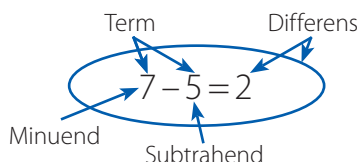


Mer om beräkningar i subtraktion och addition

I artikeln *Subtraktionsberäkningar* i Nämnaren nr 1, 2012 beskrivs fem övergripande kategorier av beräkningsstrategier för subtraktion. I denna kompletterande artikel ges en utförligare beskrivning av en del kända problem med några av strategierna för subtraktionsberäkningar samt en motsvarande beskrivning av beräkningsstrategier för addition.

Såväl *lodräta algoritmer* som *talsortsvisa beräkningar* har visat sig vara ineffektiva i den bemärkelsen att de leder till en stor andel felaktiga svar för subtraktioner som kräver växling. Problemen med dessa båda beräkningsstrategier liknar varandra. Eleverna tar "störst först", det vill säga konsekvent subtraheras det större talet med det mindre oavsett vilket av talen som är en del av minuend respektive subtrahend.



En annan förklaring till varför det blir fel i talsortsvisa beräkningar är att eleverna använder två varianter av beräkningar och blandar ihop vilken av de båda varianterna som ska användas i vilket sammanhang.

Den ena varianten är avsedd för subtraktion utan tiotalsovergång där delresultaten *adderas*:

$$66 - 24; 60 - 20 = 40; 6 - 4 = 2; \mathbf{40 + 2 = 42}$$

och den andra då det är tiotalsovergångar i uppgiften, där delresultaten *subtraheras*:

$$64 - 26; 60 - 20 = 40; 4 - 6 = -2; \mathbf{40 - 2 = 38}$$

Ytterligare en förklaring till att det blir fel är att elever tänker att eftersom man ska addera delresultaten i talsortsvis addition, ska man subtrahera delresultaten i talsortsvis subtraktion.

Även i subtraktionsuppgifter utan växling kan fel uppstå om delresultaten subtraheras men även korrekta svar kan vara resultat av felaktiga metoder. Den sista feltypen har Arne Engström beskrivit i *Det ser rätt ut men är ändå fel* i *Nämnnaren* nr 4, 2000, ncm.gu.se/pdf/namnaren/2124_00_4.pdf

Ett vanligt fel i *blandade beräkningar* är att elever glömmar bort att lägga till minuendens ental innan subtrahendens ental dras ifrån:

$$64 - 26; 60 - 20 = 40; -6 \rightarrow 34$$

Eller subtraherar de båda termernas ental:

$$64 - 26; 60 - 20 = 40; -6 \rightarrow 34; -4 \rightarrow 30$$

Eftersom problemen med lodräta algoritmer och talsortsvisa strategier varit så stora har man undersökt hur undervisning med olika didaktiska modeller kan stödja *stegvisa beräkningsstrategier*. Stegvisa strategier ligger tankemässigt nära de strategier som de flesta barn spontant utvecklar inom addition och subtraktion med ensiffriga tal. Försök har bland annat gjorts med hundrarutor och tomma tallinjer för att hjälpa eleverna att utnyttja vårt talsystems tiobas och komma ifrån räknandet med ett steg i taget, men även för att stötta arbetsminnet. Undervisningsförsök som har gjorts bland annat i Nederländerna och USA, visar att hundrarutorna inte är lika effektiva som tomma tallinjer, men även med tomma tallinjer som didaktisk modell är subtraktionsberäkningar fortfarande en utmaning för många elever.

Kompensationsberäkningar kan också vara en källa till felaktiga svar samtidigt som en del elever utnyttjar dem mästerligt. Då endast den ena termen förändras innan beräkningen genomförs finns det fyra möjligheter, som visas med $64 - 26$, där ena termen rundas av till ett jämnt tiotal.

1. *Subtrahenden avrundas uppåt.* Då ska kompensationen adderas.
 $26 + 4 = 30$; $64 - 30 = 34$; $34 + 4 = 38$
Först adderas 4 till subtrahenden, sedan adderas 4 för att kompensera förändringen.
2. *Subtrahenden avrundas nedåt.* Då ska kompensationen subtraheras.
 $26 - 6 = 20$; $64 - 20 = 44$; $44 - 6 = 38$
Först subtraheras 6 från subtrahenden, sedan subtraheras 6 för att kompensera förändringen.
3. *Minuenden avrundas nedåt.* Då ska kompensationen adderas.
 $64 - 4 = 60$; $60 - 26 = 34$; $34 + 4 = 38$
Först subtraheras 4 från minuenden, sedan adderas 4 för att kompensera förändringen.
4. *Minuenden avrundas uppåt.* Då ska kompensationen subtraheras.
 $64 + 6 = 70$; $70 - 26 = 44$; $44 - 6 = 38$
Först adderas 6 till minuenden, sedan subtraheras 6 för att kompensera förändringen.

Då båda termerna förändras är det inte ovanligt att en del elever ökar den ena termen lika mycket som de minskar den andra, som man gör i addition, till exempel så här:

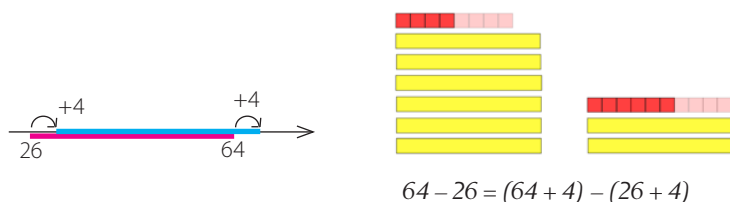
$$64 - 26; \text{minska } 64 \text{ med } 4 \text{ och öka } 26 \text{ med } 4; 60 - 30 = 30$$

Härledda talfakta är en så pass lokal och personlig strategi att man inte funnit generella styrkor eller svårigheter med den. Däremot finns det studier som visar att elever med god taluppfattning oftare använder härledda talfakta än andra elever.

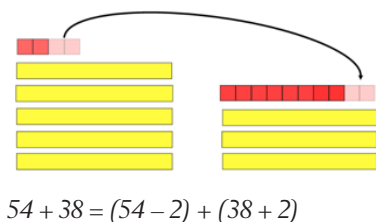
Konsekvenser för undervisningen

Sammanfattningsvis kan man konstatera att flertalet av subtraktionstrategierna leder till felaktiga svar för många elever. Som jag ser det är den springande punkten inte vilken eller vilka strategier som är lämpligast att använda, utan hur undervisningen kan utformas för att ge eleverna möjlighet att förstå hur subtraktion och addition fungerar.

Det finns många olika didaktiska modeller som kan stärka förståelsen för hur och varför de olika beräkningsstrategierna fungerar. I huvudartikeln ges exempel på hur idén bakom kompensationsberäkningar där båda termerna förändras kan synliggöras med plockmateriel, så att orsaken till varför man ökar den ena termen lika mycket som man minskar den andra i addition medan man förändrar båda termerna lika mycket i subtraktion tydliggörs. För att dessutom tydliggöra hur man kan utnyttja vårt positionssystem räcker inte ostrukturerad plockmateriel, då behövs någon form av struktur som förtydligar varför det är effektivt att avrunda till jämna tiotal, hundratal osv. Här kan man exempelvis utnyttja byggbara kuber som kan sättas samman i tiostavar eller använda tiobasmateriel för att förtydliga *varför* det kan underlätta uträkningen att först göra om ena termen till ett helt tiotal, hundratal osv. Den tomma tallinjen är användbar för att förtydliga stegvisa beräkningar samt kompensationsberäkningar med lika förändring av båda termerna i subtraktion, däremot fungerar den sämre för att förtydliga kompensationsberäkningar i addition där båda termerna förändras.



Exempel 64 – 26 med kompensationsberäkning; 26 → 30 och 64 → 68 med tom tallinje samt tiobasmateriel.



Exempel 54 + 38 som kompensationsberäkning där båda termerna förändras med tiobasmateriel.

Additionsberäkningar

Det finns beräkningsstrategier för addition med flersiffriga tal som direkt motsvarar de för subtraktion som beskrivs i *Subtraktionsberäkningar*. De fem huvudkategorierna är desamma och här beskriver jag de vanligast förekommande varianterna på samma sätt som subtraktionsberäkningarna beskrivs i artikeln. Jag använder $54 + 38 = 92$ som exempel för att visa hur beräkningarna (oftast) genomförs.

Lodräta algoritmer

Den första huvudkategorin är lodräta algoritmer. Liksom för subtraktion finns det flera olika varianter och jag beskriver inte dem närmare i denna artikel.

Talsortsvisa beräkningar

Den andra huvudkategorin är talsortsvisa beräkningar där båda talen delas upp i tiotal och ental. Additionerna utförs med tiotalen för sig och entalen för sig. Till sist summeras de båda delresultaten. Exempel: $54 + 38$

$$54 + 38 = (50 + 30) + (4 + 8) = 80 + 12 = 92$$

Till skillnad från subtraktion så förekommer inga varianter för uppgifter som kräver, respektive inte kräver, växling. Talsortsvisa beräkningar kännetecknas av att man behandlar talsorterna separat och är därmed mer atomistiska än stegvisa beräkningar (se nästa kategori). De kan även anses vara relativt generella då man alltid kan göra på samma sätt.

Stegvisa beräkningar

Den tredje huvudkategorin är stegvisa beräkningar. Även här finns det många olika varianter och jag visar två av de vanligaste, *standard* och *med kompensation*.

Standard: $54 + 38$

$$54 + 30 \rightarrow 84; 84 + 8 \rightarrow 92$$

Börja på första termen, 54 i det här fallet, och hoppa 30 steg framåt i talraden, till 84. Hoppa ytterligare 8 steg framåt till 92.

Med kompensation: $54 + 38$

$$54 + 40 \rightarrow 94; 94 - 2 \rightarrow 92$$

Börja på första termen och hoppa för långt framåt med jämna tiotal. Hoppa sedan bakåt i talraden lika många ental som du hoppade för långt.

Det som kännetecknar stegvisa beräkningar är att den ena termen behålls som en helhet och den andra termen delas upp i lämpliga delar med hänsyn till vårt positionssystem. Eftersom ena termen behålls som en helhet är stegvisa beräkningar *mer holistiska* än de talsortsvisa. Samtidigt *minskar generaliteten*, då valmöjligheterna är många för hur man ska hoppa framåt och bakåt och om man ska hoppa *med* jämna tiotal eller *till* jämna tiotal. En vanligt förekommande variant är en blandning av talsortsvis beräkning och stegvis beräkning som kan se ut så här: $54 + 38$

$$50 + 30 = 80; 80 + 4 = 84; 84 + 8 = 92$$

Här delas talen upp i tiotal och ental. Tiotalen beräknas först för sig. Därefter läggs entalen som hör till den första termen tillbaka och slutligen adderas de återstående entalen.

Kompensationsberäkningar

Den fjärde huvudkategorin av beräkningsstrategier är kompensationsberäkningar. Det finns två typer: antingen ändras den ena termen eller så ändras båda.

Om den *ena termen ändras* kan man ändra den till ett jämnt tiotal. Vilken man väljer spelar ingen roll även om det kan kännas mest naturligt att välja den som är närmast ett jämnt tiotal. Här visar jag en variant: $54 + 38$

$$38 \rightarrow 40; 54 + 40 = 94; 94 - 2 = 92$$

Här ändras 38 tillfälligt till 40, som är ett jämnt tiotal, innan beräkningen utförs och sedan återställs den tillfälliga ändringen. Om man har gjort en tillfällig ökning av den ena termen ska resultatet minskas med lika mycket. Har man gjort en tillfällig minskning ska resultatet ökas med motsvarande tal.

Den andra varianten av kompensationsberäkningar, där *båda termerna ändras lika mycket*, görs i syfte att den ena termen ska bli ett jämnt tiotal: $54 + 38$

$$54 \rightarrow 52; 38 \rightarrow 40; 52 + 40 = 92$$

Ändras båda termerna i en addition adderar man lika mycket till den ena termen som man subtraherar från den andra. Då behöver man inte återställa ändringen efter beräkningen eftersom den sammanlagda summan inte har ändrats.

Det som kännetecknar kompensationsberäkningar är att båda termerna behandlas som helheter, alltså är beräkningsstrategin *holistisk*. Det är också kännetecknande att man först undersöker hur de båda talen är beskaffade och utifrån detta väljer hur talen ska manipuleras före uträkningen. Det gör att denna strategi är *lokal* i motsats till *generell*.

Härledda talfakta

Den femte huvudkategorin kallar jag härledda talfakta. Ett exempel på hur någon skulle kunna tänka i fallet $54 + 38$ är:

Jag vet att 40 och 40 är 80. Då har jag 14 kvar på 54 och tagit två för mycket på 38. Alltså 80 och 12, det är 92.

Härledda talfakta är en mycket *lokal* strategi som bygger på de talfakta och relationer till tal som den som utför beräkningen har. Det är den beräkningsstrategi som är mest holistisk i förhållande till hur man ser på talen som ingår i beräkningen och kännetecknas av att man betraktar talen och ser på hur de relaterar till varandra och andra tal samt kända talfakta.

De fem additionskategorierna i sammanfattning

Här visas en sammanfattande översikt över de fem huvudkategorierna utifrån hur generella och atomistiska respektive lokala och holistiska de är.

	Huvudkategorier	Några vanliga underkategorier
Atomistisk Generell  Lokal Holistisk	Lodräta algoritmer Varje siffra behandlas som ental	Det finns många olika typer av lodräta algoritmer
	Talsortsvis beräkning Tiotal och ental behandlas separat	Standard Blandad
	Stegvisa beräkningar Ena termen behandlas som en helhet den andra delas upp, ofta talsortsvis	Standard Med kompensation
	Kompensationsberäkningar Båda termerna behandlas som helheter	Ena termen ändras Båda termerna ändras
	Härledda talfakta Båda termerna behandlas som helheter och jämförs med andra tal	

Avslutningsvis vill jag, liksom i huvudartikeln, understryka att det inte handlar om att värdera olika strategier som bättre eller sämre, utan om att se vilka olika egenskaper de olika beräkningsstrategierna har. Undervisning i addition och subtraktion handlar om mycket mer än att lära sig en eller flera beräkningsstrategier. Framförallt bör undervisning i och om räknesätten bygga upp en gedigen förståelse för hur de fungerar samtidigt som eleverna ges möjlighet att utveckla sin taluppfattning.