig lätt nya relationer.

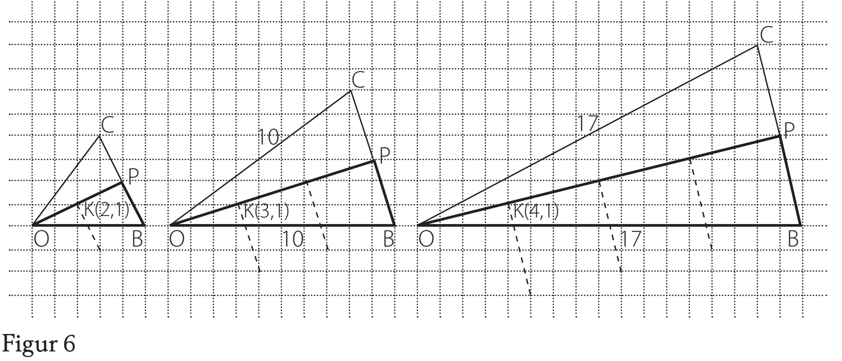
**Episod 5 – Upptäckten av triangelhöjdens nyckelroll**

Studenterna upptäckte en nyttig ledtråd som gjorde att de kunde rita den efterfrågade triangeln:

> *Börja rita triangeln genom att först rita den stråle som ska innehålla höjden i den efterfrågade triangeln.*

De formulerade följande hypotes:

> *Välj en godtycklig nätsträcka OK. Den kan alltid förlängas för att få nätsträckan OP och hitta punkten B, så att triangeln OPB är en rätvinklig triangel med hypotenusan OB på en nätlinje* (se figur 6).




Figur 6

**Episod 6 –**
**Användning av koordinater och upptäckt av det första sambandet**

Efter att ha ordnat alla de funna trianglarna O*BC* upptäckte studenterna det första sambandet. Detta formulerades efter att de löst en uppgift som inte kunde lösas genom att de ritade på rutpapperet. De ombads att rita triangeln O*BC* så att *K*:s koordinater var (7,1) där O var origo. Studenterna upptäckte att koordinaterna gjorde att de kunde beskriva vad som hände utanför rutnätets begränsningar. De formulerade då följande:

> *Vi får den efterfrågade triangelns höjd genom att förlänga nätsträckan* OK *sju gånger. Generellt, om punkten K:s koordinater är (a, 1) är det nödvändigt att förlänga nätsträckan* OK *a gånger.*

**Kommentar**

Resultatet av den här generaliseringen är ett enparametriskt system av trianglar och sträckor med heltalslängder. Systemet förstås proceduriellt och talen som används är mätetal (Hejný, 2003; Hejný & Littler, 2002).

**Episod 7 – Användning av algebra**

När man beskriver trianglarna med hörnens koordinater och andra relevanta punkter K och P, får de tal man använder en ny roll, en adress (Hejný, 2003; Hejný & Littler, 2002). Studenterna uppmanades att beskriva föregående situation, se figur 6, i tabellform med hjälp av talen som är punkternas koordinater i diagrammet.

Innebörden av punkterna *K*, *P*, *B*, *C* anges i figur 6. Uppgifterna för de tre första raderna togs direkt från figur 6. Det var inte nödvändigt att rita fler bilder för att komplettera de andra raderna eftersom talmönstren i kolumnerna var lätta att se. När studenterna kunde komplettera en rad med tal var de nära generaliseringen på den sista raden i tabell 1.

Tabell 1

| *K* | | *P* | | *B* | | *C* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_1$ | $k_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $b_1$ | $b_2$ | $c_1$ | $c_2$ |
| 2 | 1 | 4 | 2 | 5 | 0 | 3 | 4 |
| 3 | 1 | 9 | 3 | 10 | 0 | 8 | 6 |
| 4 | 1 | 16 | 4 | 17 | 0 | 15 | 8 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 7 | 1 | 49 | 7 | 50 | 0 | 48 | 14 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $a$ | 1 | $a^2$ | $a$ | $a^2+1$ | 0 | $a^2-1$ | $2a$ |

**Kommentar**

Mängden likbenta trianglar och diagonala nätsträckor med heltalslängd uppfattas nu som ett begrepp. Resultatet av detta är följande uttalande:

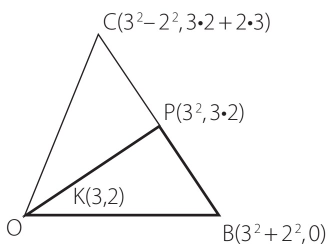
> *För varje naturligt tal a, existerar det diagonala nätsträckor* OC *med heltalslängd.* C*:s koordinater är* $(a^2-1, 2a)$ *och* OC*:s längd är* $(a^2+1)$.

**Episod 8 – Utmaning att lösa fallet K(a, 2)**

Eleverna ritade trianglar OBC då K var (3, 2), (4, 2), (5, 2) ..., och de bestämde koordinaterna för punkterna O, P, B, C för varje fall (se figur 7). Uppställningen av data i tabellform gjorde det möjligt att formulera de nya relationer som uttrycks på den sista raden i tabell 2. Resultatet formulerades som:

> *För varje naturligt tal a finns en diagonal nätsträcka* OC *med heltalslängd.*
> C*:s koordinater är* $(a^2-4, 4a)$ *och* OC*:s längd är* $(a^2+4)$.

Figur 7




Tabell 2

| *K* | | *P* | | *B* | | *C* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_1$ | $k_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $b_1$ | $b_2$ | $c_1$ | $c_2$ |
| 3 | 2 | 9 | 6 | 13 | 0 | 5 | 12 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 5 | 2 | 25 | 10 | 29 | 0 | 21 | 20 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| 7 | 2 | 49 | 14 | 53 | 0 | 45 | 28 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $a$ | 2 | $a^2$ | $2a$ | $a^2+4$ | 0 | $a^2-4$ | $2 \cdot 2a$ |

**Kommentar**

Nu kan man se att den andra koordinaten också påverkar resultatet. Detta beskrivs i följande episod.

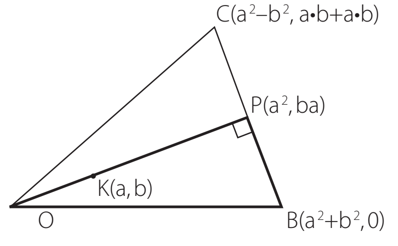
**Episod 9 – Generalisering**

Studenterna löste fallet $K(a, 3)$, och denna erfarenhet gjorde att de snabbt kunde gå vidare till resultatet av det här fallet. Handledaren bad eleverna att i en ny tabell sammanställa de sista raderna i föregående tabeller. Eleverna lade märke till att uttrycken i kolumnerna uppförde sig som förväntat. De hade inga problem med att fylla i någon rad i tabellen och komma fram till det generella uttrycket i sista raden på den nya tabell som de tidigare tabellernas sista rader överförts till (se tabell 3).

Nu kunde de också finna den likbenta triangeln $OBC$ för varje punkt $K(a, b)$, där $a$ och $b$ är naturliga tal. De upptäckta relationerna tolkades både muntligt och i diagramform (se figur 8).

> *För varje par av naturliga tal a, b, $a > b$, är det möjligt att hitta en diagonal nätsträcka* OC *som har heltalslängd.*
> *C:s koordinater är $(a^2 - b^2, 2ab)$ och* OC*:s längd är $a^2 + b^2$.*

Figur 8




Tabell 3

| K | | P | | B | | C | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_1$ | $k_2$ | $p_1$ | $p_2$ | $b_1$ | $b_2$ | $c_1$ | $c_2$ |
| $a$ | 1 | $a^2$ | $a$ | $a^2+1$ | 0 | $a^2-1$ | $2a$ |
| $a$ | 2 | $a^2$ | $2a$ | $a^2+4$ | 0 | $a^2-4$ | $2\cdot 2a$ |
| $a$ | 3 | $a^2$ | $3a$ | $a^2+9$ | 0 | $a^2-9$ | $2\cdot 3a$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $a$ | 7 | $a^2$ | $7a$ | $a^2+7^2$ | 0 | $a^2-7^2$ | $2\cdot 7a$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $a$ | $b$ | $a^2$ | $ba$ | $a^2+b^2$ | 0 | $a^2-b^2$ | $2ba$ |

**Kommentar**

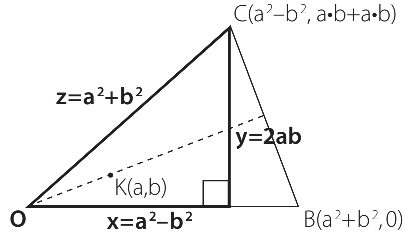
Tabellerna ovan visar på kunskapens abstraktionsprocess. De första tre raderna är belägg från konkreta situationer, isolerade modeller (Hejný, 2003). Den rad där $k_2$ är 7 uttrycker studentens förmåga att se ett mönster i den givna tabellen (generisk modell). Den sista raden visar att studenten har tillägnat sig den abstrakta kunskapen.

**Episod 10 – Att använda Pythagoras sats**

Den sista utmaningen är att upptäcka alla pythagoreiska tripplar, det vill säga, i algebraiska termer finna alla lösningarna på den diofantiska ekvationen $x^2 + y^2 = z^2$ i mängden naturliga tal. Genom att se tillbaka på figur 8 och ta Pythagoras sats med i beräkningen kunde studenterna formulera en ny tolkning av sitt senaste resultat.

> *Det är möjligt att beskriva några av lösningarna av den givna ekvationen på följande sätt:* $z = a^2 + b^2$, $x = a^2 - b^2$ *och* $y = 2ab$ (se figur 9).

Figur 9




**Kommentar**

En lösning som $z = 15$, $x = 9$ och $y = 12$, vilket är en helt korrekt pythagoreisk trippel, kan inte bestämmas på detta sätt. Vi kan emellertid få denna trippel genom att multiplicera trippeln (3, 4, 5), med i detta fall 3. De tripplar där de tre talen inte har en gemensam faktor kallas primitiva pythagoreiska tripplar. Vi kan hävda att alla primitiva pythagoreiska tripplar kan hittas genom den upptäckta metoden. Vi lämnar beviset för detta åt läsaren.

## Diskussion

Som vi framhållit ovan presenteras de 10 episoderna som faktiska elevlösningar, medan de i själva verket samlats in från flera kurser vid olika tillfällen. Hela proceduren genomfördes med blivande lärare för äldre elever under ett fåtal lektioner i deras kurs i analytisk geometri. Det är nästan omöjligt att säga hur lång tid det tar för studenterna att nå denna nivå av abstrakt kunskap. Till exempel är en av de viktigaste principerna i ett konstruktivistiskt förhållningssätt oförutsägbarhet. Det kan hända att studenter lägger fram ett problem som leder i en helt annan riktning än den som läraren tänkt sig. Läraren får inte försitta tillfället att låta studenterna lösa sina egna problem, men måste återgå till sin ursprungliga planering vid lämpligt tillfälle.

Processen genomfördes på liknande sätt med blivande lärare för yngre elever. Här fick emellertid många fler uppgifter ges på varje stadium, för att utveckla studenternas självförtroende i den nya geometriska miljön (rutnätspapper) och för att ge dem tillräcklig erfarenhet att generalisera utifrån. Av dessa studenter lyckades en del inte uppnå det sista stadiet av abstrakt kunskap utan hjälp.

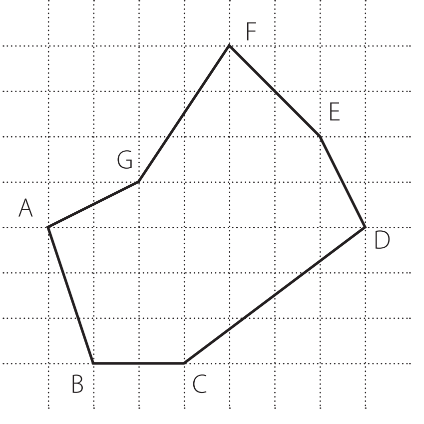
Vi arbetade också mycket med den här metoden och lärandemiljön, med elever i upp till ca 12 års ålder. Ämnet som diskuteras i denna artikel, pythagoreiska tripplar, är inte lämpligt på denna nivå. Om de preliminära idéerna i episoderna 1 till 6 utvidgas med många fler uppgifter fungerar de bra även bland dessa elever.

Här följer fler exempel på uppgifter lämpliga för dessa elever, utvecklade av Hejný och Jirotková. Uppgifterna 1–4 fokuserar på språk och symboler. Innan koordinater har introducerats för unga elever (8 år gamla) kan de beskriva vägen mellan två nätpunkter med hjälp av pilar.

**Uppgift 1**

John ville beskriva ritningen i figur 10 för sin vän i Kina. Han kom på ett sätt att göra detta utan att använda ord. Han började så här:
$A \downarrow\downarrow\downarrow\rightarrow B \rightarrow\rightarrow C \rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow \uparrow\uparrow\uparrow\ D$...
Avsluta beskrivningen av Johns ritning.

Figur 10




**Uppgift 2**

Rita den bild som beskrivs med följande piltecken:
$K \rightarrow\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\downarrow\downarrow\leftarrow L\ \downarrow\rightarrow\downarrow\leftarrow\leftarrow M \downarrow\leftarrow\uparrow\leftarrow\uparrow\leftarrow\downarrow\downarrow N$.
Markera punkterna $K, L, M, N$.
b) Kan du skriva piltecknen på ett enklare sätt?

**Uppgift 3**

På hur många sätt kan du med hjälp av pilar beskriva vägen från punkt $G$ till punkt $E$ i figur 10?

**Uppgift 4**

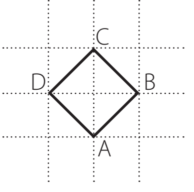
I figur 11 finns en nätkvadrat ABCD. Den kan beskrivas med hjälp av sex pilar: $A \rightarrow \uparrow B \uparrow \leftarrow C \leftarrow \downarrow D$.

a Är det möjligt att beskriva en nätkvadrat med hjälp av 8 pilar? Om det är så, skriv ner pilnotationen.

b Beskriv en godtycklig nätkvadrat med hjälp av 12 pilar. Hitta minst 5 olika kvadrater.

c Hitta ett enkelt sätt att skapa pilnotationen för en godtycklig nätkvadrat så att den kan tillämpas på mycket stora kvadrater, t ex en kvadrat med en sida längre än 100 enheter.

Figur 11




**Kommentar**

Figuren är ett begrepp. Dess beskrivning är en process. Uppgift 1 fokuserar på överföringen av begreppet till processen,"processualisering" av ett begrepp.

Uppgift 2 fokuserar på att överföra processen till begreppet, "konceptualisering" av en process, och syftar till ett mer passande proceduriellt uttryck av begreppet. Uppgift 3 och 4 visar hur det är möjligt att anknyta arbete med nätpapper till kombinatorik. Uppgift 3 är tvetydigt formulerad. Elever som löser detta problem letar oftast bara efter den kortaste vägen från G till *E*, men det finns fem sådana. Så snart som någon elev upptäcker även den längre vägen, t ex genom punkten *F*, är det uppenbart att det finns ett obegränsat antal lösningar på uppgiften och att det inte är möjligt att beskriva dem alla.

Uppgiftssekvensen leder fram till koordinater. Den väsentliga skillnaden mellan pilnotationen och dessa är att varje punkt i pilnotationen relaterar till den föregående medan varje punkt i koordinatsystemet relaterades till en fast punkt – origo.

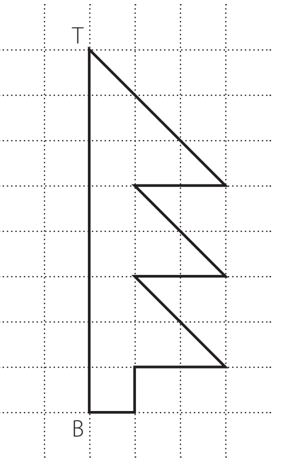
**Uppgift 5**

Följande pilnotation beskriver den likbenta triangeln *KLM*:

$K \rightarrow \downarrow \rightarrow \rightarrow \uparrow \uparrow \leftarrow \leftarrow \downarrow \leftarrow K$. Någon har tagit bort bokstäverna *L* och *M* från notationen. Komplettera pilnotationen ovan genom att sätta in bokstäverna *L* och *M* på lämpliga ställen. Hur många lösningar kan du hitta?

**Uppgift 6**

Skriv ner den pilnotation som beskriver ritningen i figur 12 och komplettera pilnotationen så att resultatet blir en symmetrisk form med *BT* som symmetrilinje.




Figur 12

**Kommentar**

Vi anser att den elev som klarar att använda pilnotationen för att beskriva den saknade delen av figuren utan att rita den har en god förmåga att använda sitt strukturella tänkande.

## Slutsats

I denna artikel har vi introducerat en heuristisk metod som vi kallar metoden med stegvis införande av koordinater (Hejný, 1989). Den bygger på experiment, systematisering, överföring av upptäckter till mönster, att göra och utnyttja relationer mellan visuell geometri och proceduriell aritmetik, att generalisera delresultat samt att ställa samman dessa resultat för att nå generalisering. Metodens slutliga steg är att tolka de generella slutsatserna.

Metoden har ett brett användningsområde. Den går att använda med elever i åk 1–6 och är möjlig att individualisera. Vissa elever kan behöva fler exempel för att upptäcka mönster i tabellerna, och högpresterande elever kan formulera resultaten på symbolspråk. Arbetssättet är tidskrävande och ställer krav på tålamod hos handledaren så att eleverna inte stressas fram till att acceptera kunskap som de inte har upptäckt själva. Vi är medvetna om att våra idéer kan vara svåra att genomföra när man arbetar i grupper på 30 elever eller fler. Handledaren måste balansera verkligheten mot sina målsättningar. Den metod vi föreslagit här är värd att pröva genom alla fördelar man får, elevernas glädje över att själva erövra kunskap, med djupare förståelse av geometriska begrepp och inte minst deras vilja att utveckla sin kunskap i ämnet. I denna artikel visar vi att rutnätspapper är en lämplig geometrisk miljö för förverkligandet av det konstruktivistiska förhållningssättet till undervisning.

## *Referenser*

Hall, B. & Rowland, T. (1997). The classical form of Pythagorean triples. *The Mathematical Gazette 81*(491), 270–272.

Hejný, M. (1989). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava.

Hejný, M. (2003). Understanding and structure. I A. Mariotii (Red), *Proceedings CERME 2003*, Bellaria, Italy.

Hejný, M. & Jirotková, D. (1999). *Ctverekovaný papír jako most mezi geometrií a aritmetikou*, Praha: UK, Pedagogická fakulta.

Hejný, M. & Jirotková, D. & Stehlíková, N. (1996). *Analytická geometrie*. Praha: Karolinum.

Hejný, M. & Kurina, F. (1998). Konstruktivní prístupy k vyucování matematice. *Matematika – fyzika – informatika*, V.7, Praha.

Hejný, M. & Littler, G. (2002). The beginning of algebraic thinking. I C. Bergsten (Red), *Dokumentation av 12:e Matematikbiennalen*. Linköpings Universitet.

Jirotková, D. & Stehlíková, N. (2003). Constructivist approaches in the mathematical education of future teachers. Poster. I N. A. Paterman, B. J. Dogherty & J. Zilliox (Red), *Proceedings PME 27, PME-NA 25* (s 1–295). College of Education, University of Hawaii.

Noddings, N. (1990). Constructivism in mathematics education. I R. B. Davis, C. A. Maher & N. Noddings (Red), *Constructivist views of the teaching and learning of mathematics*, (s 7–18). (Journal for Research in Mathematics Education Monograph Series, Number 4.) Reston, VA: NCTM.