Nämnaren
på nätet

En triangel som är förvånansvärt mångsidig

av Bengt Ulin

Denna artikel publiceras i samband med Nämnaren 2011 nr 2 som är ett nordiskt samarbete kring temat mönster.

Vilken triangel skulle rubriken kunna syfta på om inte på Pascals triangel! I skolan dyker den upp inom kapitlet kombinatorik eller dessförinnan i algebran vid utveckling av $(a+b)^n$.

Pascals triangel ser ut så här:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
....

Den börjar som synes med en etta i toppen och visar därefter koefficienterna för $(a+b)^n$ för alla $n \geq 1$. (Man kan även tolka den första ettan som binomet upphöjt till 0.) Pascal lanserade detta triangulära talschema i uppsatsen *Traité du triangle arithmétique* (med en första utskrift 1654), men det var känt i Kina redan omkring år 1100.

Binomialkoefficienterna i Pascals triangel tillhör de grunder i kombinatorik och sannolikhetslära, som ingår i skolmatematiken. Exempelvis är antalet kombinationer av fyra objekt bland 52 olika objekt:

$$N = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \qquad (1)$$

Om vi förlänger (1) med 48! får vi det alternativa uttrycket $\frac{52!}{4!48!}$. Generellt, antalet kombinationer av k st objekt bland n (olika) är

$$(N,k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (2)$$

Att välja k st objekt är detsamma som att välja bort n-k st objekt, vilket svarar mot att formeln (2) – liksom redan Pascals triangel – är symmetrisk.

Låt oss nu se på några intressanta, kanske överraskande exempel rörande Pascals triangel.

1. Några talföljder och summor i Pascals triangel

- Innanför triangelsidorna med idel ettor ser vi följden 1, 2, 3, 4, ... av naturliga tal. Dessa tal utgör differenserna mellan talen i nästföljande rad med samma lutning, dvs följden 1, 3, 6, 10, ... Vi känner igen dem som pythagoreernas triangeltal (fig 1), som bestäms av formeln $n(n+1)/2$. De naturliga talen, som har konstant differens (dvs 1) bildar en aritmetisk följd av första ordningen, triangeltalen sägs utgöra en aritmetisk följd av andra ordningen: de bestäms av ett andragradsuttryck. Talen anger i sin tur differenserna mellan talen i nästföljande "diagonal", dvs följden 1, 4, 10, 20, ... Den är en aritmetisk följd av ordning 3, vilket innebär att den genereras av ett tredjegradspolynom. Och så vidare ...

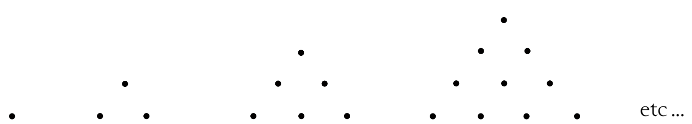

fig 1

- Om vi bildar diagonaler med något mindre lutning (fig 2) erhåller vi (inklusive ettan i toppen) den talföljd 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... som lanserades av Fibonacci i lösningen av det berömda kaninpoblemet i *Liber abaci* (2:a uppl. 1228). Varje tal från och med det tredje är summan av de två närmast föregående talen.

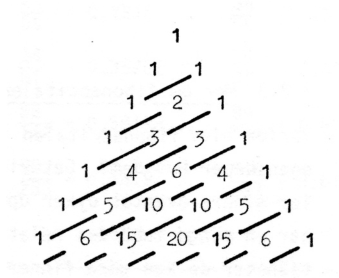

fig 2. Utgående från ettan i toppen erhåller man genom addition av talen längs strecken de tal som ingår i Fibonaccis originaltalföljd, nämligen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

- Om vi adderar talen i pascaltriangelns rader får vi talföljden 1, 2, 4, 8, 16, ... Möter vi här successiva potenser av talet 2? Vägen till svaret är att låta funktionen $(1+x)^n$ alstra binomialkoefficienterna i den triangelrad som börjar med talen 1 och n. Om vi nu sätter $x = 1$, så blir funktionens värde 2^n och dess polynom ger summan av talen i den aktuella raden. Därmed är frågan jakande besvarad. Om man i stället sätter $x = -1$, så får man omväxlande positiva och negativa koefficienter med den (algebraiska) summan 0.

2. Mosers cirkeldelningsproblem

Scientific American [2] publicerade ett cirkeldelningsproblem av Leo Moser (österrikisk matematiker som flyttade till Kanada). På randen till en cirkel sätter man ut punkter ($n = 1,2,3, ...$). Mellan dem drar man alla sammanbindningslinjer som alstrar kordor i cirkeln. Vilken är den funktion *f(n)* som bestämmer det maximala antal områden som cirkeln indelas i av kordorna?

I skolan kan man låta elever i exempelvis åk 9 besvara frågan för $n \leq 6$ genom att helt enkelt rita. Effekten blir störst om man dessförinnan ställt ett analogt problem där n anger antalet dragna kordor. Detta problem är väl ägnat att lösa genom en kombination av uppmärksam ritning och eftertanke. Eleverna måste först avgöra hur kordorna ska dras för att ge största antal områden. De finner att korda nr n ökar antalet områden med just n, varför den sökta funktionen blir

$$1 + (1 + 2 + 3 + ... + n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2),\ n \geq 0.$$

När de därefter ritar figurer till Mosers problem förväntar de sig en likartad regelbundenhet. Då n går från 1 till 5 blir antalet områden 1, 2, 4, 8 och 16. Först i och med $n = 6$ får man se upp med kravet att antalet områden ska bli maximalt. Inte sällan med stort tvivel eller åtminstone motvilligt noterar de 31 områden för $n = 6$. ”Det ska ju bli 32”, säger de.

Att härleda funktionen *f(n)* är något för avancerat för de flesta i skolan. Nämnaren tog upp problemet i sin problemhörna i nr 2/81-82. Sedan en defekt lösning publicerats angav Andrejs Dunkels en instruktiv lösning i nr 3/82-83 [1]. Funktionen *f(n)* kan dock presenteras både enkelt och vackert i skolan, den är identisk med summan av pascaltriangelns tal rad efter rad fram till det streck som dragits i fig 3.

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5 / 1
    1   6  15  20  15 / 6   1
  1   7  21  35  35 / 21  7   1
1   8  28  56  70 / 56  28  8   1
```

fig 3

3. Bottentalet i två varianter

a) Ur en kortlek är knekt, dam och kung av varje valör borttagna. Högsta kort är alltså tior, lägsta är ess som tillordnas talet 1. En person får lägga ut 5 slumpvis dragna kort bredvid varandra, t ex 3, 9, 7, 5, 4. Du kan då imponera genom att blixtsnabbt säga om "bottentalet" (B) blir jämnt eller udda. Hur definieras då B? Man adderar angränsande tal med varann rad efter rad och kommer på så vis till ett tal längst ner. Med de nyss givna talen får vi

```
3   9   7   5   4
 12  16  12   9
   28  28  21
     56  49
      105
```

Man kan förenkla additionerna genom att dra bort 10 så snart summan av två tal är 10 eller mer. Schemat ovan blir då

```
3   9   7   5   4
  2   6   2   9
    8   8   1
      6   9
        5
```

Men hur kan man blixtsnabbt avgöra om bottentalet är udda eller jämnt? Man behöver bara addera tal nr 1 och tal nr 5, i exemplet ovan $3 + 4 = 7$. Denna summa ger svaret: den har samma udda-jämn-kvalitet som bottentalet. Hur förklarar man detta?

Om vi låter a, b, c, d och e representera de fem givna talen erhåller vi efter successiva additioner

$B = a + 4b + 6c + 4d + e$

Eftersom delsumman $4b + 6c + 4d$ alltid är jämn, inverkar den ej på bottentalets kvalitet. Alltså avgörs denna av kvaliteten hos yttersumman $a + e$ och den kan man ju beräkna blixtsnabbt.

b) I skolan kan man bedriva ett undersökande arbetssätt med bottentalet genom att börja med fyra givna tal, vilka som helst. Eleverna får söka sig fram till något sätt att avgöra jämn-udda-kvaliteten hos B. Några säger att B blir udda samtidigt som summan av de fyra talen. Vi låter denna teori stå obesvarad och tar itu med fem givna tal. Eleverna får pröva med egna exempel och lär sig en bra metod: man gör minimala ändringar vid övergång till nya exempel. De blir överraskade av att summan av de fem talen inte avgör kvaliteten: man kan ändra denna genom om t ex byta kvalitet på ett av yttertalen. Först nu tillgriper vi algebran som effektivt hjälpmedel. Med 4 utgångstal $a - d$ och erhåller vi bottentalet $B = a + 3b + 3c + d$. Från denna summa kan det alltid jämna talet $2b + 2c$ dras bort utan att kvaliteten ändras. Denna bestäms alltså av summan $a + b + c + d$. Att algebran så elegant skapar klarhet medför att eleverna får en verksam respekt för denna gren av matematik. En del elever blir ivriga att gå till sex och ännu fler utgångstal. De möter nya överraskningar: vid sex givna tal $a - f$ är det summan $a + b + e + f$ som avgör kvaliteten hos B, vid 7 givna tal avgör summan $a + c + e + g$ och vid 8 givna tal $a - h$ ska åter samtliga tal adderas. Vid 9 givna tal blir resultatet detsamma som vid 5 tal: summan av yttertalen avgör. Om man i Pascals triangel färglägger positionerna för talen i den summa som bestämmer kvaliteten hos bottentalet får man ett vackert mönster (fig 4). De rader vars nummer är en potens av 2 får samtliga positioner färglagda.

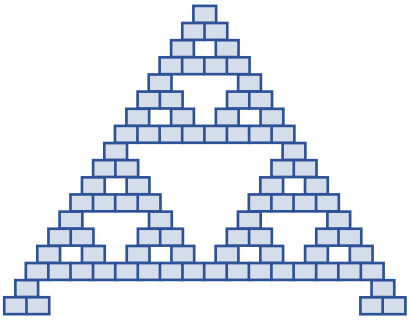

fig 4

4) Kan Pascals triangel avslöja primtal?

De två lägsta primtalen, 2 och 3, fyller ut mellanrummet mellan ettorna i rad nr 2 resp 3 i Pascals triangel, varvid ettan i toppen ses som rad nr 0. Nästföljande primtal, dvs 5, ingår som faktor i 5 och 10, som fyller ut rad nr 5 mellan ettorna. I rad nr 7 står talen 7, 21 och 35 mellan ettorna, samtliga delbara med 7. Kan det förhålla sig så att alla rader med ett primtalsnummer p är delbara med p? Och är det så att alla andra rader innehåller något tal mellan ettorna som ej är delbart med radnumret? Om båda frågorna har svaret ja, så skulle Pascals triangel kunna användas som test på primtal.

Av uttrycket

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{k!} \qquad (1 \leq k \leq n\text{-}1)$$

för koefficienterna mellan ettorna i rad nr p framgår att dessa är delbara med p. Om uttrycket divideras med p, så måste den kvarvarande täljaren vara delbar med $k!$ eftersom p ej innehåller någon av nämnarens faktorer och koefficienten är ett heltal.

Anta nu att radnumret ej är ett primtal, dvs ett sammansatt tal N. Om detta är jämnt, så har det 2 som primtalsfaktor. Binomialkoefficienten $b = (N, 2)$ är då aldrig delbar med N eftersom $b/N = \dfrac{N-1}{2}$ där N–1 är udda. Om N är udda innehåller N minst en primtalsfaktor, säg q.

Vi sätter $\alpha_q = \dfrac{1}{N}(N, k)$

och vill påvisa existensen av ett heltal k för vilket α_k inte är ett heltal. Detta innebär att koefficienten (N, k) ej är delbar med N.

Vi väljer $k = q$ och erhåller

$$\alpha_q = \frac{(N-1)(N-2)\ldots(N-q+1)}{q!} = \frac{T}{U}.$$

Det tal som är delbart med q och är närmast lägre än N är N-q. Faktorerna i T är högst N-1 och lägst N-q+1 och kan därför ej vara delbara med q. Således är α_k ej ett heltal, dvs (N, k) är inte delbar med N.

Därmed är de två frågorna besvarade och vi kan notera följande sats: N är ett primtal om och endast om alla binomialkoefficienter (N, k) med $1 \leq k \leq N$-1 är delbara med N. Man skulle kunna tro att denna sats vore ett utmärkt instrument för att söka upp primtal. Metoden skulle dock bli ofrukbart mödosam för stora tal.

Till sist en fråga som skulle kunna intressera någon elev, och den är inte speciellt svår att besvara. I avsnitt 1 omnämndes de (aritmetiska) talföljder som går parallellt med pascaltriangelns sidor. En av dem börjar med talen 1, 11, 66, 286, 1001, 3003. Dessa tal är delbara med 11. Fortsätter det så i oändlighet? När man funnit svaret infinner sig osökt en generalisering: kan *någon* av de aritmetiska följderna vara sådan att alla dess tal är delbara med det tal som kommer efter den inledande ettan?

Referenser

[1] A Dunkels, Problem med problem, Nämnaren 3/82-83.
[2] M Gardner, Mathematical Games, Scientific American, augusti 1969.