

Kommentarer till Nämnaren nr 2/11

av Sture Sjöstedt

Temat i detta nummer av Nämnaren är Mönster av olika slag. Michael Naylor skriver om Pascals triangel och hur den kan utvidgas. Jag kommer att beskriva ett sätt att omvandla den till en xy-tabell. Pascals triangel är kopplad till binomialsatsen och ger ett schema för koefficienterna när man beräknar till exempel $(a + b)^k$. Väljer man $a = \sqrt{2}$ och $b = 1$ får man en xy-tabell med ett mycket intressant mönster.

Det gäller att $(\sqrt{2} + 1)^k = x_k * \sqrt{2} + y_k$ och x och y-värdena kan räknas fram med rekursionsformlerna $x_{k+1} = x_k + y_k$ och $y_{k+1} = 2 * x_k + y_k$ med $x_1 = 1$ och $y_1 = 1$ som startvärden.

Jag skriver rekursionsformlerna. Den som vill kan hoppa över dem och se hur tabellen växer fram och hur mönstret dyker upp i takt med att nya rader beräknas.

	x	y	Mönstret		
A	1	1	$2 * 1 * 1 - 1 = 1 * 1$		
B	2	3	$1 + 1 = 2$	$2 * 1 + 1 = 3$	$2 * 2 * 2 + 1 = 3 * 3$
A	5	7	$2 + 3 = 5$	$2 * 2 + 3 = 7$	$2 * 5 * 5 - 1 = 7 * 7$
B	12	17	$5 + 7 = 12$	$2 * 5 + 7 = 17$	$2 * 12^2 + 1 = 17^2$
A	29	41	$2 * x^2 - 1 = y^2$		
B	70	99	$2 * x^2 + 1 = y^2$		
A	169	239			
B	408	577			

Jag ska strax visa hur tre problem kan lösas med hjälp av denna tabell. Bengt Ulin har i Nämnaren nr 1/98 en intressant artikel med rubriken "Tar vi vara på matematikhistorien?" där han tar upp de figurativa talen och i Nämnaren nr 2/11 har Lene Christensen visat hur kvadrattal, rektangeltal och triangeltal kan användas i matematiken från lågstadiet och uppåt. När man fyllt i den tabell Lene har på sidan 11 i nr 2/11 besvarar man enkelt Bengt Ulins fråga: Vad får man om man lägger samman två på varandra följande triangeltal? Hur ofta hittar man tal som är både triangeltal och kvadrattal? Det är en annan intressant fråga. Talet 1 finns ju i alla tabeller och i tabellen för triangeltal finner man snart $36 = 6 * 6$ (nr 8) men var kommer nästa kvadrat? Jag ska besvara den frågan när jag löst två problem med hjälp av tabellen.

Problem 1: Kan man finna tal sådana att både (talet +1) och (2*talet +1) är kvadrattal ?

Elever som lärt sig räkna med hjälp av läromedlet *Förstå och använd tal – en handbok* (där Peanos axiom tas upp) finner nog talet 0 ty $0 + 1 = 1$ och $2*0 + 1 = 1$, men jag tror att ganska många även finner 24 om de får öva lite problemlösning. Här skriver jag radvis en algoritm för att lösa problemet och visar hur det blir för 3 och 5. 3 ger en bom. 5 ger en lösning. Genomför uträkningarna för 29.

Algoritmen blir

Välj ett tal	3	5	29
Kvadrera	9	25	
Minska med 1	8	24	
Multiplitera med 2	16	48	
Öka med 1	17	49=7*7	

Både $24 + 1$ och $2*24 + 1$ är kvadrater.

Förklaring: $t + 1 = x^2$ och $2t + 1 = y^2$. Byter man t mot $(x^2 - 1)$ i den andra ekvationen och förenklar erhålles $2*x^2 - 1 = y^2$ som gäller för A-raderna, se tabellen på första sidan.

Fortsätter man i tabellen och förlänger den finner man alla tal som är lösningar till Problem 1 genom att i A-raderna hämta x och beräkna $x^2 - 1$. Talföljden med de sökta talen inleds med talen 0, 24, 840, 28560, ...

Problem 2: Kan man finna tal sådana att både (talet - 1) och (2*talet - 1) är kvadrattal ?

Algoritmen blir nu

Välj ett tal	2	5	12
Kvadrera	4	25	
Öka med 1	5	26	
Multiplitera med 2	10	52	
Minska med 1	9 = 3*3	51	

Både $5 - 1$ och $2*5 - 1$ är kvadrater.

2 ger en lösning. 5 ger en bom. Genomför uträkningarna för 12.

Förklaring: $t - 1 = x^2$ och $2t - 1 = y^2$. Byter man t mot $(x^2 + 1)$ i den andra ekvationen och förenklar erhålles $2*x^2 + 1 = y^2$ som gäller för B-raderna, se tabellen på första sidan.

Fortsätter man i tabellen och förlänger den finner man alla tal som är lösningar till Problem 2 genom att i B-raderna hämta x och beräkna $x^2 + 1$. Talföljden med de sökta talen inleds med talen 5, 145, 4901, 166465, ...

Problem 3 : Sök reda på triangeltal som också är kvadrattal.

$n(n + 1)/2$ ger triangeltal och m^2 ger kvadrattal. Vi ska lösa ekvationen $n(n + 1)/2 = m^2$. Byter vi n mot $(y - 1)/2$ och m mot $x/2$ och förenklar erhålles $2x^2 + 1 = y^2$. Vi kan använda raderna som är markerade med B och räkna fram lösningarna

Talföljderna inleds med m : 1, 6, 35, 204, ... och n : 1, 8, 49, 288, ...

Övning : Försök finna rätvinkliga trianglar med heltalssidor där den ena kateten är 1 längre än den andra kateten.

Ledning: Denna övning löses med hjälp av räknescemat och Pythagoras sats. Man ser att den Egyptiska triangeln med sidorna 3, 4, 5 är startvärde .