

Ugnsproblemet

En maträtt placeras i en ugn. Temperaturen y °C stiger enligt ekvationen:
 $y = 220 - 200e^{-kx}$, där k är en konstant och x minuter den tid rätten stått i ugnen.
 Efter 15 minuter är temperaturen 53°C.

- Vad är temperaturen efter 25 minuter?
- Med vilken hastighet förändras temperaturen efter 15 minuter?

Delfproblem a

◇ Förstå problemet

Vad står y för? Vad temperaturen är efter ett visst antal minuter! I uppgiften uttrycker man sig så att man skulle kunna tolka det som hur snabbt temperaturen stiger – och det är ju en annan sak!

y är temperaturen, står det...hos maträtten eller ugnen? Maträtten!

Om vi ser på den här formeln för maträttens temperatur, kan den ge oss en grov bild av vad som händer?

Sätter vi in $x = 0$ blir $y = 20$. Vad säger det...eller om vi frågar omvänt; vad är maträttens temperatur innan vi börjar värma upp den?

Termen $200e^{-kx}$ blir mindre och mindre ju större x blir...och temperaturen närmar sig 220°C = ugnstemperaturen. Oj, hur ser maträtten ut då? Det här kanske är en matematisk modell som man inte kan använda för hur stora värden som helst på x ...

Vi gör en skiss av grafen för att ännu bättre förstå vad som händer.

Nu passar det bra att försöka gissa svaret. Om gissningarna går trögt:
 Om temperaturen skulle fortsätta att öka i samma takt efter 15 minuter som under de första 15 minuterna, var hade vi då hamnat efter 25 minuter?

Under de första 15 minuterna gick temperaturen från 20 °C till 53 °C, en ökning med 33 °C. Det ger en ökning på i genomsnitt 33/15 °C/min, ungefär 2,2 °C/min. Om vi skulle fortsatt ytterligare 10 minuter med samma ökningstakt skulle temperaturen ökat med ytterligare 22 °C och vi skulle hamna på 75 °C.

Är detta för mycket eller för lite jämfört med det riktiga värdet? Den genomsnittliga ökningen från 0 till 15 minuter motsvaras av riktningskoefficienten för sekanten som går mellan 0 och 15 minuter (se figuren här intill). Utgår man från att temperaturökningen fortsätter på samma sätt innebär det att vi har approximerat temperaturkurvan med sekanten fram till $x = 25$ minuter.

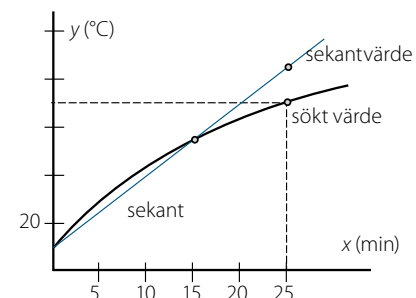
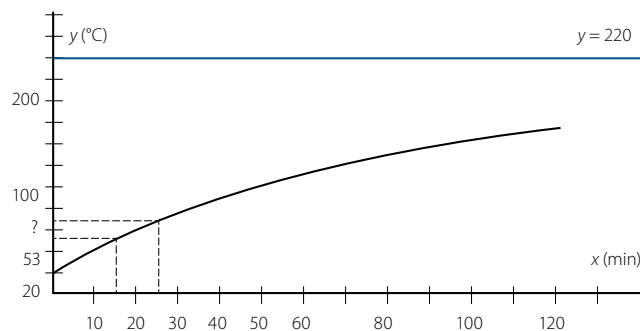
På grafen ser vi att vi då får ett lite för högt värde. Det sökta värdet är kanske några grader lägre – vi gissar på cirka 72 °C!



foto: David J Morgan

av Stefan Löfwall

Den artikel av författaren om problemlösning som publicerats i Nämnen nr 3 2010 kompletteras här med ett tvådelat problem som diskuteras med utgångspunkt i de punkter som Polya formulerat.



◇ Hitta en lösningsmetod

Den här punkten tog jag upp i Nämnarenartikeln (av misstag blev det ett byte av y till T och x till t där): Fokusera på det som frågas efter, temperaturen då $x = 25$ minuter! Vi ska alltså ta reda på vad y är då $x = 25$. $y = 220 - 200e^{-25k}$. k saknas...hur ska vi få fram det? Genom att utnyttja att vi vet temperaturen efter 15 minuter!



◇ Genomför lösningen

$$y = 220 - 200e^{-25k} \quad \text{Vad blir } k?$$

$$53 = 220 - 200e^{-15k} \quad \text{begynnelsevillkoren}$$

$$e^{-15k} = (220 - 53)/200$$

$$-15k = \ln((220 - 53)/200)$$

k blir ca 0,012, vilket i sin tur ger att y blir ca 71,9 °C.

◇ Är svaret rimligt? Se tillbaka på lösningen!

Nu jämför vi så klart med gissningen och finner att svaret ser väldigt rimligt ut! Här kan man också se tillbaka på lösningen: Vad var svårt att förstå? Vad fick dig att förstå bättre det som kändes svårt i början? Känns något fortfarande oklart? Vad kan du som lärare göra för att följa upp svårigheterna i så fall?

Delproblem b

◇ Förstå problemet

Ett sätt är att diskutera enheten: Vad mäter man den här förändringen i? Förändringen är ett visst antal °C per minut. Det är förändringen just vid tidpunkten 15 minuter vi är ute efter, en slags momentan hastighet. Här kan en gissning hjälpa förståelsen på traven. Då kan vi ha nytta av a-uppgiften. Där kom vi fram till att den genomsnittliga ökningen för tiden 0 – 15 minuter var cirka 2,2 °C/min. Hur är det med ökningen efter precis 15 minuter – blir den större eller mindre? På kurvan ser man att temperaturen ökar mindre och mindre ju längre tiden går. Så lite mindre än 2,2 °C/min blir det nog. Vi gissar 2,0 °C/min.

◇ Hitta en lösningsmetod

Fokusera på det som frågas efter: "Med vilken hastighet förändras temperaturen...". När vi hör förändringshastighet tänker vi derivata (om det är momentan hastighet)! Derivatans talar om hur snabbt temperaturen förändras vid en speciell tidpunkt. Jämför med grafen och tangentens riktningskoefficient för $x = 15$. Vi ska alltså beräkna derivatan för $x = 15$; $y' = 200 \cdot k \cdot e^{-kx}$; $y' = 200 \cdot k \cdot e^{-k \cdot 15}$

◇ Genomför lösningen

$y' = 200 \cdot k \cdot e^{-k \cdot 15}$, värdet på k tas från a-uppgiften och sätts in och ger att y' blir cirka 2,0 °C/min.

◇ Är svaret rimligt? Se tillbaka på lösningen!

Vi beräknade alltså temperaturökningen efter 15 minuter till 2,0 °C/min. Det stämmer precis med vår gissning, vilket gör att vi tycker att svaret är rimligt. På samma sätt som i a-uppgiften kan man nu se tillbaka på lösningen.