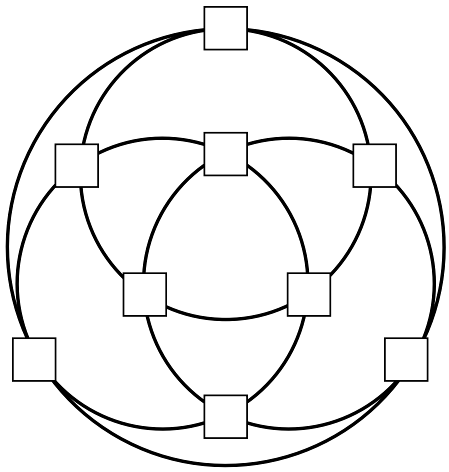
Nämnaren
på nätet

En utflykt i rymden

av Leo Rubinstein

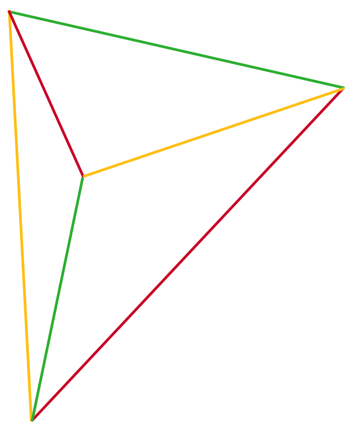
I Nämnaren nr 2, 2012 presenterar Göran Emanuelsson ett antal problem med tal som tema. Ett av dessa problem är:

> 3916 **Cirkelsumma:** Placera talen 2, 3, 4, …, 9, 10 i rutorna så att summan på var och en av de fyra cirklarna är lika stor.



Det ges en möjlig lösning (se nästa sida) följd av frågan: ”Finns det andra möjligheter?”Naturligt infinner sig då frågorna ”Hur många olika lösningar finns?” och ”Hur ser lösningsmängden ut?”

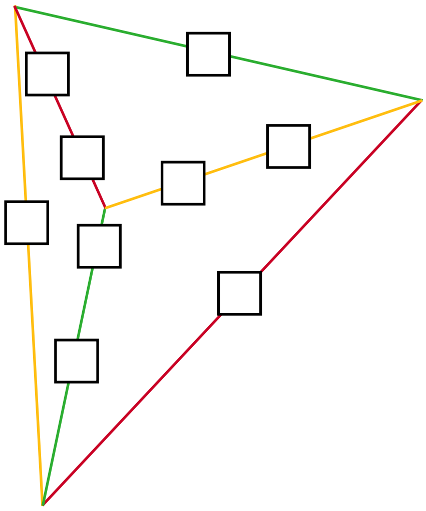
Man ser lätt att från en lösning kan man få en ny genom att rotera figuren 120°. Ska vi räkna det som en ny lösning? Det gör vi! Dessutom har figuren spegelsymmetrier. Om vi har en lösning så kan vi göra den till 6 lösningar genom speglingar och rotationer. Tittar man närmare på figuren så upptäcker man att varje par av de mindre cirklarna har två skärningspunkter med en ruta i varje skärningspunkt. Om man låter talen i ett sådant par av skärningspunkter byta plats med varandra så förändras inte summan på någon cirkel, alltså vi har igen ett sätt att från en lösning gå till en annan. Det finns tre sådana par vilket ger oss $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ alternativ. Genom att kombinera speglingar rotationer och skiftningar av skärningspunkter kan vi från en lösning få $8 \cdot 6 = 48$ lösningar. Nu räcker det med sådana simpla knep! Har problemet flera, riktigt olika lösningar? Ett sätt att få svaret på den frågan är genom att göra ett litet besök i rymdgeometrin. Kanske en omväg, men en rolig och lärorik sådan.



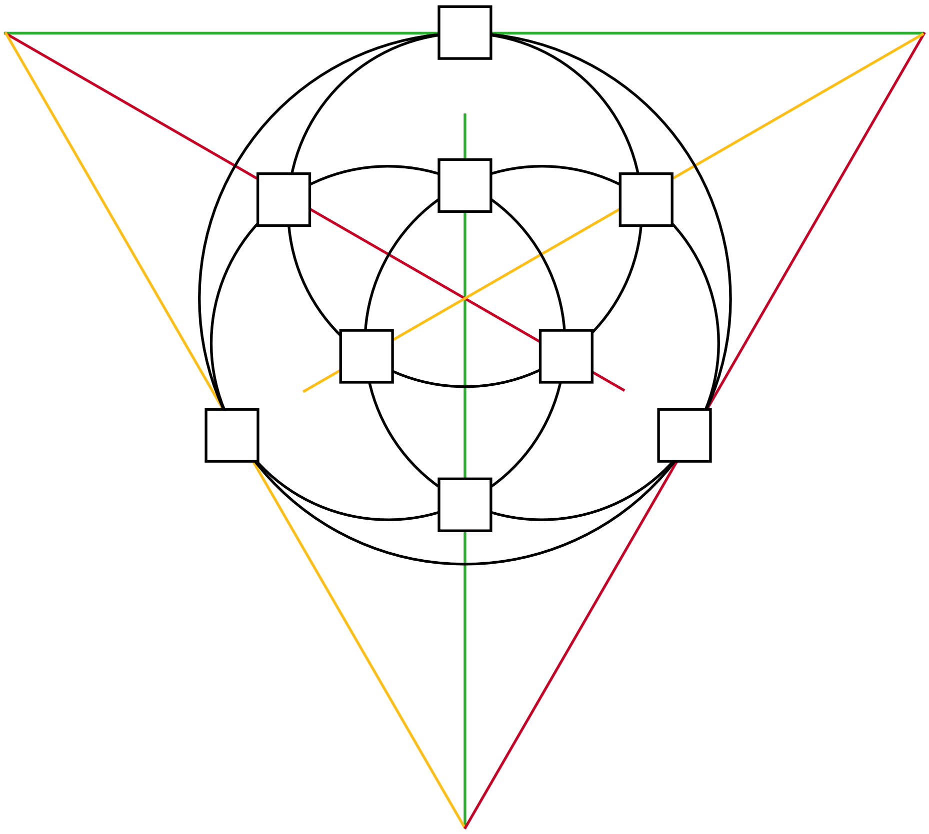
Bevisa att i en tetraeder gäller ekvivalensen: Alla de fyra (triangulära) sidoytorna har lika stora omkretsar om och endast om varje kant är lika lång som dess motstående kant (dvs den kant som inte möter den i något hörn).

Det är lätt att bevisa att ekvivalensen gäller i en riktning. För att korrekt bevisa att det gäller i båda riktningar behövs betänketid åtminstone till nästa lektion.

När man har hittat ett bevis så ser man att det egentligen var mycket enkelt. Man använder inte några geometriska sanningar, om man tilldelar varje kant ett tal som man kallar ”kantens längd” så gäller ekvivalensen oavsett om sådana kantlängder är möjliga i en tetraeder eller om triangelolikheterna är uppfyllda. Talen får t o m vara negativa eller komplexa. Även om vi tilldelar några av kanterna flera tal och vi kallar dess summor för kanternas längder, gäller ekvivalensen fortfarande.



Placera talen 2, 3, 4, ..., 9, 10 i rutorna. ”Omkretser” av de fyra trianglarna är lika stora om och endast om för varje kant gäller att summan av talen (eller det ända talet) på den är lika med summan av talen på den andra kanten av samma färg.

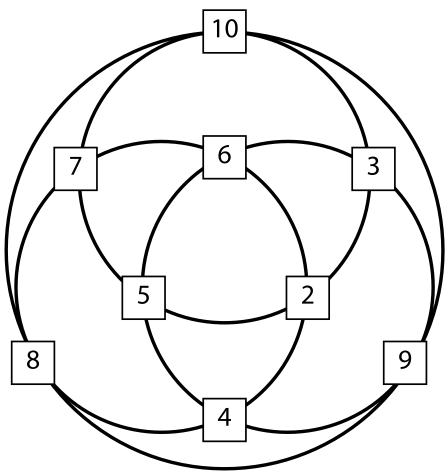


Nu ser vi att tetraederns rutor motsvaras av cirkelfigurens rutor. Summan på var och en av de fyra cirklarna är lika stor om och endast om varje tal på den stora cirkelns rand är summan av de övriga två tal på samma diameter av den stora cirkeln.

Hur många sätt finns att placera talen 2 till 10 så att högra sidan av ekvivalensen blir uppfylld?

Lika många som sätt att skriva tre uttryck på formen $a+b=c$ med användning av alla talen 2 till 10. Bortser man från att tre uttryck kan skrivas i 6 ordningar och att termer i varje uttryck får byta plats med varandra så återstår bara två väsentligen olika sätt: $2+6=8$, $3+7=10$, $4+5=9$ eller $2+7=9$, $3+5=8$, $4+6=10$. När man tänker på vilken summa har talen 2 till 10 och vilken summa kan likheternas högra sidor ha, så inser man snabbt att det inte finns några fler möjligheter. Totala antalet lösningar är $2 \cdot 48 = 96$.

Sist, undrar man, varför används talen 2 till 10 och inte t ex 1 till 9? Förklaringen är att 2 till 10 är den enda mängd av 9 på varandra följande naturliga tal för vilka det finns någon lösning.



En lösning på problemet.