Eva Pettersson

Elever med särskilda matematiska förmågor

Får nyfikna och vetgiriga barn det stöd och den stimulans som de har rätt att förvänta sig då de börjar skolan? Barn och ungdomar som har exceptionell fallenhet för matematik är sinsemellan olika men de har ett gemensamt: intresse för matematik och att få ägna sig åt matematiska aktiviteter.

Det övergripande syftet med min avhandling var att beskriva och belysa studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor. Dessa förmågor definierades i studien som ett komplex av olika förmågor som alla kan vara mer eller mindre uttalade hos en individ. Forskningsfrågorna jag ställde upp var:

– Vad karaktäriserar elever med särskilda matematiska förmågor?

– Vilket bemötande i skolan får elever vilka visar intresse och fallenhet för matematik?

– Vad innebär skolans bemötande för eleverna och för deras möjligheter att utveckla sina särskilda matematiska förmågor?

Min undersökning baserades på tio fallstudier av elever i åldrarna 6–19 år. Sex av dessa studier var longitudinella (tre till sex år). För att validera resultaten av fallstudierna genomfördes två enkätstudier, en där lärare från förskola till årskurs 9 fick svara på frågor om sin egen matematikundervisning och sin personliga erfarenhet av att identifiera och stödja begåvade elever. Den andra riktades till matematikutvecklare som fick svara på frågor om de i deras kommun eller lokalt på skolan har någon handlingsplan för att bemöta och ta hand om elever med särskilda förmågor i matematik.

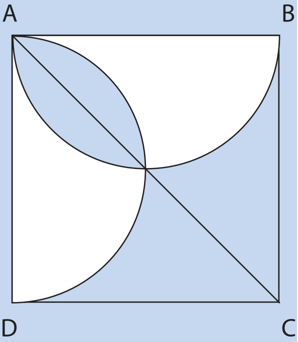
Karaktärsdrag hos elever med särskilda förmågor

Resultatet av studien visar att elevernas personlighet varierar liksom sätten att uttrycka matematiska förmågor. Det framträder dock några gemensamma drag hos eleverna. Nyfikenheten är den egenskap som är mest framträdande vilket framgår såväl av föräldrarnas berättelser om sina barn som i mina intervjuer och i de observationer som gjordes av eleverna. Viljan att förstå driver och motiverar eleverna att fortsätta fråga och vara nyfikna, i många fall trots att de känner sig motarbetade. Här finns även elever som visar lättja vilket kan vara en följd av att de fått alltför få utmaningar under sina tidigare studier.

Denna artikel bygger på doktorsavhandlingen ***Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor*** som utgör en delstudie i projektet ***Pedagogik för elever med intresse och fallenhet för matematik***. Avhandlingen finns att läsa i sin helhet på Nämnaren på nätet.

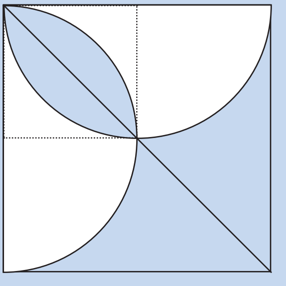
Möt Johan, 14 år, en av eleverna i fallstudien, när han löser matematiska problem:

I figuren har en kvadrat ABCD och två halvcirklar med diametern AB och AD ritats upp. Om längden av AB är 2 cm, hur stor är den skuggade arean?

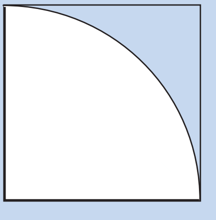


Han förklarade problemet på ett mycket konkret sätt och berättade sedan att man kunde lösa problemet på två olika sätt.

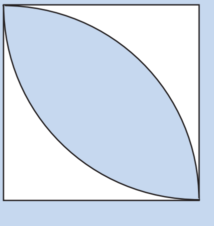
Alternativ 1:
Man tar de två små skuggade områdena längst upp till vänster i figuren och fäller ner och fyller ut tomrummen i halvcirklarna vilket gör att de skuggade områdena tillsammans bildar halva kvadraten vilken därmed är två kvadratcentimeter.
Han berättade att det var så han själv hade löst uppgiften först, genom att helt enkelt se detta i figuren. Men han nöjde sig inte med en lösning utan förklarade även att man med hjälp av att räkna ut de olika områdenas areor kunde lösa problemet.



Alternativ 2:
Först räknar man hela kvadratens area som är fyra kvadratcentimeter samt cirkelhalvornas areor som är π/2 var. Sedan delar man in kvadraten i fyra små kvadrater som vardera har arean en kvadratcentimeter och inuti den övre vänstra kvadraten [se figuren] *finns en cirkelsektor som har arean π/4. Om vi drar bort cirkelsektorn från kvadraten får vi detta område* [pekar i figuren]. *Då kan man räkna ut arean av det skuggade området* [pekar i figuren] *överst i vänstra kvadraten.*



Vi ger här nedan lite hjälp att tolka Johans resonemang. Om vi plockar ut den övre vänstra kvadraten i figuren ovan och förstorar den enligt figuren till höger ser vi Johans cirkelsektor vitmarkerad med arean $\pi/4$. När Johan säger *Om vi drar bort cirkelsektorn från kvadraten får vi detta område* så pekar han på det område som är blått i figuren här intill. Detta område har arean $1 - \pi/4$ cm^2. När Johan sedan säger *Då kan man räkna ut arean av det skuggade området överst i vänstra kvadrate*n så avser han det område som är blått i figuren nedan. Det går nu att räkna ut denna area enligt $1 - 2(1 - \pi/4)$ cm^2 $= \pi/2 - 1$ cm^2 men detta gör inte Johan. Det framgår inte om Johan räknar ut den totala arean av alla de blåa områdena. Möjligen är han mer intresserad av strategin och det logiska resonemanget, då han redan angett ett svar i det första lösningsalternativet. Då han känner areorna av de skuggade områdena i varje delkvadrat, skulle det vara tänkbart att utnyttja detta och få den totala arean genom beräkningen $(\pi/2 - 1) + 2(1 - \pi/4) + 1 = 2$ cm^2. I problemet visar Johan förmåga att se strukturen i ett matematiskt material, i detta fall en geometrisk figur.



Han visar även förmåga till flexibilitet då han kan förklara två olika lösningsstrategier för att komma fram till svaret. Han använder i det första lösningsalternativet sin förmåga att plocka ut relevant information ur ett matematiskt material, i detta fall i figuren, och snabbt bearbeta denna för att finna det, som han säger, klart enklaste lösningsförfarandet. Tidigare har Johan visat sekventiellt logiskt resonerande men här visar han även förmågan att använda sig av symboler och formler. Han gör det genom att använda metoden att genom areaberäkningar av cirklar och cirkelsektorer få fram ytterligare en lösningsstrategi.

Redan tidigt i barnets utveckling upptäcks några av de förmågor och egenskaper som kännetecknar utpräglad matematisk förmåga. Främst är det ivern att behärska kunskapsområdet och ett matematiskt sinnelag, det vill säga generella matematiska förmågor, som framträder. Även här finns variation. Att vissa elever inte utmärker sig förrän senare i livet kan ha sin grund i att undervisningen inte uppmuntrat dem att uttrycka och utveckla sina matematiska förmågor. De gör vad som krävs av dem och klarar detta på ett utmärkt sätt, men om ingen ytterligare stimulering ges sker ingen utveckling, även om individen har fallenhet för ämnet. Några av eleverna är lugna, behärskade och framstår som betydligt äldre än de är, medan andra är frågvisa, pådrivande och ibland något stökiga. Ett lugnt och behärskat beteende kan vara ett resultat av elevens vilja att framstå som ”normal”. Eleven tvingas ibland göra ett val mellan att visa sina förmågor, och då möjligen framstå som udda, eller hålla tillbaka sitt intresse och sin fallenhet. Personlighetsdrag tycks slå igenom i hur eleverna uttrycker sina förmågor. Några är kortfattade och föredrar muntliga resonemang medan andra både skriver sina förklaringar och berättar om sina tankegångar på ett informativt sätt.

Flertalet klarar svåra beräkningar men de gör det på olika sätt. Vissa använder algoritmer och traditionella metoder medan andra använder egna metoder, ofta föredrar de att göra beräkningarna i huvudet. Undersökningen visar att samtliga elever uttrycker ett flertal av de matematiska förmågor så som de definierats i studien. Utmärkande är elevernas förmåga att *formalisera* ett matematiskt material, vilket innebär att de både ser och tolkar den formella strukturen i en problemformulering och att de har förmåga att fånga helheten utan att bortse från delarna. Andra förmågor som är framträdande i studien handlar om *att operera med siffror och symboler, flexibilitet i tänkandet* och *att generalisera*. Gemensamt för eleverna i min studie är också deras *minnesförmåga*, i första hand deras förmåga att minnas strukturer och strategier vid problemlösning men också ren faktakunskap.

Några av eleverna, framförallt de yngre, fascinerade och förvånade mig vid varje tillfälle vi träffades: deras energi och nyfikenhet, deras logiska resonemang, förmågan att dra slutsatser, se mönster och finna egna lösningsstrategier. Eleverna utvecklades också under studiens gång, en utveckling som hade sin grund i att de fått positiv uppmärksamhet för sin fallenhet och fått stimulans i form av utmanande problem och frågeställningar där svaren inte varit självklara för dem.

Vilka normer styr?

Klassrumsnormer påverkar samspelet mellan lärare och elev(er), sociala normer såväl som sociomatematiska, det vill säga normer som är specifika för ämnet matematik. Lärarens interaktion med eleverna är viktig för hur eleven tolkar sin kunskap och sina förmågor. I denna interaktion skapas, modifieras och etableras sociomatematiska normer som sedan utgör grund för klassrummets matematiska praktik.

I de klassrumsobservationer jag gjort har de sociala normerna i stor utsträckning präglat undervisningen: eleverna bör räcka upp handen och svara när de får frågan, läraren är den som fördelar ordet någorlunda jämnt bland deltagarna och alla elever bör förstå det innehåll som presenteras. Lärarens korta positiva respons på rätt svar präglar en klassrumspraktik som avsevärt skiljer sig från en praktik där normen är att eleverna bör få argumentera för olika lösningar på ett problem. Vid ett fåtal tillfällen har interaktionen handlat om de matematiska lösningarnas karaktär som annorlunda, effektiva eller acceptabla. Normer som skapas och etableras i klassrummet, styr elevernas attityder till ämnet och deras egen normbildning. Ibland kan emellertid konflikter uppstå mellan sociala normer och sociomatematiska. Att individer förväntas passa in i mängden är en norm som har visat sig missgynna begåvade elever.

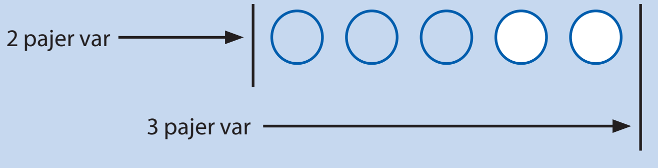
Möjlighet till extra stöd

Mina resultat visade att skolorna i hälften av fallen gav någon form av extra stöd till elever med särskilda förmågor i matematik. Stödet varierade både vad gällde utformning och omfattning och förändrades också under studiens gång. I jämförelse med ett flertal andra länder, där statligt stöd till identifierade elever är obligatoriskt (exempelvis www.nace.co.uk) finns det inga självklara rättigheter att kräva stöd för elever med särskilda förmågor i matematik i svenska skolan. Det verkar inte heller finnas dokumenterade svenska handlingsplaner som anger hur skolan bör bemöta dessa elever. Resultatet av enkätstudien visar att det stöd som erbjuds eleverna till största delen är utformat som ”accelerationsaktiviteter”. En vanlig åtgärd för elever som visar särskild fallenhet för matematik är att snabba

Mormor sa till barnbarnen: ”Om jag bakar 2 pajer till er var, så får jag deg över som räcker till ytterligare 3 pajer. Men jag kan inte baka 3 pajer till er var, för då räcker inte degen till de 2 sista pajerna.” Hur många barnbarn hade mormor?

Johan: *Ja, det blir ju fem.*
Eva: *Kan du förklara.*
Johan: *Nej, det vet jag inte. Man ser ju att skillnaden är en paj och så är den andra skillnaden fem pajer. Då måste det ju vara fem barn.*

Det Johan försöker förklara i denna uppgift kan liknas vid någon form av balansräkning. Han har aldrig sysslat med ekvationer även om han i intervjuer har berättat att han är intresserad av att få lära sig att räkna med obekanta. En möjlig tolkning av Johans resonemang är att han utgår ifrån en degklump, där det i ena fallet (2 pajer) blir deg över till 3 pajer och i det andra fallet (3 pajer) saknas deg till 2 pajer. Hans uttryck *Man ser ju att skillnaden är en paj* gestaltas då av de två möjliga fallen, 2 respektive 3 pajer var, och uttrycket *så är den andra skillnaden fem pajer* blir summan av den deg som är över respektive saknas.



Om vi istället väljer att lösa detta problem med hjälp av en obekant, x, som står för antalet barnbarn och som efterfrågas i problemet, så har vi en möjlighet att följa Johans tankesätt eller tolka hans resonemang på följande sätt: Hans uttryck *Man ser ju att skillnaden är en paj* motsvarar då högersidan i led (2), se nedan, och hans uttryck *så är den andra skillnaden fem pajer* motsvarar vänstersidan i samma ekvationsled. Ekvationslösning av problemet kan se ut på följande sätt:

(1) $2x + 3 = 3x - 2$
(2) $3 + 2 = 3x - 2x$
(3) $5 = x$

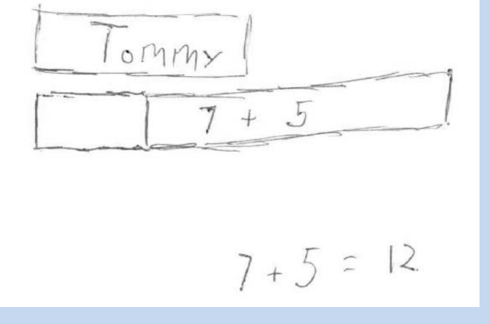
upp undervisningstakten. Det innebär oftast att eleverna får räkna vidare i sina läroböcker, men det ger dem inte de utmaningar de behöver eftersom en stor del av tiden går åt till färdighetsträning. Då lärare i stor utsträckning ser elevers snabbhet och deras förmåga till självständigt arbete som tecken på matematisk förmåga är detta resultat inte förvånande. Att accelerera utbildningen genom att låta eleven hoppa över en årskurs visar sig inte heller vara en lösning som självklart fungerar. Acceleration har enligt den forskning som finns på området bara positiva effekter om den kombineras med förändringar i kursinnehållet.

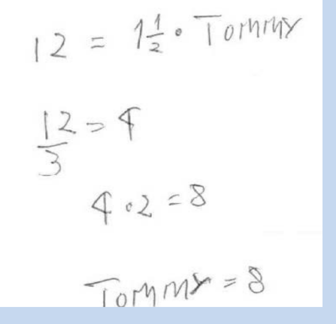
Vad kan vi göra?

Grupperingar kan skapas inom en klass eller inom en årskurs där elever från olika klasser samlas. Fördelen med en lösning som omfattar grupper av elever är att det både är ekonomiskt fördelaktigt och även ger barnen tillfälle att träffa andra elever som delar deras intresse för matematik. Att gruppera elever efter intresse och fallenhet är också en flexibel lösning som ger utrymme för

Jonny och Tommy spelar pingis. Om Jonny hade haft 5 poäng mer än han har, skulle han ha dubbelt så många poäng som Tommy. Om Jonny hade haft 7 poäng mindre än han har skulle han ha hälften så många poäng som Tommy. Hur många poäng har Jonny?

Johans lösning:





Johan löser problemet genom att observera att skillnaden i antal poäng i de två fallen är 7 + 5 = 12 och att skillnaden motsvarar en och en halv del av Tommys poäng. Detta sätt att resonera har stora likheter med det resonemang Johan använde i uppgiften med mormors pajer, där han också syntetiserar den givna informationen. Han integrerar den givna informationen i en för honom inre bild medan han i ovanstående uppgift integrerar informationen dels i en bild dels i form av en ekvation. Han behöver inte, i något av fallen, ekvationslösning för att komma fram till ett svar. Strategierna Johan använder i dessa två uppgifter kan tolkas som ett uttryck för det som i Krutetskiis struktur kallas matematiskt minne. En alternativ lösning till stöd åt läsaren: Vi kan teckna två ekvationer som motsvarar händelserna i problemet. Vi betecknar Tommys poäng med T och Jonnys poäng med J och får då följande ekvationer:

(1) $2 \cdot T = J + 5$
(2) $0,5 \cdot T = J - 7$

Om vi löser detta system genom att subtrahera ekvation (2) från ekvation (1)
får vi att: $1,5 \cdot T = 12$ Denna ekvation kan jämföras med Johans uttryck $12 = 1\frac{1}{2} \cdot$ Tommy.

omgrupperingar och nyrekryteringar efter behov. Exemplen från studien visar att enskild undervisning under handledning av en speciallärare eller mentor också kan ha stor betydelse för barnens utveckling och välbefinnande. I skolan behövs en genomtänkt strategi där alla barn i behov av särskilt stöd tas upp i skolans utvecklingsplan, även barn med särskilda förmågor.

Mycket kan göras i den vardagliga undervisningen genom att skapa tillfällen för elever och lärare att tillsammans föra spännande matematiska samtal som utvecklar elevernas begreppsförståelse och känsla för ämnet. Om sådana samtal skrev redan Anna Kruse för över hundra år sedan i boken *Åskådningsmatematik* (Kruse, 2010). Hon besvarar en fråga som många lärare ställer: ”Blir inte de barn som har svårt för ämnet nedstämda när de ser hur lätt andra barn rör sig i matematikens värld?” ”Därpå skulle jag vilja svara:” säger Anna Kruse, ”De skulle bli modfällda, om de inte kunde följa oss lärarinnor i våra förklaringar, men de blir inte modfällda av kamraternas flykt. De blir eggade till att följa, och i de flesta fall följder de dem också. Här är inget annat än vad vi ser i barnets lek: ju djärvare desto mer eggande är exemplet” (s 54).

Studien har visat att ett undersökande arbetssätt, där eleverna får lösa utmanande problem i samspel med lärare och kamrater i en kreativ klassrumsmiljö, stimulerar dem till matematisk utveckling, särskilt de elever som har utpräglad fallenhet för ämnet. Ett sådant arbetssätt förutsätter, förutom planeringstid, lärare som har matematisk kompetens, mod och engagemang för elevernas lärande. ”Vilket syfte har jag med min undervisning?” ”Räknar jag med att alla elever löser problemen på unika och kreativa sätt eller ber jag dem memorera de metoder som jag själv använder?” ”Är jag trygg i att uppmuntra eleverna att ställa matematiska frågor även i situationer där jag själv inte har ett omedelbart svar?”

LITTERATUR

Barger, R. (2001) Begåvade elever behöver också hjälp. *Nämnaren* 2001:3.

Blomhøj, M. (1994). Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare. *Nämnaren* 1994:4.

Engström, A. (2005). Matematikbegåvningarnas revansch? *Nämnaren* 2005:2

Kruse, A. (2010). *Åskådningsmatematik: ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikens område.* (3. uppl.) Stockholm: Norstedt.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago, Ill: University of Chicago Press.

Mattsson, L. & Vaderlind, P. Elever med särskilda förmågor. *Nämnaren* 2008:3.

Palbom, A. & Wigsell, S. (2008) Utmaningar för understimulerade. *Nämnaren* 2008:2.

Pettersson, E. (2011). *Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor.* Diss. Linnéuniversitetet, Växjö.

Wistedt, I. (2005). En förändrad syn på matematikbegåvningar? *Nämnaren* 2005:3.

Wistedt, I., Lagergren, R. m fl. (2006). Pedagogik för elever med intresse och fallenhet för matematik. *Nämnaren* 2006:3.