Nämnaren
på nätet

Ett mentorprojekt för gymnasieelever i Luleå

– *exempel på matematik för att inspirera*

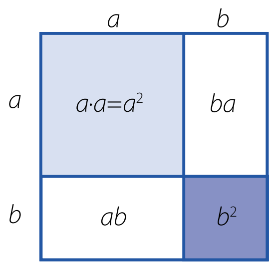
Barbro Grevholm
Josefin Lundqvist
Lars-Erik Persson
Peter Wall

I den artikel som finns publicerad i Nämnaren 2012:2 beskrivs hur studenter från Luleå tekniska universitet, i egenskap av mentorer, träffar och stöttar gymnasieelever som är intresserade av matematik. Artikeln tar bland annat upp ett påbörjat exempel som kan utgöra matematikinnehåll på en mentorträff. Här beskrivs hela exemplet samt ytterligare ett par idéer.

Uttryck som a^2 och ab kan vara tämligen abstrakta för många elever men genom att illustrera dem med ytor av en kvadrat med sidan a respektive en rektangel med sidorna a och b blir de mer konkreta. Räkneregeln $ab = ba$ blir då självklar och genom att rita en lämplig figur blir kvadreringsregeln mer intressant och lätt att förstå.

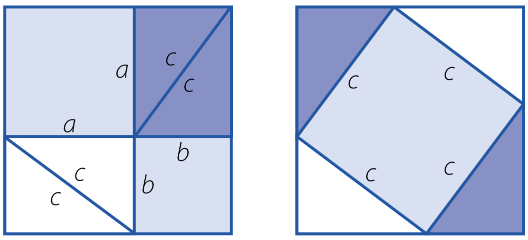
Men hur kan man då med detta synsätt förstå Pythagoras sats som jämförelse av tre kvadratytor? Ja, här ges ett utmärkt tillfälle att diskutera, resonera och öva modellering och kreativitet genom att producera de aktuella kvadratytorna utifrån den ursprungliga triangeln. När eleverna sedan ”klipper bort” (subtraherar) de fyra lika stora trianglarna från vänstra och högra delen av figuren ser och förstår de att summan av a^2 och b^2 är lika med c^2, d v s Pythagoras sats.

Räkneregler



$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

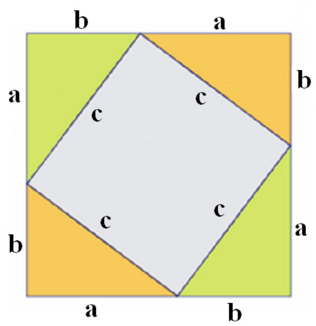
Pythagoras sats



I många läroböcker finns det bevis som illustreras med högra delen av figuren ovan men hela resonemanget ovan ger större intresse och förståelse för hur man kommit fram till detta bevis.

Som inledning till Pythagoras sats kan man använda den så kallade ”snickartriangeln”, d v s en rätvinklig triangel med sidorna 3, 4 och 5. Det är ett enkelt sätt, som alla snickare känner till, att kontrollera att en vinkel är rät. Man kan då fråga sig om det finns fler snickartrianglar utom de triviala t ex den med sidorna 6, 8 och 10? Många känner nog till att även en triangel med sidorna 5, 12 och 13 är rätvinklig. Här kan eleverna tillsammans med läraren öva sin kreativitet för att inse att det går att göra en parameterframställning och upptäcka att det i själva verket finns oändligt många snickartrianglar. De verktyg som behövs är bara kvadreringsreglerna och potenslagar. En utmärkt övning där elever och lärare även får tillfälle att diskutera begreppen bevis och matematiska resonemang.

Ett vackert bevis



Pythagoras sats:
$a^2+b^2=c^2$

Ytan av stora kvadraten är
$(a+b)^2=c^2+4(ab)/2$
$a^2+2ab+b^2=c^2+2ab$
$a^2+b^2=c^2$

Finns det fler snickartrianglar?

I själva verket finns det oändligt många snickartrianglar t ex alla tal av typen

$$a = m^2 - n^2$$
$$b = 2mn \qquad m > n$$
$$c = m^2 + n^2 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

är snickartrianglar eftersom

$$a^2 + b^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2$$
$$= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 = c^2$$

Exempel:

$m = 2, n = 1$ ger $a = 3, b = 4, c = 5$
$m = 3, n = 2$ ger $a = 5, b = 12, c = 13$
$m = 4, n = 3$ ger $a = 7, b = 24, c = 25$
$m = 10, n = 1$ ger $a = 99, b = 20, c = 101$

Trots att det finns oändligt många snickartrianglar finns det inga heltal som uppfyller motsvarande ekvation för $n = 3$, $n = 4$, och inte heller för något annat heltal. Därmed har man även anknutit resonemanget till modern matematisk forskning, nämligen den berömda *Fermats gåta* som gäckade de bästa matematikerna under mer än 350 år. Denna fantastiska historia finns populärvetenskapligt beskriven i Simon Sings berömda bok med samma namn. Han har skrivit två andra böcker med titlarna *Big Bang* och *Stora Kodboken*, vilket visar hur vetenskapligt stort han ansåg att detta var.

Det finns många andra lätt tillgängliga exempel som väcker gymnasieelevernas intresse, t ex följande:

Födelsedagsproblemet

Födelsedagsproblemet är en utmärkt inledning till sannolikhetsläran och då speciellt för att belysa multiplikationsprincipen och lådprincipen, båda grundläggande matematiska idéer med stor betydelse. Det överraskande svaret kan vara intressant att testa i de egna klasserna.

Födelsedagsproblemet

- Hur stor är sannolikheten för att minst två personer i en grupp med n personer har födelsedag samma dag?

Födelsedagsproblemet

n	sannolikhet
23	50%
30	70%
41	90%
47	95%
57	99%

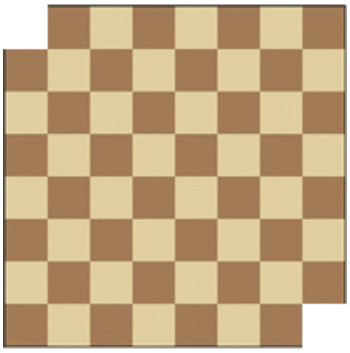
För sannolikhet 1 krävs minst 367 personer!

Födelsedagsproblemet finns även beskrivet i *Uppslagsboken, 7G Hur ofta väljer vi lika?* samt som en aktivitet i Strävorna, se *1D9D Hur ofta väljer vi lika?* http://ncm.gu.se/1D

Schackbrädesproblemet

Schackbrädesproblemet nedan går att variera på många olika sätt. Ett annat kreativt schackbrädesproblem: Går det att placera ut åtta damer på ett schackbräde så att ingen kan slå den andra?

Schackbrädesproblemet



Schackbräde utan två hörn

Schackbrädet här intill har 64–2 = 62 rutor

Kan vi täcka alla rutor med 31 dominobrickor?

Svar: Nej!
(Ledning: 32 svarta 30 vita rutor, en dominobricka täcker en svart och en vit…)

Schackfyran

Detta schackbrädesproblem kan också vara en inkörsport för att intressera fjärdeklassare att delta i den så kallade *Schackfyran* där elever tävlar klassvis. Detta intressanta arrangemang har redan växt sig riktigt stort. Mer än 20 000 elever runt om i landet deltar och 2 500 elever är med i finalen. Läs mer på www.schackfyran.se.

LITTERATUR

de Abreu, G., Bishop, A. J. & Presmeg, N. C. (2002). *Transitions between contexts of mathematical practices*. Dordrecht, the Netherlands: Kluver Academic Publishers.

Blomhøj, M. & Jensen, T. H. (2007). SOS-projektet – didaktisk modellering af et sammenhængsproblem. MONA, 3. København: Københavns Universitet. Tillgänglig 2012-03-08 på www.ind.ku.dk/mona

Brandell, G. Hemmi, K. & Thunberg, H. (2008). The widening gap – A Swedish perspective, *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 38–56.

Brandell, L. (2009). *Matematikkunskaperna 2009 hos nybörjarna på civilingenjörsprogrammen vid KTH*. Stockholm: KTH.

Bylund, P. & Boo, P-A. (2003). Studenters förkunskaper, *Nämnaren* 2003:3, s 46–51.

Carleson, L., Håstad, J. & Laptev, A. (2003). Studenterna allt sämre i matematik, *Dagens Nyheter*, 2003-02-15.

Brändström, A. & Klisinska, A. (2005). *Utvärdering av matematikstudenternas nybörjarkunskaper. Rapport.* Luleå tekniska universitet.

Dunkels, A. (1996). *Contributions to mathematical knowledge and its acquisition*. Doktorsavhandling. Luleå tekniska universitet.

Filipsson, L. & Thunberg, H. (2008). Aims versus expectations – a Swedish study of problems related to the transition from secondary to tertiary education in mathematics, Konferensbidrag till Discussion Group 8 vid ICME 11, Mexiko.

Grevholm, B. (1992). *Naturvetenskap och teknik i Sverige. Kan forskningsinformation stimulera intresset?* Stockholm: Verket för högskoleservice.

Grevholm, B. (1993). Det gäller Sveriges framtid. *Nämnaren* 1993:2, s 32–34.

Grevholm, B., Lundqvist, J., Persson, L. E., & Wall, P. (2011). *Matematikmentorprojektet vid Luleå tekniska universitet*. Rapport. Luleå tekniska universitet.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 237-254.

Guzmán, M., m fl. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. *Documenta Mathematica*, 901(3), 747–762.

Högskoleverket (2005). *Nybörjarstudenter och matematik – matematikundervisningen under första året på tekniska och naturvetenskapliga utbildningar*, Högskoleverkets Rapportserie 2005:36 R. Stockholm: Högskoleverket.

Högskoleverket (2009). *Förkunskaper och krav i högre utbildning*, Högskoleverket Rapport 2009:16 R. Stockholm: Högskoleverket.

Kajander, A. & Lovric, M. (2005). Transition from secondary to tertiary mathematics: McMaster University experience. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 36(2–3), 149–160.

SKL (2011). *Synligt lärande*. Stockholm: SKL. Tillgänglig 2012-03-08 på brs.skl.se/skpubl/index.jsp?http://brs.skl.se/skpubl/start.jsp