

Att lära om geometriska kroppar

GRAHAM LITTLER & DARINA JIROTKOVÁ

I artikeln redovisar vi delresultat från ett pågående longitudinellt forskningsprojekt som påbörjades 1993. Projektets mål är att undersöka hur känsel och syn (taktill och visuell perception) bidrar när elever skapar sig inre bilder av tredimensionella former. Ett annat mål är att identifiera hur elever tänker när de kommunicerar kring och arbetar med geometriska kroppar. Vi har utgått från ett antal uppgifter som gavs till elever i åldrarna 9–11 år i Tjeckien och Storbritannien. Genom analys av de experiment som genomfördes kunde vi identifiera flera olika mentala processer som barn använder när de löser uppgifterna. Dessa beskrev vi som "mekanismer" och tillämpade dem på elevernas lösningar.

Vi visar hur våra uppgifter kan användas som diagnosverktyg för att hjälpa lärare att fastställa elevers grad av förståelse av geometriska kroppars egenskaper och även för att i undervisningen utveckla elevernas förståelse av dessa.

Från tidig ålder får barn erfarenhet av tredimensionella former. De utforskar föremål och utnyttjar först känsel med hjälp av fingrar, ibland tår och ofta munnen. Så småningom hjälper synen dem att befästa medvetenheten om en speciell form, t ex när de leker med sitt favoritföremål eller noggrant undersöker något nytt. Dessa undersökningar lär barnet att skilja mellan sträva och släta ytor, plana och välvda, och andra kännetecken som t ex färg. Det förekommer dock inte mycket kommunikation kring dessa kännetecken förutom frågor som "Vad har det för färg?" Många föräldrar hjälper omedvetet till att utveckla geometriska färdigheter genom att ge sina barn leksaker som byggklossar, lego osv, vilka inte bara bidrar till att utveckla barnens motoriska färdigheter, utan även till att stärka deras medvetenhet om de former de hanterar och att utveckla deras formuppfattning.

När barn bygger saker kan de ställa sig frågor som "vilken kloss passar här?" eller "vilken legobit behöver jag för att bygga väggen färdig?" När de gör detta betraktar de kropparna de hanterar som objekt, dvs som *en helhet*, och ser inte

på kropparnas kännetecken utom möjligen när det gäller längd för "att se om den passar", något de vanligen löser genom att pröva sig fram.

Enligt vår erfarenhet, och efter att ha studerat ett flertal läroböcker, utnyttjas inte barnens tidiga erfarenhet av tredimensionella kroppar fullt ut när barnen börjar skolan. Lärare och läromedelsförfattare föredrar att börja med tvådimensionella former då "dessa är mycket lättare för barnen att känna igen". De menar att barnen ska kunna klassificera former som trianglar, kvadrater, rektanglar och cirklar. Vi menar att man härigenom går miste om en stor och viktig möjlighet. Mycket kan göras de första åren i skolan genom att barnen får använda material som byggklossar, tomma förpackningar etc och genom att de får berätta vilka kroppar de har använt eller byggt med och varför. På så vis ges de möjlighet att fortsätta att utveckla sina tredimensionella begrepp.

De tankar och kommentarer som vi framfört ovan bygger på arbete och observationer i många klasser, samt på resultaten av ett pågående projekt som påbörjades 1993 av Jirotková och Hejný (Jirotková, 2001). Det arbetet fortsattes med studier av elever i Tjeckien och Storbritannien av Jirotková och Littler (2002a, 2003b). Forskningens primära mål var att undersöka hur taktil och visuell perception av tredimensionella kroppar bidrar till att bygga upp geometriska bilder och förståelsen av geometriska begrepp. Ursprungligen utvecklades fyra uppgifter för detta ändamål. I tre av uppgifterna låg tonvikten på taktil perception. Det innebar att vi tog bort det vanligtvis dominerande sinnet, nämligen synen (den visuella perceptionen), så att vi kunde se hur känseln (den taktila perceptionen) bidrog till elevens förståelse av tredimensionella former. Den fjärde uppgiften tillät visuell perception. I vår ursprungliga forskning använde vi tygpåsar för att gömma kropparna. Denna metod hade en stor nackdel såttillvida att vi varken kunde se eller videofilma hur eleverna sorterade kropparna enbart med hjälp av känsel. Vi har nu utökat uppgifterna med ytterligare tre. I två av dessa ska eleverna välja en kropp utifrån en beskrivning från en kamrat som bara kunnat känna på kropparna. Den sista är en variant av den fjärde uppgiften där enbart känseln används. Under senare forskning kring de tre sista uppgifterna användes skärmar med hål i som barnen kunde arbeta genom utan att se kropparna. Vi kunde då studera och videofilma vad som hände. Betydelsen av kommunikation i den diagnostiska processen och i undervisningsprocessen (Hejný, 2000, 2003; Sfard, 2002) har betonats i vårt senare arbete med elever (Jirotková & Littler, 2003b).

Våra klassrumsobservationer, i flera länder, tyder på att det under många lektioner i geometri knappast förekommer någon kommunikation mellan lärare och elever, förutom envägskommunikation för att tex instruera eleverna, eller mellan elever. Lärarna koncentrerar sig i allmänhet på att eleverna ska kunna namnen på de vanligaste tredimensionella kropparna såsom kub, cylinder, sfär och möjligen rätblock. De är nöjda när eleverna använder dessa ord, utan att kontrollera om de förstår dem eller om de känner till kropparnas egenskaper. Innan eleverna gör den geometriska vokabulären till sin (internalisering) använder de ofta vardagligt tal för att beskriva kropparna och deras kännetecken. Till exempel använder de ordet sida både för sidoyta och för kant på en tredimensionell

kropp. Även när en internalisering har skett tycker många elever att det är svårt att skilja på dessa.

Vi tror att det i alla sammanhang är så att när en person beskriver en erfarenhet i ord, så uppfattas den på ett djupare sätt, personen tänker mycket mer medvetet på den och på de ord som behövs för att beskriva den. Detsamma gäller när elever ska kommunicera om geometriska objekt. De ser på kropparna på ett nytt sätt. De måste leta efter kännetecken som karaktäriserar kropparna och sedan hitta lämpliga ord för att beskriva dessa kännetecken.

När elever uppfattar en kropp enbart med känslan skickar känslsinnet signaler till hjärnan där det byggs upp en bild av det de känner. Kommunikation är i detta skede avgörande för att utveckla elevens förståelse av formerna och för att läraren ska kunna bedöma vad som rör sig i barnets tankar. Det är därför viktigt att de personer som är involverade i processen förstår varandra. Om elever ger ord eller uttryck olika betydelser kan det leda till missförstånd mellan dem. I vardagliga situationer kan en person ge flera förklaringar ur olika perspektiv för att missförstånd ska undvikas. Som lärare är vi dock inte vana vid att använda gradvis korrigerande strategi inom matematik eftersom matematiska termer har en så precis innebörd.

Verktyg för djupare förståelse av geometriska kroppar

De sju uppgifter vi utvecklade för vår forskning var till en början avsedda för diagnostiska ändamål. Senare fann vi att de även kunde användas som goda undervisningsverktyg för att utveckla elevernas förståelse av geometriska begrepp, deras relationer och struktur.

I sju uppgifter användes sexton kroppar i olika kombinationer:

- | | |
|--|--|
| 1 Kub | 9 Tetraeder |
| 2 Prisma med kvadratisk bas | 10 Pyramid med kvadratisk bas |
| 3 Stort rektangulärt prisma | 11 Stympad pyramid med rektangulär bas |
| 4 Litet rektangulärt prisma | 12 Icke-konvex pyramid med femhörnig bas |
| 5 Rätvinkligt triangulärt prisma | 13 Sfär |
| 6 Rätvinkligt likbent triangulärt prisma | 14 Cylinder |
| 7 Icke-konvext femhörnigt prisma | 15 Kon |
| 8 Sexhörnigt prisma | 16 Stympad kon |

Storleken var sådan att eleverna lätt kunde hantera dem och hålla kropparna i handen.

Uppgift 1

Material

Två ogenomskinliga tygpåsar. Påse A innehåller kropp 11. Påse B innehåller kropparna 1, 2, 5, 6, 9–16.

Instruktion

Stoppa ena handen i påse A och känn noggrant på kroppen. Ta nu ut handen och stoppa den i påse B. Försök hitta en kropp med samma form i påse B. Tala om ifall du hittar någon. Innan du tar ut den kropp som du har valt ska du ge mig ett eller flera skäl till varför du tror att det är en likadan, och du ska tala om vad du tycker är intressant med denna kropp.

Kommentar

Vi valde dessa kroppar för att vi ville ha med sådana som hade åtminstone ett kännetecken gemensamt med den gömda kroppen i påse A och därtill kroppar med helt annorlunda kännetecken, som tex sfär och cylinder.

Uppgift 2

Material

En ogenomskinlig tygpåse som innehåller kropparna 1, 2, 6, 9, 10, 11, 16.

Instruktion

Stoppa ena handen i påsen och välj ut en av kropparna som du tycker skiljer sig från de andra. Innan du tar ut den kropp som du har valt ska du tala om varför du tycker att den är annorlunda.

Kommentar

Vi valde färre kroppar för att inte förvirra eleverna. Alla var lätta att skilja från de andra. Det fanns till exempel bara en kropp som kunde kännetecknas som "rund". Vi förväntade oss att eleverna skulle välja den stympade konen, men de var tvungna att beskriva dess kännetecken innan de fick se den.

Uppgift 3

Material

En ogenomskinlig påse som innehåller kropparna 1, 4, 5, 6, 7, 9–15.

Instruktion

Du får stoppa båda händerna i påsen. Ordna kropparna i påsen i två grupper så att alla kropparna i en grupp har ett eller flera gemensamma kännetecken som du väljer ut. Kropparna i den andra gruppen ska inte ha detta eller dessa kännetecken. När du har gjort detta, och innan du tar ut de båda grupperna ur påsen ska du tala om för mig vilket eller vilka gemensamma kännetecken grupperna har. Sen kan du ta ut de båda grupperna och kontrollera om du är nöjd med din sortering. Om du inte är nöjd så ändra i grupperna, men tala om för mig varför du gör det.

Kommentar

Det begränsade antalet kroppar vi valde kunde grupperas på många olika sätt. Till exempel fanns det tre kroppar som kunde sägas vara runda, fyra som var spetsiga, fyra som var prismor osv (se sidan 73 för exempel på elevers klassifikation).

Uppgift 4

Uggle-spelet

Material

Alla kropparna 1–16 placeras fullt synliga framför två elever.

Instruktion

Spelet spelas av två "spelare" A och B. "Spelaren" kan antingen vara en person eller en grupp. Spelare A uppmanas att välja en kropp utan att spelare B får veta vilken. Vi rekommenderar att man antecknar vilken den valda kroppen är. Spelare B ska nu bestämma vilken den valda kroppen är genom att ställa frågor till spelare A som endast får svara med Ja eller Nej. När spelare B kommit fram till vilken kropp det gäller byter man roller, och vinnare är den elev som kan bestämma vilken kropp det handlar om med minst antal frågor.

Kommentar

Vi har använt Ugglespelet många gånger med olika typer av grupper, både äldre och yngre elever, lärarstuderande vid universitet och aktiva lärare i fortbildnings-sammanhang. Gruppstorleken har varierat från 2 till 28 deltagare. Lärare har spelat med elev, elev med elev, klass med lärare och klass uppdelad i två lag. Det finns många fördelar med att arbeta med grupper på det här sättet. Barnen lär sig sociala färdigheter genom att tvingas lyssna på varandras argument och att fatta gemensamma beslut. De lär av varandra när det gäller matematik, de måste kommunicera för att kunna lägga fram sina synpunkter och lär sig då matematiska termer av varandra. På liknande sätt har vi använt material som råkat finnas till hands, pentominobrickor, tvådimensionella former skapade av spelare på geo-bräden, bilder av tredimensionella kroppar eller enbart formernas namn. I en svensk skola använde vi de sex geometriska formerna i materialet "Pattern Blocks" som vanligen används för att skapa mönster (Jirotková & Littler, 2002b, 2003a). Genom att arbeta med konkreta material, symboler och med de geometriska formernas namn kan man stödja barnens begrepps-bildningsprocess.

Uppgift 5

Material

Elev A har en komplett uppsättning av kropparna bakom en skärm. Elev B har en kropp, som läraren har valt, bakom sin skärm.

Instruktion

Be elev B att stoppa in händerna genom skärmen och noga känna på kroppen och sedan beskriva den för elev A. Säg till elev A att stoppa in händerna genom skärmen och försöka hitta den kropp som elev B har beskrivit. Eleverna får diskutera uppgiften och elev A får be om mer information om den kropp han/hon söker. De byter roller när elev A har hittat rätt kropp.

Uppgift 6

Material

Eleverna A och B har varsin identisk uppsättning kroppar bakom sina skärmar.

Instruktion

Elev A ska känna på kropparna bakom sin skärm och välja en och sedan beskriva den för elev B. Elev B ska sedan försöka hitta den av kropparna som stämmer med beskrivningen bakom sin skärm. Det enda eleven får säga är "Jag behöver mer information".

Uppgift 7

Uggle-spelet – med bara känseln

Material

Två elever har varsin komplett uppsättning kroppar bakom sina skärmar.

Instruktion

Elev A väljer en kropp med hjälp av känseln. Elev B ska med känseln bestämma vilken kropp det är genom att ställa frågor till elev A. Frågorna får bara besvaras med *ja* eller *nej*.

Forskningens fokus

Som tidigare framhållits är detta arbete en del av ett långsiktigt projekt, och allt eftersom tiden har gått har vi koncentrerat oss på olika aspekter av analysarbetet. I början koncentrerades analysen på de av barnens ord som kunde ha en geometrisk innebörd. Orden klassificerades, och vi fann alla de möjliga tolkningarna (Jirotková, 2001). Målet var att förstå förhållandet mellan bilderna i elevernas medvetande och det ordförråd de använde i sin kommunikation. Vi ville veta om våra uppgifter kunde stödja barnens språkutveckling och deras förståelse av kropparna. Vi var särskilt uppmärksamma på de viktigaste kännetecknen som eleverna använde för att beskriva en kropp, men på detta stadium i vår forskning fann vi att vi hade otillräckliga belegg från deras kommunikation för att göra en analys, därav tonvikten på just kommunikation i vårt senare arbete. Detta har gjort det möjligt för oss att bättre förstå de elever vi har arbetat

med, att kunna skilja mellan när felaktiga ord är resultatet av otillräcklig kunskap eller brist på kommunikativa färdigheter och att kunna avgöra om korrekt användning av geometrisk terminologi förekommer utan korrekt förståelse. Denna erfarenhet har vi använt för att utveckla Ugglespelet som ett undervisningsredskap som kan användas för både barn och lärarstuderande.

Den andra aspekten vi koncentrerade oss på var att klassificera och ge möjliga förklaringar till de sociala fenomen och kognitiva tankeprocesser som förekommer i samband med att uppgifterna löses (Jirotková & Littler, 2002a). Dessa fenomen och processer innefattade

- muntliga beskrivningar av geometriska bilder,
- lärande om nya kroppar genom redan kända kroppar,
- proceduriell och begreppslig perception av geometriska objekt eller situationer,
- relationer mellan två- och tredimensionella objekt,
- hur den aktuella handledaren beskriver de olika kropparnas kännetecken,
- den atmosfär i vilken kommunikationen ägde rum,
- personliga relationer mellan deltagarna och medvetenheten om kommunikativa missförstånd.

I den här artikeln kommer vi att koncentrera oss på resultaten av den tredje aspekten av vårt arbete, nämligen beaktandet av de mentala processer som är involverade vid lösning av uppgifterna. Vi har kallat dessa processer för mekanismer. Vi kommer att beskriva dessa mekanismer och illustrera dem med exempel från vårt arbete med eleverna.

Mekanismer som används vid hantering av kroppar

Motivet att definiera mekanismerna uppstod vid analysen av elevernas svar på uppgifterna, i synnerhet uppgifterna 1 och 3. Analysen gav oss insikt i graden av elevernas förståelse och hjälpte oss att avgöra varje elevs aktuella geometriska utvecklingsnivå. I vår tidiga forskning fann vi det intressant att ett flertal elever misslyckades med att hitta den aktuella kroppen vid sitt första försök att lösa uppgift 1. Vi sökte efter orsaker till detta fenomen. Det var uppenbart att eleverna genom att tvingas att kommunicera mer i detalj om sitt val av kropp i den andra påsen började tänka på kropparna på ett annorlunda sätt. Det var med andra ord så att eleverna utvecklade sin förståelse av kropparna genom att kommunicera om dem. Vår analys resulterade i beskrivningen av den första mekanismen.

Det taktila urvalets mekanism, TUM

Det taktila urvalets mekanism är processen att ur en samling kroppar i påse 2 välja en kropp endast med hjälp av känseln efter att tidigare ha känt på den enda kroppen i påse 1.

Vi fann att det fanns tre typer av denna mekanism, beroende på vilken grad av förståelse av kroppen som eleven hade.

TUM1

Den aktuella kroppen är helt och hållet ny för eleven som inte har någon erfarenhet av att förmedla taktila bilder till korttidsminnet. Detta innebär i allmänhet att eleven inte har någon erfarenhet av att kommunicera om sådana taktila perceptioner. När en sådan elev genomför uppgift 1 upplever den kroppen som en helhet utan att lägga märke till några av de kännetecken som kroppen har. Vidare vet eleven inte vilka kroppar som finns i påse 2 och därmed inte vilka kännetecken han/hon ska fokusera på. När eleven ska välja en av kropparna i påse 2 försöker han/hon komma ihåg vilka allmänna kännetecken den kropp han/hon känt på hade och som stämmer överens med någon av kropparna i påsen. Om detta inte lyckas försöker eleven erinra sig något utmärkande kännetecken hos den ursprungliga kroppen. När denna procedur upprepas blir elevens perception av denna kropp alltmer precis och fokuserad.

Vi kommenterade tidigare de svårigheter vissa elever hade när de löste uppgift 1, och nedan följer vår analys av en sådan elevs lösning av uppgiften. En tjeckisk pojke skulle hitta den stympade pyramiden i påse 2, men hans första val var prisma med kvadratisk bas. Han var osäker på sitt val, och när han tog ut den ur påsen frågade han "Är det rätt?" Så kände han på kroppen i påse 1 igen och insåg då att hans första val var felaktigt. Trots detta gjorde han även vid det andra försöket ett felaktigt val genom att välja kuben. Under sitt tredje försök var pojken mycket koncentrerad och lyckades då välja rätt.

Vi förklarar hans misstag genom att tillämpa *TUM1*. När han kände på den enda kroppen i påse 1 lagrades bara en allmän perception i det spatiala korttidsminnet. När han försökte finna samma kropp i påse 2 fann han inga allmänna kännetecken som kunde hjälpa honom att välja rätt kropp. Han försökte erinra sig något utmärkande karaktärsdrag hos kroppen, och han fann då ett som kan karaktäriseras som "fyrkantighet". Denna tolkning stöds på två sätt. För det första fanns det bara tre kroppar som skulle kunna karaktäriseras som fyrkantiga. Pojken valde dessa, en efter en. För det andra, när han löste de andra uppgifterna uttryckte han att en kropps dominerande kännetecken enligt honom var dess "fyrkantighet". Vid sitt andra val styrdes han av perceptionen av fyra räta vinklar. Detta karaktärsdrag uppfattade han när han på nytt kände efter i påse 1. När han stoppade in handen i påse 2 igen var den första kropp han träffade på med detta karaktärsdrag just kuben, som han då valde utan att jämföra med några andra former. När han tog ut kuben ur påsen gav hans visuella perception honom snabbt information om kubens mått. Han lyckades med uppgiften i sitt tredje försök.

TUM2

Den upplevda kroppen är ny för eleven som har en viss erfarenhet av att överföra taktila perceptioner till korttidsminnet. Detta innebär att eleven har viss erfarenhet av att kommunicera om sina taktila perceptioner. Eleven försöker hitta så många utmärkande karaktärsdrag hos kroppen som möjligt och försöker överföra dessa till korttidsminnet. När eleven söker efter kroppen i påse 1 bland kropparna i påse 2 försöker han/hon hitta en som överensstämmer, för varje form i tur och ordning, med de kännetecken de har lagrat i korttidsminnet.

Nedan ges ett exempel på hur en 9-årig brittisk flicka utvecklar sin förståelse från TUM1 till TUM2 under sitt arbete med uppgiften. U representerar undersökningsledaren och E eleven.

U1.4: *Varför tror du att du har hittat den?*

E1.4: *För att den känns som den första.*

U1.5: *Så vad tycker du är speciellt med den?*

E1.5: *Den var liten. Den hade lika många sidor.*

U1.6: *Hur många?*

E1.6: (En kort paus medan hon kontrollerar kroppen i påse 2) *Sex.*

Lägg märke till att så snart undersökningsledaren frågade henne om hon lagt märke till något speciellt med kroppen erinrade hon sig två kännetecken korrekt från korttidsminnet. Båda orden som hon använder, ”känns” och ”liten”, antyder att flickan till en början uppfattade kroppen som en helhet. Den andra delen av E1.5 var förvånande eftersom den visar att hon inte kände att dessa ord var en tillräckligt precis beskrivning av kroppen för henne. Hon försöker ge en analytisk beskrivning av kroppen. Denna övergång från en uppfattning av kroppen som en helhet till att ha en mer analytisk uppfattning kräver en avsevärd mängd intellektuell energi. Vi tror att detta är skälet till att hon använde felaktig terminologi, sidor i stället för sidoytor, vilket var ovanligt för henne (Pegg & Baker, 1999). E1.5 visar också ett ovanligt sofistikerat matematiskt tänkande för en nioårig flicka.

TUM3

Eleven uppfattar kroppen som bekant och har på ett korrekt sätt lagrat den i sitt spatiala långtidsminne.

På denna nivå använder eleven en god bild som han/hon lagrat i minnet för att hitta den aktuella kroppen i påse 2.

Den taktila klassifikationens mekanism, TKM

I uppgift 3, där eleverna ska dela upp kropparna i två grupper genom att känna på dem, förvånades vi av antalet lösningar som presenterades och dessutom av hur elevernas matematiska beteende skilde sig åt. Till att börja med ägnade vi särskild uppmärksamhet åt vilka kännetecken hos de olika kropparna som

dominerade hos eleverna när de undersökte dem taktilt (uppgift 3) resp visuellt (uppgift 4). Vi fann att "rundhet" och "spetsighet" dominerade när kropparna uppfattades taktilt, och "kantighet" dominerade för de kroppar som uppfattades visuellt. Vi inser att antalet elever i vårt material inte tillåter oss att generellt dra denna slutsats, men vi uppfattade att detta var signifikant. Dessa observationer i kombination med fortsatt analys hjälpte oss att beskriva den andra mekanismen.

Den taktila klassifikationens mekanism är den process genom vilken elever delar upp en grupp kroppar med känselns hjälp så att åtminstone en av grupperna innehåller kroppar som alla har något gemensamt kännetecken.

I allmänhet är det möjligt att klassificera en sådan undergruppering på ett av två sätt:

Komplementär klassifikation – från den givna uppsättningen kroppar karakteriseras de utvalda kropparna av egenskapen A. Återstoden av uppsättningen karakteriseras av icke-A. Till exempel kan de utvalda kropparna vara "spetsiga", de övriga inte.

Egenskapsklassifikation – varje grupp ur den givna uppsättningen är klart definierad av en speciell egenskap. Till exempel kan kropparna i den ena gruppen vara "runda" medan kropparna i den andra är "kantiga".

I inlärningsprocessen börjar vi ofta med komplementär klassifikation och det är först senare som vi tillämpar egenskapsklassifikation. Detta gör det möjligt för eleverna att gradvis förstå vissa begrepp ur en större struktur. Ett exempel är klassifikationen av språkets ord i substantiv, verb, adjektiv osv. Om läraren introducerade alla dessa lingvistiska klassifikationer samtidigt skulle det för de flesta elever vara mycket svårt att förstå en så omfattande struktur.

En del elever delade kropparna i två grupper utan att vi lyckades identifiera vilken sorts klassifikation de använt sig av. En pojke som arbetade med uppgift 3 delade upp de fjorton kropparna i en grupp som bestod av den firsidiga pyramiden, den femsidiga icke-konvexa pyramiden, konen, den stympade konen, cylindern, sfären och det tresidiga prismet. Återstående kroppar utgjorde den andra gruppen. När han tog ut de båda grupperna av kroppar ur påsen och kunde uppfatta dem visuellt ville han omedelbart placera det tresidiga prismet i den andra gruppen. Vid ett första påseende var det oklart vilken sorts klassifikation han använt sig av. När vi frågade svarade han "De här är spetsiga och de här är som kvadrater eller romber" Det skulle kunna tolkas som att han använde egenskapsklassificering, men vidare analys fick oss att tvivla på denna tolkning. Den första gruppen utvalda kroppar innehöll inte endast "spetsiga" kroppar utan även "rundade" sådana. En djupare analys av elevernas tillvägagångssätt och deras muntliga svar gjorde det möjligt att identifiera tre olika typer av den taktila klassifikationens mekanism.

TKM1

Eleven noterar mentalt den första taktila perceptionen, t ex ”spetsig”, som associeras med vissa geometriska företeelser, t ex pyramiden eller konen, som han/hon kan erinra sig från långtidsminnet. Denna företeelse blir kriteriet för klassifikation. Klassifikationsprocessen börjar med taktil perception och fullföljs genom att man erinrar sig vissa geometriska begrepp från långtidsminnet.

Ett exempel på elevsvar som illustrerar denna mekanism kommer från ett protokoll med den ovan nämnda brittiska eleven E. Efter att hon känt på kropparna utspann sig följande diskussion:

U2.4 *OK! Vad är speciellt med den grupp som du har valt ut?*

E2.3 *En grupp har... de har alla åtminstone en sidoyta som är firsidig i två dimensioner ... Så har jag sorterat dem.*

I detta skede var undersökningsledaren inte säker på om eleven använde uttrycket ”åtminstone en” av en tillfällighet, så han frågade:

U2.5 *Så alla former i den gruppen har en yta som är firsidig?*

E2.4 *ÅTMINSTONE EN!* svarade eleven med eftertryck.

TKM2

Beslutet om urvalskriterier görs innan någon taktil perception ägt rum och grundar sig på elevens kunskaper om kropparna och hämtas direkt från det spatiala långtidsminnet.

En flicka bestämde till exempel att hon skulle placera alla ”kvadrater” i en grupp. När hon kände på pyramiden med kvadratisk bas uppstod en konfliktsituation då hon insåg att en yta var kvadratisk men inte de andra. Klassifikationskriterierna fick då modifieras för att stämma med den nya situationen.

TKM3

Eleverna ställer upp kriterier (t ex ”spetsighet”) på grundval av sina inledande taktila upplevelser av kropparna. Efter att ha gjort det första urvalet känner de efter på andra kroppar som delvis uppfyller det första kriteriet (t ex kan den stympade konen uppfattas som att den är på väg mot en spets, dvs att den är delvis ”spetsig”) och denna kropp läggs till den ursprungliga gruppen. En annan kropp som inte uppfyller det ursprungliga kriteriet men har ett viktigt kännetecken gemensamt när eleven känner på den (”rundhet”) leder till att det ursprungliga kriteriet ersätts av ett nytt uppenbarligen starkare kriterium som också baseras på taktil observation.

TKM3 förklarar varför, i ovanstående lösning av uppgift 3, den firsidiga pyramiden, den femsidiga icke-konvexa pyramiden, konen, den stympade konen, cylindern, sfären och det tresidiga prisma kunde placeras i samma grupp. Det tresidiga prisma uppfattades som ”spetsigt” då det gav en vass taktil upplevelse,

men den visuella perceptionen tillförde annan information, och därför ville hon flytta det till den andra gruppen.

I *TKM2* kan en förändring av kriterium göras. I *TKM3* sker alltid en förändring beroende på det initiala kriteriets låga stabilitet. Detta måste därför omvandlas till ett annat då båda de kännetecknen som kriteriet baseras på finns hos en eller flera av kropparna samtidigt.

Taktil manipulation

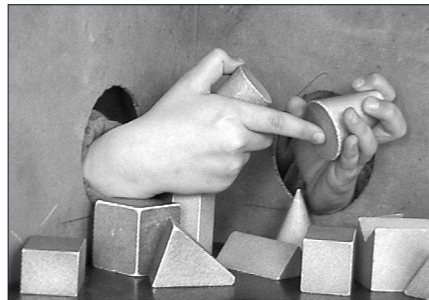
I det arbete vi genomförde under 2003 kunde vi se hur eleverna hanterade formerna medan de gjorde taktila erfarenheter av kropparna. Detta visade sig vara intressant. Elevernas hanterande var tydligt kopplat till deras grad av kommunikation om kropparna. Vi fann senare att elevernas hanterande kunde delas upp i tre olika handlingsmönster, som speglade van Hieles (1996) och Peggs (1997) tre första nivåer som återges nedan så att läsaren kan se hur dessa nivåer motsvarar våra typer av handlingar:

TM1

Eleven höll kroppen i båda händerna för att med hjälp av känslan få en helhetsuppfattning av kroppen. Kroppen roterades i händerna utan försök att fokusera på någon särskild egenskap.

TM2

Eleven höll kroppen i en hand och undersökte dess egenskaper med andra handens pekfinger (se figur 1). Denna taktila perception av egenskaper gjordes slumpmässigt, dvs eleven kunde vidröra en kant och sedan gå vidare till en yta i stället för att bestämma hur många kanter kroppen hade.



Figur 1

TM3

Eleven höll kroppen i ena handen och undersökte systematiskt med ett av andra handens fingrar vilka egenskaper kroppen hade. I dessa fall kontrollerade eleverna kroppens alla kanter, ibland mer än en gång för att försäkra sig om att de räknat rätt, därefter ytorna, hörnen osv.

Van Hiele (1986) publicerade en teori i vilken han klassificerade fem nivåer av förståelse av tredimensionella geometriska kroppar. Den andra nivån delades senare av Pegg (1997) upp i två undernivåer. Vi anger här de tre nivåer som gäller elever i grundskolans tidigare årskurser.

Nivå 1: Kroppen ses som en helhet och vanligen som en specifik form.
Kroppens egenskaper/kännetecken spelar ingen roll för igenkännandet av formen.

Nivå 2A: Kroppen identifieras genom ett enda kännetecken snarare än genom hela formen.

Nivå 2B: Kroppen känns igen på flera av dess egenskaper eller kännetecken vilka ses som oberoende av varandra.

Nivå 3: Kroppens egenskaper övervägs logiskt och relationerna mellan dem känns igen.

Exempel

Vi kommer nu att ge några exempel på elevers pararbete med uppgifterna 5 och 6, med bilder av hur de hanterade kropparna. Kopplingen mellan van Hieles nivåer och våra typer av taktil manipulation kommer att identifieras.

Det som följer nedan är utdrag från samtal mellan två 10-åriga brittiska elever som genomförde uppgifterna år 2003. Utdraget visar skillnader mellan elevernas kommunikativa förmågor liksom mellan deras förståelse av kropparna. Skillnaderna återspeglades i deras sätt att hantera kropparna.

A3.1: *Den har fem ytor, har nio kanter, har inga välvda ytor, har triangulära och rektangulära ytor. Vill du veta något mer?*

C3.1: *Är den stor?*

A3.2: *Nej, den är ganska liten.*

C3.2: *Har den någon spets?*

A3.3: *Du menar om den har den några hörn? Men det har ju de flesta former. Den har sex spetsar, de är hörn. Den har två triangulära ytor och tre rektangulära ytor. Nio kanter, fem ytor.*

Elev A:s hantering av kroppen (nedan i figur 2) är av typen TM3. Hon gav en analytisk beskrivning av den kropp hon hade valt och kände på. När hon hade valt det triangulära prismet räknade hon först ytorna, därefter kanterna, och sedan hörnen. Hon återgick sedan till ytorna, och denna gång kände hon på deras konturer för att bestämma de tvådimensionella formerna. Hon höll kvar kroppen i handen under hela uppgiften och kände hela tiden efter om det fanns något ytterligare kännetecken hon kunde nämna för sin kamrat för att hjälpa henne att känna igen kroppen. Elev A hade känt igen kroppen utan problem, kontrollerat sin taktila perception av dess kännetecken mot sitt långtidsminne, och



Figur 2

hon hade tillräckliga kommunikativa färdigheter och vokabulär för att uttrycka dessa egenskaper på ett otvetydigt sätt för sin kamrat (A3.1).

Dessutom visade hon att hon hade förmåga att genom kommunikation skapa sig en bild av sin kamrats kunskapsstruktur (Jirotková & Littler, 2003b). Det var därför hon nämnde en egenskap som kroppen inte hade – en välvd yta. Efter tidigare kommunikation med elev C var hon medveten om att "rundhet" var en kropps dominerande egenskap för elev C i hennes taktila perception (till vänster i figur 2).

Elev C:s hantering av kropparna var av typ *TM1*. Hon både handskades med och tänkte på kropparna som helheter vilket framgår av hennes första svar. I sitt andra yttrande har hon valt en mycket distinkt egenskap, "spetsighet", vilket är ett bra exempel på nivå 1 av *TKM*, den taktila klassifikationens mekanism. Elev C fann denna egenskap efter att hon länge, mer än en gång, känt på kropparna. Upprepningen innebar ingen kontroll, utan visade i stället hennes avsaknad av strategi i arbetet. Hon lade inte de kroppar hon redan hade inspekterat åt sidan, utan lade tillbaka dem på måfå så att hon ofta på nytt tog upp en kropp som hon redan hade valt bort.

När eleverna bytte roller i uppgift 6 och elev C med känseln valde ut en kropp inleddes deras diskussion på följande sätt:

C4.1: *Har tre ytor. En cirkel på varje sida, saken i mitten är rund.*

A4.1: *En välvd yta?*

C4.2: *Om du har en bit papper och rullar ihop den blir den som ett teleskop. Förstår du nu?*

A4.2: *Jag har två som jag tror att det kan vara, men jag är inte säker (se figur 3)*

C4.3: *Den är likadan i båda ändar.*



Figur 3

Den kropp som elev C försökte beskriva var en cylinder, men uppenbarligen hade hon inte den matematiska vokabulären för en välvd yta. Hon lade stor möda på valet av kropp och kände noga på alla former. Slutligen valde hon en kropp som hon tänkte att hon lätt skulle kunna beskriva. Hon hade känt igen formen och hade troligen formen lagrad som en helhet i sitt spatiala långtidsminne. Hon fastnade dock i sin egen fälla då hon inte hade matematisk vokabulär för en tillräcklig beskrivning av kroppen.

Om vi analyserar de båda elevernas arbete med hjälp av van Hieles teori finner vi att elev A helt klart befinner sig på van Hieles nivå 3 när det gäller förståelse för kroppar. Elev C började på van Hieles nivå ett, men avancerade till nivå 2 A under arbetets gång. Detta överensstämmer med de typer av taktil manipulation eleverna uppvisade.

Slutsatser

Från början var avsikten att uppgifterna skulle användas för att diagnostisera och bedöma elevers nivå då det gäller förståelse av tredimensionella kroppar. Det är fortfarande möjligt. Vi har emellertid dessutom funnit att de har stort värde som undervisningsverktyg för att:

- utveckla elevernas förståelse för geometriska kroppar,
- utveckla elevernas kommunikativa färdigheter så att de kan göra precisa och otvetydiga uttalanden om kroppar och ställa tydliga och precisa frågor.

Användningen av dessa icke-standardiserade matematiska uppgifter gav en tydligare bild av elevernas sätt att tänka än utvärderingar som baserar sig på traditionella former av algoritmiska test (Jirotková & Littler, 2002a,b).

Våra uppgifter krävde att eleverna skulle kunna beskriva sina taktila perceptioner. Detta gav en mycket tydlig indikation på deras kommunikativa färdigheter och nivån på deras vokabulär. Vår analys visade att denna nödvändiga kommunikation hjälpte eleverna att i sitt medvetande koppla samman isolerade kunskapsfragment, som de fått från tidigare erfarenheter, med sin nuvarande erfarenhet så att de fick en mer generaliserad bild av ett visst begrepp (Hejny, 2000; 2003).

Sambandet mellan den typ av taktil hantering eleven använde och deras kommunikationsnivå kring de kroppar de undersökte gjorde det möjligt att både identifiera elevernas svagheter och innebörden av de ord som de använde. Att kunna observera elevernas hantering av kropparna gav även insikter i de strategier de använde för att lösa uppgifterna.

Vi är övertygade om att lärare kan lära sig mycket om sina elevers kognitiva och sociala förmågor genom att noga analysera deras svar. Det kan även bidra till att utveckla lärares känslighet för elevernas reaktioner samt användas för diagnos och för den framtida utvecklingen av deras arbete.

Referenser

- Hejný, M. (2000). Creating mathematical structure. I J. Novotna (Red), *Proceedings of CERME 2*. Prague: Charles University.
- Hejný, M. (2003). Understanding and structure. I A. Mariotti (Red), *Proceedings of CERME3*. Bellaria, Italy.
- Jirotková, D. (2001). *Investigating geometrical understanding*. Doktorsavhandling. Prague: Charles University.
- Jirotková, D. & Littler, G. H. (2002a). Investigations of cognitive structures from tactile perceptions of geometrical solids. I A. Cockburn (Red), *Proceedings of PME26*, (Vol 3, s 25–32). Norwich, UK: University of East Anglia.
- Jirotková, D. & Littler, G.H. (2002b). Geometri är mer än mönster. *Nämna*, 29(4), 16–24.
- Jirotková, D. & Littler, G.H. (2003a). Mer om geometri och mönster. *Nämna*, 30(1), 24–27.
- Jirotková, D. & Littler, G.H. (2003b). Insight into pupils' structures of mathematical thinking through oral communication. I A. Marriotti (Red), *Proceedings of CERME3*. Bellaria, Italy.
- Pegg, J. (1997). Broadening the descriptors of van Hiele's level 2 and 3. I F. Biddulph & K. Carr (Red), *The proceedings of the 20th Mathematical Education Research Group of Australia Conference*. Hamilton, NZ: University of Waikato.
- Pegg, J. & Baker, P. (1999). An exploration of the interface between van Heile's levels 1 and 2: initial findings. I O. Zaslavsky (Red), *Proceedings of PME23*, (vol 4 s 25–32). Haifa University.
- Sfard, A. (2002). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical thinking. I A. Cockburn (Red), *Proceedings of PME26*. Norwich, UK: University of East Anglia.
- Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education*. New York: Academic Press.

