

Vår kära konjugatregel

Kommentar av Sture Sjöstedt

I Nämnaren nr 2/11 presenterar Bengt Ulin "Lite digitalromantiskt godis" där han använder konjugatregeln och löser några problem med kvadratiske tal.

I Bengt Ulins bok "Fibonaccitalen och gyllene snittet" (Utgiven av NCM 2008) finns på sidan 15 en formel för Fibonaccitalen som påminner om detta allmänna samband $(r^k - s^k)/(r - s)$. Jag väljer $r = 9$ och $s = 1$ och konstruerar ett problem där konjugatregeln kan användas.

Problem: Sätt in $k = 1, 2, 3, \dots$ i sambandet $(9^k - 1)/8$ och få en talföljd som börjar med talen 1, 10, 91. Vilket blir nästa tal i följd?

Visa att dessa tal är triangeltal och kan skrivas på formen $n(n + 1)/2$.

Lösningar och kommentarer:

Sätter man in $k=4$ och räknar får man $(9^4 - 1)/8$ som ger 820.

Vill man ha en enkel rekursionsformel kan man använda 1 som startvärde och beräkna term två som $9 \cdot 1 + 1 = 10$.

Den tredje är $9 \cdot 10 + 1 = 91$.

Vill man ha den fjärde räknar man så här : $9 \cdot 91 + 1 = 820$.

Den femte får man med $9 \cdot 820 + 1 = 7381$ Kontrollera genom att sätta in $k = 5$ i $(9^k - 1)/8$. Rekursionsformeln blir : $t_{n+1} = 9 \cdot t_n + 1$.

Söker man en formel där man använder 1 och 10 som startvärden finner man att denna ger samma talföljd $t_{n+1} = 10 \cdot t_n - 9 \cdot t_{n-1}$ $t_1 = 1$ $t_2 = 10$

Även formeln $t_{n+1} = t_n + 9^n$ $t_1 = 1$ ger samma talföljd.

Att talföljden består av triangeltal visas med konjugatregeln och att $9 = 3^2$.

$(9^k - 1)/8$ skrivs om till $((3^k + 1)/2) \cdot ((3^k - 1)/2) \cdot (1/2)$.

Extraparenteser är inlagda för att visa faktoruppdelningen.

Jag visar att $((3^k + 1)/2) - ((3^k - 1)/2) = 1$ och då kan $(3^k + 1)/2$ bytas mot $(n + 1)$ och $(3^k - 1)/2$ mot n som medför att talen kan skrivas på formen $n(n + 1)/2$.

$(3^k + 1)/2 - (3^k - 1)/2 = 3^k/2 + 1/2 - 3^k/2 + 1/2 = 1$

