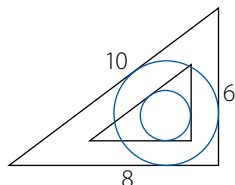




- 3713 Triangeln har omkretsen 24 och arean 24 alltså den inskrivna cirkeln har radien 2. Den rullande cirkelns mittpunkt rör sig längs omkretsen av en triangel som är likformig med den ursprungliga men en l.e. inåt, dess inskrivna cirkels radie är 1 l.e. mindre. Alltså är lilla triangelns omkrets också hälften så stor som den storas, $24/2 = 12$.

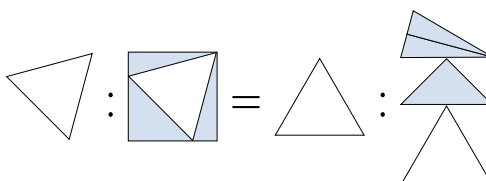


Leo Rubinstein

Här finns lösningar till problem 3713 till 3717 som publicerades i problemavdelningen 174, i Nämaren nr 2, 2010.

- 3714 Triangeln måste ligga symmetriskt i kvadraten om kvadraten ska vara en kvadrat. Beteckna triangelns sida med T. Kvadraten är indelad i 4 trianglar med vinklarna: en med 60, 60, 60; en med 45, 45, 90 och två med 15, 75, 90. De sista två slår vi ihop till en med vinklarna 30, 75, 75. Varje triangel har minst en sida med längd T, vi väljer dessa som baser. Nu har vi tre trianglar med lika stora baser och höjderna: $T \cdot \sqrt{3}/2$, $T/2$ och $T/2$. Areorna fördelas i samma proportion, därför är den liksidiga triangelns area lika med

$$S^2 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = S^2 \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3)$$



- 3715 Den inskrivna cirkeln diameter är 4. Den kortaste kateten är större än 4 och mindre än eller lika med $4 + 2 \cdot \sqrt{2} < 7$ (längst i en likbent triangel), alltså 5 eller 6. Given en vinkel (90 grader), en intilliggande sida (5 eller 6) och den inskrivna cirkeln diameter (4) så finns det bara en triangel som uppfyller villkoren, dvs det kan inte finnas fler trianglar som uppfyller problemets premisser än de som är givna i svaret.
- 3716 Inledande kommentar: Alla kongruenta trianglar räknas som en och samma triangel.

Definition: En triangel är **bredbent** om för dess sidor a,b och c gäller att $a = b \leq c$.

Beteckningar: $U(x)$, $N(x)$ är avrundningar uppåt resp neråt till närmsta heltal.

$B(n)$, $A(n)$ är antal bredbenta resp alla heltalstrianglar med omkretsen n.

$T(n)$ = summan av 1 till n = $n \cdot (n+1)/2$

Låt u vara ett udda tal. Hur många bredbenta trianglar med omkrets u finns det?

$B(u) = N(u/3) - U(u/4) + 1$ vilket ger $B(u) = 1, 0, 1, 1, 1$ respektive för udda u = 3 till 13.

Det finns en bijektion mellan alla heltalstrianglar med omkrets u-2 och de som inte är bredbenta och har omkrets u. (Förläng/förkorta de 2 längsta sidor med 1.)

Alltså är $A(u) = A(u-2) + B(u)$ och eftersom $A(1)=0$ så $A(u)$ =summan av $B(u)$ från 3 till u (bara udda termer).

$A(13) = 1+0+1+1+1+1=5$

$N((u+12)/3) = N(u/3)+4$, $U((u+12)/4) = U(u/4)+3$ vilket ger $B(u+12)=B(u)+1$

Detta förenklar summeringen för större tal.

$A(113) = 9 \cdot A(13) + 6 \cdot T(8) + B(111) + B(113) = 9 \cdot 5 + 6 \cdot 36 + 10 + 9 = 280$.

(För jämna tal j gäller $A(j)=A(j-3)$, man får bijektion genom att förlänga/förkorta alla sidor med 1)

3717 Beteckningar:

$P(s,n)$ är sannolikheten att få summan s på n kast

$Q(s,n)$ är sannolikheten att få en summa mindre eller lika med 12 i n :te kastet och summan s på $n+1$:a kastet.

$R(s)$ är sannolikheten att få summan s på sista kastet (dvs. det första kastet då summan överstiger 12)

Då har vi för varje n :

$$Q(13,n) = P(8,n)/6 + P(9,n)/6 + P(10,n)/6 + P(11,n)/6 + P(12,n)/6$$

$$Q(14,n) = P(9,n)/6 + P(10,n)/6 + P(11,n)/6 + P(12,n)/6$$

$$Q(15,n) = P(10,n)/6 + P(11,n)/6 + P(12,n)/6$$

$$Q(16,n) = P(11,n)/6 + P(12,n)/6$$

$$Q(17,n) = P(12,n)/6$$

$$Q(s,n) = 0 \text{ för } s > 17$$

Detta ger

$$Q(13,n) \geq Q(14,n) \geq Q(15,n) \geq Q(16,n) \geq Q(17,n)$$

och för tillräckligt stora n gäller strikta olikheter

$$Q(13,n) > Q(14,n) > Q(15,n) > Q(16,n) > Q(17,n) > 0$$

$R(s)$ = summan över alla n av $Q(s,n)$ vilket ger

$$R(13) > R(14) > R(15) > R(16) > R(17) > 0 \text{ och } R(s) = 0 \text{ för } s > 17.$$

