Nämnaren
på nätet

Fibonaccis mønsterrekke

Del 1:
Mogens Hestholm
Hop ungdomsskole,
moghest@hotmail.com

Del 2:
Christoph Kirfel
Universitetet i Bergen,
christoph.kirfel@math.uib.no

Del 1

Jeg er en 15 år gammel gutt med stor interesse for dataprogrammering (ActionScript 3). En av de første tingene jeg prøvde å lage var et program for å teste ut hva jeg kunne klare å lage med de få formlene jeg da kunne. Jeg hadde hørt om Fibonaccitallene som lager en interessant tallfølge, og ville prøve å lage et program som kunne regne ut mange tall i tallfølgen, flere enn hva en vanlig kalkulator kunne. Jeg satte i gang, og etter noen minutter hadde jeg det klart.

Jeg brukte følgende formelsammenheng:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

Tallfølgen inneholder mønster som er helt unike. Disse mønstrene var i utgangspunktet for meg kun kjent som mønstre mellom tall, men kan disse mønstrene også sees grafisk? Jeg ble ganske forundret over hva jeg fikk se:

1	1	2	3	5
8	13	21	34	55
89	144	233	377	610
987	1597	2584	4181	6765
10946	17711	28657	46368	75025
121393	196418	317811	514229	832040
1346269	2178309	3524578	5702887	9227465
14930352	24157817	39088169	63245986	102334155

Tallene danner mønster mellom seg! Det kan være rette linjer, eller svake buer, jeg er ikke helt sikker (det kommer litt an på skrifttype). Jeg aner ikke hvorfor det er slik. Det er to unntak, i det siste tallet i femte kolonne øker det med to siffer, i motsetning til ett siffer slik det ellers er, og det andre tallet i første kolonne. Kanskje det betyr at det ikke er helt rette linjer, men svake buer?

Observasjon: Alt i alt kan det se ut som om lengden på Fibonacci-tallene øker jevnt med nummeret på tallet. Omtrent hvert femte Fibonacci-tall får ett nytt siffer.

Del 2

I første del av denne artikkelen lurte Mogens Hestholm på om vekstmønsteret som han oppdaget hos Fibonaccitallene er korrekt. Omtrent hvert femte Fibonacci-tall får et nytt siffer. Kan det virkelig stemme? Formelen for Fibonaccitallene kaller vi en rekursiv formel siden beregningen av et nytt ledd i følgen bygger på foregående ledd. Det finnes flere former for formler for å beskrive følger. Tar vi eksempelvis følgen av oddetall: 1,3,5,7,9… kan denne også beskrives med en rekursiv formel der det nye leddet beregnes ved å legge 2 til det foregående.

$$T_1 = 1, T_2 = 3, T_{n+1} = T_n + 2$$

I tillegg kan tallfølgen beskrives med en eksplisitt formel: $T_n = 2n+1$. Fordelen med den eksplisitte formelen er at man kan beregne et ledd i følgen med et gitt nummer *direkte* uten å måtte beregne de foregående leddene. For eksempel er oddetall nummer 2431 lett å beregne siden $T_{2431} = 2 \cdot 2431 + 1 = 4862 + 1 = 4863$. Det hadde tatt lang tid å benytte seg av den rekursive formelen og beregne alle foregående ledd før man hadde kommet frem til T_{2431}. Vi ser altså at det kan være en enorm fordel å kunne arbeide med eksplisitte formler fremfor rekursive.

Finnes det også en eksplisitt formel for Fibonacci-tallene?

Det gjør det og denne formelen har fått navn etter Jacques Philippe Marie Binet som utviklet den i 1843. For å finne denne formelen tar vi utgangspunkt i en litt annen tallfølge som bygger på Fibonaccitallene. Vi ser på følgen av tall $F_{n+1} - aF_n$, der a er et fast tall som vi skal bestemme senere. Det viser seg nemlig at denne nye følgen blir mye enklere enn selve Fibonacci-tallfølgen når vi velger a på en lur måte.

Vi skriver:

$$F_{n+1} - aF_n = F_n + F_{n-1} - aF_n = (1-a)F_n + F_{n-1} = (1-a)(F_n - \frac{1}{a-1}F_{n-1})$$

Vi velger nå a på en lur måte, nemlig slik at $\frac{1}{a-1} = a$. I tillegg setter vi $b = 1 - a$. Da får vi:

$$F_{n+1} - aF_n = b(F_n - aF_{n-1})$$

Vi ser at venstre side av likningen og høyre side får samme "struktur" (et Finonacci-tall minus a ganger forgjengeren). På høyre siden har vi riktignok ganget med en faktor $(1-a) = b$.

Denne gjentagende strukturen gjør det mulig å bruke formelen om igjen og om igjen:

$$F_{n+1} - aF_n = b(F_n - aF_{n-1})$$

$$= b \cdot b(F_{n-1} - aF_{n-2})$$

$$= b^3(F_{n-2} - aF_{n-3})$$

$$= \ldots$$

$$= b^n(F_1 - aF_0) = b^n$$

Den nye tallfølgen vi studerer er en geometrisk følge, dvs. en følge der leddene er potenser av et fast grunntall, hos oss $b = (1-a)$. Det må kunne sies å være en "enkel" tallfølge.

Vi skal nå se på de kravene vi stilte til tallet a underveis i prosessen: $\frac{1}{a-1} = a.$

Vi finner en passende løsning ved å løse likningen

$\frac{1}{x-1} = x$ eller $x^2 - x - 1 = 0$, som gir $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Noen vil kjenne dette igjen som det gylne snitt.

Setter vi $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ så blir $b = 1 - a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

og vi ser at både a og b er løsninger av likningen $x^2 - x - 1 = 0$. Dermed kan vi på nøyaktig samme måte som oppe få:
$F_{n+1} - bF_n = a^n$ og vi har plutselig to formler for F_{n+1}, nemlig

$F_{n+1} = aF_n + b^n$ og $F_{n+1} = bF_n + a^n$. Setter vi dem lik hverandre kan vi skrive:

$$F_{n+1} = F_{n+1}$$

$$aF_n + b^n = bF_n + a^n$$

$$(a-b)F_n = a^n - b^n$$

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

eller

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

Vi har fått Binets formel for Fibonacci-tallene som er differansen mellom to geometriske følger. Dette er en eksplisitt formel fordi Fibonaccitallene nå kan beregnes utelukkende med utgangspunkt i nummeret n uten å måtte beregne tidligere ledd i følgen.

Vi tar nå en nærmere titt på potensene som inngår i Binets formel. Siden tallverdien av $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,6180339$ er mindre enn 1, vil potensene av dette tallet $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \approx (-0,6180339)^n$ danne en følge som går raskt mot null. Allerede

$$|\frac{1-\sqrt{5}}{2}|^{10} \approx 0,0081305 < \frac{1}{100}$$

og dermed er det andre leddet i Binets formel for n=10 gitt ved

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{10} \approx \frac{0,0081305}{\sqrt{5}} \approx 0,003636.$$

Vi ser at det andre leddet i Binets formel er veldig liten. På den andre siden vet vi at Fibonacci-tallene er voksende heltall, så hovedparten av et Fibonacci-tall må komme fra den første potensen $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$.

Det andre leddet er bare ansvarlig for noen siffer langt, langt bak kommaet og vi kan formulere vår observasjon litt nonchalant slik:

$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

og dermed blir Fibonacci-tallene selv så å si en geometrisk følge i alle fall når man ser på størrelsesordenen. Det manglende leddet gir oss alltid en "korreksjon" som er langt under en enhet.

Denne erkjennelsen om størrelsesordenen av Fibonacci-tallene kan nå hjelpe oss når vi skal uttale oss om deres "lengde" når vi skriver dem i vårt tallsystem.

Før vi kommer frem til hovedpoenget skal vi kort studere en meget enkel tallfølge der det blir lett å uttale seg om lengden av leddene. Vi ser på tallfølgen $H_n = 10^n$, altså tierpotensene. Følgen ser slik ut: 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, o s v. Lengden av leddene vokser med en enhet for hvert nytt ledd. Vi kan si at lengden av H_n er lik $n+1$. Der er altså en direkte forbindelse mellom lengden av tallene og eksponenten i uttykket eller rettere sagt tierlogaritmen av $H_n = 10^n$. Tierlogaritmen av et tall forteller oss først og fremst hvor mange siffer tallet har foran komma, f eks $log_{10}(5243)=3,71957986$ ... Se også i tabellen nedenfor.

Tall	Antal siffer	Tierlogaritmen
321	3	2,50650503
6577	4	3,81802784
129776	6	5,11319438

Å spørre etter lengden av Fibonacci-tallene eller antall siffer i Fibonacci-tallene er altså det samme som å etterlyse tierlogaritmen av dem. Vi ser altså på:

$$log_{10}(F_n) \approx log_{10}(\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n)$$

$$= n \cdot log_{10}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - log_{10}(\sqrt{5})$$

$= n \cdot log_{10}(1,61803399) - log_{10}(2,23606798)$

$= n \cdot 0,20898764 - 0,349485$

Dette betyr at Fibonacci-tallenes lengde vokser med ”konstant fart” med indeksen eller nummeret på Fibonacci-tallet som bekrefter observasjonen beskrevet i del 1 av artikkelen av Mogens Hestholm.

Vi ser at ”stigningstallet” er $0,20898764 \approx \frac{1}{5}$ som forteller oss at vi for omtrent hvert femte Fibonacci-tall kan forvente oss ett nytt siffer slik som tabellen i del 1 viser.

En annen forklaring som ikke tar logaritmer i bruk kan se slik ut: I følge vår omtrentlige ”approksimasjonsformel

$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ er $\frac{F_{n+5}}{F_n} \approx (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^5 \approx 11.$

Det betyr at F_{n+5} er litt større enn det tidoble (ellevedoble) av F_n og det betyr at F_{n+5} har nokså sikkert ett siffer mer enn F_n. På et enda enklere nivå kunne man argumentert slik:

$$F_{n+5} = F_{n+4} + F_{n+3} = 2F_{n+3} + F_{n+2} = 2(F_{n+2} + F_{n+1}) + F_{n+2} = 3F_{n+2} + 2F_{n+1} = 5F_{n+1} + 3F_n > 8F_n$$

På akkurat samme måte kan vi finne at $F_{n+5} = 8F_n + 5F_{n-1} < 13F_n$. Dermed ser vi veldig fort at F_{n+5} er minst åtte ganger så stor som F_n men mindre enn 13 ganger F_n og at F_{n+5} sannsynligvis har ett siffer mer enn F_n.