

Leif Bjørn Skorpen

Visualisering av intervall i musikk

Historisk og innholdsmessig er det sterke band mellom matematikk- og musikkfaget (Garland og Kahn, 1995; Haspang, 2010; Wollenberg, 2006). I tidlegare publikasjonar har eg fokusert på nokre av koplingane ein finn mellom matematikk og musikk, blant anna ved å sjå [se] på korleis [hur] intervall mellom tonar kan uttrykkast som forhold mellom tal, og ved å studere oppbygginga av ulike skalatypar. (Skorpen, 2004a, 2004b). I artikkelen «Å rekne i musikk» (Bjørlykke og Skorpen, 2009), peiker Reidun Åslid Bjørlykke og eg på samanhengen mellom musikk og matematikk innanfor LK06 sine rammer. I denne artikkelen vil eg vise korleis [hur] matematikken kan brukast til å visualisere og analysere intervall, akkordar og slektskapen mellom akkordar i musikken¹.

Innleiing

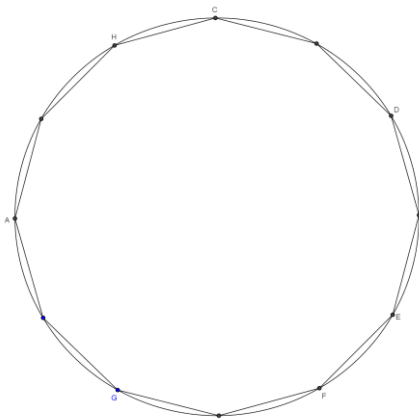
Å lytte [At lyssna] til musikk har både ei estetisk og ei analytisk side. På den estetiske sida vil det i hovudsak vere dei auditive sansane [sinnet] som vert stimulerte. Musikk er primært bygd opp av kombinasjonar av lyd og ikkje lyd. Den som lyttar til musikk vil i ulik grad kunne danne seg indre bilete [bilder] med utgangspunkt i dei musikalske opplevingane. Slike bilete vil i høgste grad vere personlege og individuelle, og vil ikkje bli nærare kommenterte i denne samanheng. Innanfor den analytiske sida av musikkopplevinga har matematikkfaget mykje å bidra med (Bjørlykke og Skorpen, 2009). I det vidare arbeidet skal vi prøve å visualisere ein liten del av musikkteorien, ved blant anna å sjå korleis ulike intervall kan representerast gjennom geometriske figurar. På den måten får vi fram ein del vakre figurar. Desse figurane kan både nytast [njutast] reint estetisk, og dei kan nyttast [användas] til enkle analysar av intervall, akkordar og samanhengar mellom akkordar. Det er altså eit ynskje [önskan] å få det estetiske og det analytiske til å møtast i ei visuell oppleving.

Å visualisere musikalske intervall ved hjelp av geometriske figurar, har lange historiske tradisjonar som går heilt tilbake til dei greske filosofane for om lag 2500 år sidan. I tidlegare tider var det også vanleg å kople saman musikkteori med astrologi og astronomi. Den greske astronomen Klaudios Ptolomaios (ca. 90 – 168) kopla saman musikalske konsonansar [harmoni/samklang] med astrologiske aspekt i geometriske figurar av liknande type som dei vi etter kvart [senare] skal sjå på (Field, 2006, s. 32). Johannes Kepler (1571 – 1630) utvikla tredimensjonale modellar av solsystemet, der også musikkteorien var inkludert. Blant anna søkte han etter harmoniar i oppbygginga av universet og innførte omgrepet «planetakkordar», der forholdet mellom omlaufsfarten til dei ulike planetane vart samanlikna med forholda mellom tonane i akkordar (Field, 2006; Haspang, 2010).

¹ Grunnlaget for denne artikkelen vart utvikla i samband med ei kursrekke om *Matematikk i musikken* som eg heldt på oppdrag frå «Nasjonalt senter for kunst og kultur i opplæringen».

Den tempererte «tolvtonesirkelen»

La oss ta utgangspunkt i den tempererte tolvtoneskalaen, som alle vanlege tempererte instrument i dag byggjer på. I denne skalaen er oktaven delt inn i tolv like store halvtonetrinn. Skalaen kan visualiserast på ulike måtar. Ein kan sjå føre seg ein serie av til saman tolv etterfølgjande kvite [vita] og svarte tangentar på eit piano eller orgel, eller tolv etterfølgjande band oppover gitarhalsen. Denne skalaen kan også visualiserast ved å bruke ein sirkel delt inn i tolv like store delar², sjå figur 1.



Figur 1: Sirkel som illustrerer dei tolv halvtonane innanfor ein oktav.

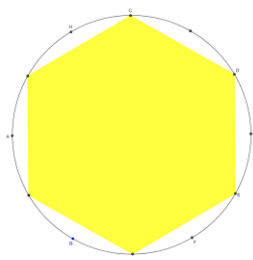
Når ein startar med ein C på toppen og les med urvisaren, finn ein i første punktet Ciss (= Dess), som ligg ein halv tone over C. Dette intervallet vert i musikkteorien omtala som «liten sekund». I neste punkt finn ein D som ligg ein halv tone over Ciss, og ein heil tone over C. Intervallet mellom C og D er ein «stor sekund». Neste punkt, Diss (= Ess), ligg tre halve tonar over C og vert kalla ein «liten ters». Ved å lese med urvisaren finn ein intervalla som er lista opp i figur 2.

Notenamn:	Intervall:
C	Prim
Ciss/Dess	Liten sekund
D	Stor sekund
Diss/Ess	Liten ters
E	Stor ters
F	Kvart
Fiss/Gess	Tritonus
G	Kvint
Giss/Ass	Liten sekst
A	Stor sekst
Aiss/B	Liten septim
H	Stor septim
c	Oktav

Figur 2: Intervall som i sum vert lik ein oktav

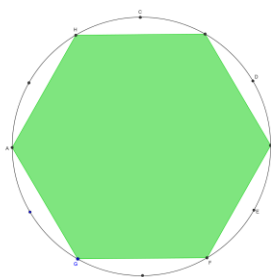
² Alle sirkelfigurane er teikna ved hjelp av «GeoGebra».

I denne figuren er intervall som i sum blir lik ein oktav kopla saman gjennom linjene til høgre i figuren. Til dømes [Till eksempel] vil summen av ein liten sekund og ein stor septim bli lik ein oktav. Denne symmetrien finn ein også igjen i tolvtonesirkelen. Ei omdreining rundt sirkelen gjev ein oktav. Eit vilkårleg punkt på sirkelen vil dele sirkelen i to delar (to sirkelsektorar). Kvar av desse to delane (sektorane) vil danne intervall som i sum utspenner heile sirkelen, og dei tilhøyrande intervalla vil dermed i sum bli lik ein oktav. Figur 3 viser denne relasjonen mellom store sekundar og små septimar. Intervallet frå C til D er ein stor sekund. Intervallet frå D til C spenner over 10 halvtonar, og er ein liten septim. Ved å trykke [her](#), får du høyre [lyssna på] desse to intervalla³. Tilsvarande er intervallet frå D til E ein stor sekund, og intervallet frå E til D er ein liten septim. Den regulære sekskanten i figur 3 illustrerer altså seks par av store sekundar og små septimar.



Figur 3: Regulær sekskant som viser koplinga mellom seks par av store sekundar og små septimar, med startpunkt på C, D, E, F, G og B.

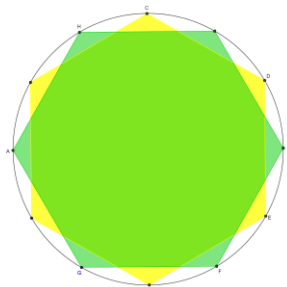
Ved å la tilsvarande intervall starte på halvtonane mellom dei tonane som danner hjørna i den regulære sekskanten i figur 3, får ein fram ein ny sekskant, sjå figur 4.



Figur 4: Regulær sekskant som viser koplinga mellom seks par av store sekundar og små septimar, med startpunkt på Ciss, Diss, F, G, A og H.

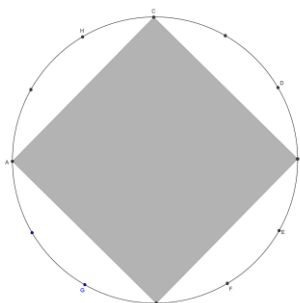
³ Alle lydfilane er laga ved hjelp av komposisjonsprogrammet «Sibelius 6, Student».

Denne regulære sekskanten illustrerer også seks ulike par av store sekundar og små septimar. Til saman vil desse to regulære sekskantane utspenne alle dei tolv para av store sekundar og små septimar innanfor oktaven⁴, sjå figur 5.



Figur 5: To regulære sekskantar som til saman gjev alle tolv para av store sekundar og små septimar innanfor oktaven.

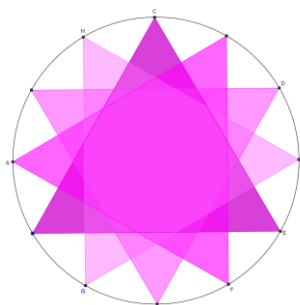
På tilsvarende måte kan ein få fram relasjonane mellom liten ters og stor sekst. I figur 6 ser ein at intervallet frå C til Diss spanner over tre halvtonar – og utgjer ein liten ters, medan intervallet frå Diss til C spanner over ni halvtonar – og utgjer ein stor sekst. Ved å trykke [her](#), kan du høyre [lyssna på] desse to intervalla. Frå Diss til Fiss er det også ein liten ters, og frå Fiss til Diss er det ein stor sekst. Tilsvarende relasjonar får ein knytt til kvart [vart och ett] av hjørna i den regulære firkanten.



Figur 6: Regulær firkant som viser fire par av små tersar og store sekstar, med startpunkt på C, Diss, Fiss og A.

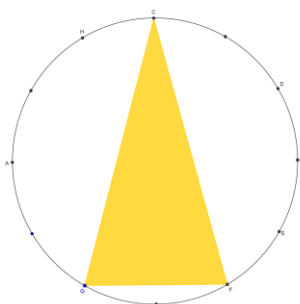
Hjørna frå tre slike regulære firkantar vil til saman dekke alle dei tolv punkta i sirkelen, sjå [se] figur 7.

⁴ Idéen til desse figurane er henta frå Ashton (2003).



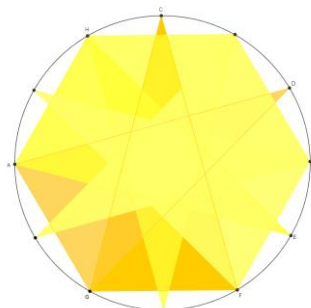
Figur 9: Fire regulære trekantar illustrerer alle dei tolv para av store tersar og små sekstar innanfor oktaven.

Frå C til F er det ein kvart, og frå F til C er det ein kvint. Du kan høyre [lyssna på] desse to intervalla ved å trykke [her](#). Frå G til C er det ein kvart og frå C til G er det ein kvint. Sidene CF og GC i den likebeina trekanten i figur 10 kan illustrere to sett med par av kvartar og kvintar med tilknytning til C.



Figur 10: Likebeina trekant som knyt saman to par av kvartar og kvintar med tilknytning til C

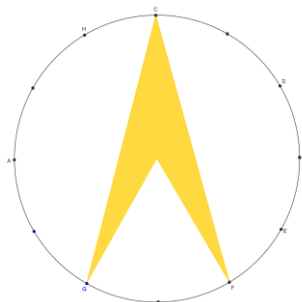
Ved å teikne inn seks slike likebeina trekantar som bind saman dei seks para av kvartar og kvintar, blir alle dei tolv halvtonane i oktaven involvert. Resultatet ser ein i figur 11:



Figur 11: Dei seks para av kvartar og kvintar innanfor oktaven.

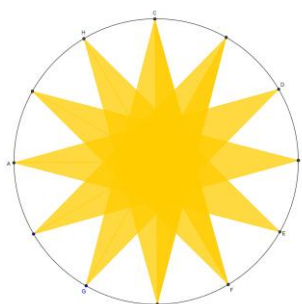
Figur 11 ser gjerne litt overlessa [överbelastad] og rotete [stökigt] ut. For å få betre fram dei vakre symmetriane i denne figuren, kan vi endre litt på den likebeina trekanten i figur 10 ved

å ta bort grunnlinja⁵ og omforme trekanten til ein firkant som inkluderer origo i sirkelen, sjå figur 12:



Figur 12: Modifisert utgåve av kvart- og kvintpara.

Viss vi no teiknar inn dei seks para av kvartar og kvintar som skal til for å inkludere kvart av dei tolv halvtoneintervalla innanfor oktaven, får vi fram den vakre stjerna i figur 13.



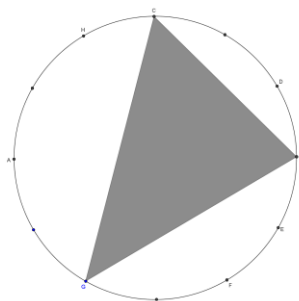
Figur 13 Viser modifisert utgåve av dei seks para av kvartar og kvintar innanfor oktaven.

Enkle akkordar

Med utgangspunkt i den same tolvtonesirkelen, kan vi også visualisere ulike akkordar, og på ein enkel og oversiktleg måte sjå slektskapen mellom ulike akkordar. Frå musikkteorien veit vi at ein durakkord er bygd opp av ein stor ters med startpunkt på grunntonen i akkorden, og deretter ein liten ters som går vidare frå sluttonen i det store tersintervallet. Dei to tersane vil til saman utspenne eit kvintintervall i høve til [i relation till / i förhållande till] grunntonen. I mollakkordane kjem [kommer] den vesle [lilla] tersen først, etterfølgt av den store tersen. La oss starte med ein c-moll akkord. Frå C til Ess er det ein liten ters, frå Ess til G er det ein stor ters og frå C til G er det ein kvint. Til saman dannar dei tre tonane C, Ess og G ein c-moll akkord, sjå figur 14. Ved å trykke [her](#), får du høyre [lyssna på] ein c-moll akkord. (Først blir

⁵ Grunnlinja i den likebeina trekanten inngår ikkje direkte i kvint-kvart-para som vert danna av dei to sidene FC og GC.

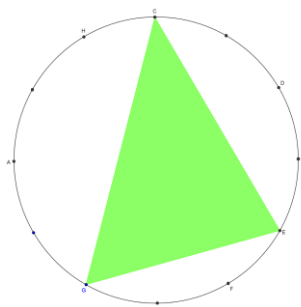
dei tre akkordtonane presenterte etter kvarandre to gonger, deretter blir akkorden spelt som arpeggio og til slutt som samla akkord.)



Figur 14: C-moll akkord.

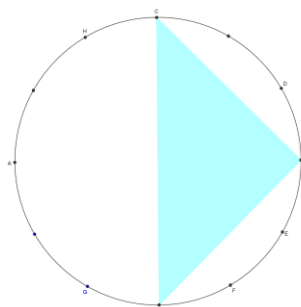
På same måte kan ein teikne inn trekantane til alle dei tolv moglege [möjlige] mollakkordane innanfor oktaven. Dei tolv trekantane vil vere kongruente. Alle mollakkordane vil høyrast like ut [låter lika] i den tempererte skalaen, berre [endast] tonehøgda varierer frå toneart til toneart. Akkordar som kling likt, bortsett frå tonehøgde, vil altså gje opphav til geometriske figurar som er kongruente og roterte i høve til kvarandre.

Viss ein startar med C og går opp ein stor ters i staden for [i stället för] ein liten ters, kjem ein til E. Frå E til G er det ein liten ters, og frå C til G er det ein kvint. Ein får då fram ein C-dur akkord, sjå figur 15. Trykker du [her](#), får du høyre [lyssna på] ein C-dur akkord. (Først blir dei tre akkordtonane presenterte etter kvarandre to gonger, deretter blir akkorden spelt som arpeggio og til slutt som samla akkord.) Samanliknar ein figurane 14 og 15, ser ein at dei to trekantane er kongruente, og at dei er spegla om linja som skjærer sirkelperiferien i midtpunktet mellom Ess og E og i midtpunktet mellom A og B. Det at trekantane til dur- og mollakkordane er spegla i høve til kvarandre representerer ein geometrisk ulikskap. Musikalsk sett finn ein den geometriske ulikskapen igjen ved at det i durakkorden er det store tersintervallet som er relatert til grunntonen, medan det i mollakkorden er det vesle tersintervallet som er relatert til grunntonen. Ulike tersintervall i høve til grunntonen fører til ulik klang mellom dur- og mollakkordar. Ved å trykke [her](#), kan du høyre [lyssna på] C-dur og c-moll akkordane presenterte etter kvarandre to gonger.



Figur 15: C-dur akkord.

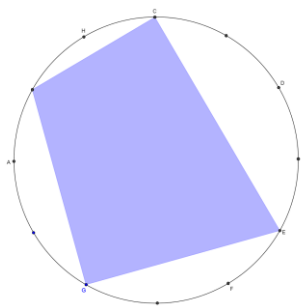
Ein dim-akkord er bygd opp av to små tersar, som til saman dannar eit «tritonusintervall» (også omtalt som forstørre kvart- eller forminska kvintintervall). Du kan høyre [lyssna på] ein c dim akkord ved å trykke [her](#). Frå figur 16 ser ein at innteikna i oktavsirkelen blir dim-akkorden ein likebeina trekant innanfor den eine halvsirkelperiferien.



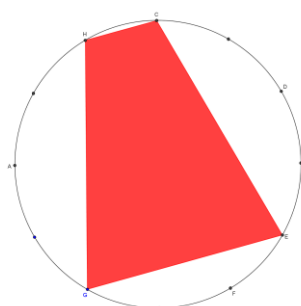
Figur 16: C-dim akkord (C°).

Septimakkordar

I ein septimakkord inngår det tre tersintervall. Ein «vanleg» dur-septim akkord er bygd opp av ein stor ters, etterfølgd av to små tersar. Til saman utspenner desse tre tersane eit lite septimintervall i høve til grunntonen. Trykker du [her](#), får du høyre [lyssna på] ein C-dur-septimakkord. Ein «stor» dur-septim akkord (maj-akkord) er bygd opp av ein stor ters, ein liten ters og til slutt ein stor ters. Til saman utspenner desse tre tersane eit stort septimintervall i høve til [i relation till / i förhållande till] grunntonen. Du kan høyre [lyssna på] C-dur-stor-septim akkorden ved å trykke [her](#). Innteikna i oktavsirkelen vert det ein firkant. I figur 17 ser ein den vanlege C-dur-septim akkorden (C^7), og i figur 18 den store C-dur-septim akkorden (C^{maj7}), teikna inn i oktavsirkelen.



Figur 17: C-dur-septim akkord (C^7).



Figur 18: C-dur-stor-septim akkord ($Cmaj^7$)

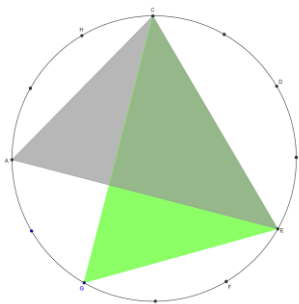
Dei store tersane i starten og slutten av den store septimakkorden, fører til at firkanten i figur 18 vert symmetrisk om ei linje som går gjennom midtpunktet mellom H og C og gjennom midtpunktet mellom F og Fiss.

Alle enkle dur- og mollakkordar er bygde opp av tre tonar, og vert av den grunn også omtalt som treklanger. Septimakkordane er bygde opp av fire tonar, og vert omtalt som firklangar. Når desse ulike akkordane vert teikna inn i oktavsirklane, skjønar vi lett at alle treklanger vert representerte av trekantar og alle firklangar vert representerte av firkantar. Innanfor kvar «familie» av ulike treklanger (dur-, moll-, og dim-akkordar) og firklangar (dei ulike septimane) vil det vere tolv ulike akkordar innanfor oktaven. Kvar av desse akkordfamiliane vil kunne representerast av tolv kongruente trekantar eller firkantar som er roterte i høve til [i relation till / i förhållande till] kvarandre innanfor oktavsirkelen.

Toneartar

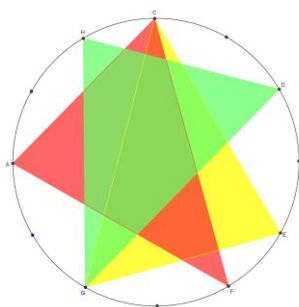
Teiknar vi inn ein durakkord og den parallelle mollakkorden, til dømes C-dur og a-moll, får vi i figur 19 fram ein figur som inneheld ein interessant symmetri. Som tidlegare nemnd er ein durakkord bygd opp av ein stor ters med startpunkt på grunntonen i akkorden etterfølgt av ein liten ters. Dei to tersane vil til saman utspenne eit kvintintervall i høve til [i relation till / i förhållande till] grunntonen. I mollakkordane kjem [kommer] den vesle tersen først, etterfølgt

av den store tersen. I C-dur akkorden startar den store tersen på C og går opp til E, og den vesle tersen går vidare frå E til G. I a-moll akkorden startar den vesle tersen på A og går opp til C, og den store tersen går vidare frå C til E. Den store tersen frå C til E er altså felles [gemensam] for begge akkordane. I figur 19 ser ein tydeleg denne tersslektskapen ved at dei to trekantane i oktavsirkelen får tersintervallet som felles side, CE. Ved å trykke [her](#), kan du høyre [lyssna på] slektskapen mellom C-dur og a-moll akkordane. (Først blir C-dur akkorden og a-moll akkorden presenterte to gonger etter kvarandre, for til slutt å klinge saman.) Den samla figuren er symmetrisk om linja gjennom D og Giss/Ass.



Figur 19: C-dur og a-moll.

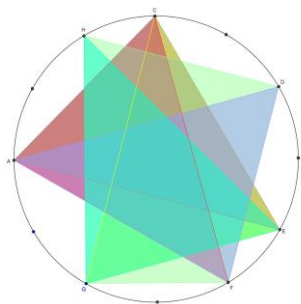
Ved å teikne dei tre hovudtreklange innfor ein toneart inn i den same oktavsirkelen, vil ein også tydeleg få fram slektskapen mellom dei ulike akkordane. I figur 20 ser ein dei tre hovudtreklange i tonearten C-dur: C (tonika), F (subdominant) og G (dominant). Vi ser at grunntonen i dominantakkorden (G) fell saman med kvinten i tonikaakkorden, og at kvinten i subdominantakkorden fell saman med grunntonen i tonikaakkorden (C). Dette viser tydeleg kvintslektskapen mellom dominant og tonika, og mellom subdominant og tonika.



Figur 20: Hovudtreklange innfor tonearten C-dur. (C, F og G)

Om ein no utvidar dominantakkorden til ein septimakkord, medfører det at tonen F vert inkludert i G-durakkorden, sjå figur 21. Denne tonen er som kjend grunntonen i subdominantakkorden, og knyter dermed slektskapsband mellom dominant- og subdominantakkorden. Tilsvarande kan ein også teikne inn dei parallelle mollakkordane til kvar av dei tre hovudtreklange. Vi ser frå figur 21 at hjørna i dei tre nye trekantane fell

saman med hjørna i dei eksisterande trekantane frå figur 20. Det tyder at det er dei same tonane som samla inngår i dei tre hovudtreklange og deira parallelle mollakkordar. Vi ser vidare frå figur 21 at den vesle tersen i a-mollakkorden (intervallet frå A til C) fell saman med den vesle tersen i F-durakkorden. Tilsvarende ser vi at den vesle tersen i e-mollakkorden (intervallet frå E til G) fell saman med den vesle tersen i C-durakkorden. Dette viser molltersslektskapen mellom tonika sin parallelle mollakkord og subdominantakkorden, og mellom tonika og dominanten sin parallelle mollakkord.



Figur 21: Hovudtreklange med tilhøyrande parallelle mollakkordar i C-dur.

Figur 21 visualiserer tydeleg at hovudtreklange i C-dur, med tilhøyrande parallelle mollakkordar, inneheld berre [bara] – og alle – stamtonane (dei kvite [vita] tangentane på pianoklaviaturet).

Gjennom desse vakre figurane og enkle analysane, håper eg å ha fått fram at musikken også kan nytast visuelt.

- Ashton, A. (2003). *Harmonograph: a visual guide to the mathematics of music*. New York: Walker Publishing.
- Bjørlykke, R. Å., og Skorpen, L. B. (2009). Å rekne i musikk. I J. Fauskanger, R. Mosvold og E. Reikerås (Eds.), *Å regne i alle fag* (s. 225-236). Oslo: Universitetsforlaget.
- Field, J. V. (2006). Musical cosmology: Kepler and his readers. I J. Fauvel, R. Flood og R. Wilson (Eds.), *Music and mathematics. From Pythagoras to Fractals*. New York: Oxford University Press.
- Garland, T. H., og Kahn, C. V. (1995). *Math and Music*. Parsippany: Dale Seymour Publications.
- Haspang, P. (2010). *Musikkens Matematik*. Samsø: Forlaget Matematik.
- Skorpen, L. B. (2004a). Å lytte til musikk frå tal. 15(4). Retrieved from http://www.caspar.no/tangenten/2004/lytte_til_musikk_fraa_tal.doc.doc
- Skorpen, L. B. (2004b). Å uttrykke musikk ved hjelp av tal. *Tangenten*, 15(4).
- Wollenberg, S. (2006). Music and mathematics: an overview. I J. Fauvel, R. Flood og R. Wilson (Eds.), *Music and mathematics. From Pythagoras to Fractals*. New York: Oxford University Press.