

Tar vi vara på matematikens historia?

Kommentar av Sture Sjöstedt

Theon från Smyrna (dog cirka 140 e. Kr.) hade ett räknescema med vilket han antogs beräkna $\sqrt{2}$. Analyserar man detta schema finner man att det förvandlar Pascals triangel till en xy-tabell och kan användas för att beräkna $(\sqrt{a} + 1)^k$ på ett effektivt sätt. Är $a=2$ kan man också lösa diofantiska ekvationer av andra ordningen som kan överföras till typen $2x^2 + 1 = y^2$ eller $2x^2 - 1 = y^2$.

Det gäller att $(\sqrt{a} + 1)^k = x_k + y_k \sqrt{a}$ och x och y -värdena kan räknas fram med rekursionsformlerna $x_{k+1} = x_k + y_k$ och $y_{k+1} = a x_k + y_k$ med $x_1 = 1$ och $y_1 = 1$ som startvärden.

Även de Moivre upptäckte en talföljdsgenerator: $(r^k - s^k)/(r - s)$ som glömdes bort men har återupptäckts när man började lösa differensekvationer.

Ett trevligt problem som förenar triangeltal, kvadrattal ock konjugatregeln är följande:

Problem. Sätter man in $k=1, 2, 3, \dots$ i $(9^k - 1)/(9 - 1)$ får man en talföljd som består av triangeltal. Visa detta.

Triangeltal kan skrivas på formen $n(n + 1)/2$.

Ange också några rekursionsformler som genererar denna talserie.

Kommentar: Det är trevligt med problem som har mer än en lösning.

Några formler är $t_{n+1} = 9t_n + 1$ $t_1 = 1$

$$t_{n+1} = 10t_n - 9t_{n-1} \quad t_1 = 1 \quad t_2 = 10$$

$$t_{n+1} = t_n + 9^n \quad t_1 = 1$$