Doug M. Clarke, Anne Roche och Annie Mitchell

Tio sätt att göra bråk levande

I denna artikel presenteras några förslag på hur vi kan arbeta med bråk så att det inte bara handlar om att utföra beräkningar utan också leder till djupare förståelse för rationella tal.

Bråk kan vara svåra att undervisa om och svåra att lära sig, men svårigheter kan övervinnas. Resultat från matematikdidaktisk forskning i Australien och andra länder kan peka ut sätt att hantera "the big ideas" i undervisningen och göra bråken begripliga för våra elever. I artikeln delar vi med oss av insikter vi fått från vår forskning, föreslår vad som är viktigt och mindre viktigt, samt presenterar några praktiska elevaktiviteter, som enligt vår erfarenhet har potential att göra bråk levande för både lärare och elever.

Varför är bråk så svårt?

De flesta är överens om att bråk är en viktig del av skolans matematikinnehåll (Litwiller & Bright, 2002). Arbete med bråk stödjer utvecklingen av proportionellt tänkande och bråk är betydelsefulla i kommande matematikstudier, inte minst inom algebra och sannolikhet. Det finns emellertid många lärare som tycker att det är svårt både att förstå och att undervisa om bråk (Lamon, 2007) och många elever har svårt att förstå bråk (Clarke, Roche, Mitchell & Sukenik, 2006; Pearn & Stephens, 2004). En stor del av osäkerheten kring undervisning och lärande av bråk verkar härröra från de många olika tolkningarna, representationerna och symboliska konventionerna, t ex $\frac{5}{4}$, $1\frac{1}{4}$, 1,25 och 125% (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Dessutom generaliseras många egenskaper från undervisningen om hela tal felaktigt till bråken (Streefland, 1991).

Rationella tal kan tolkas på flera olika sätt, vilka ofta sammanfattas som *del-helhet*, *mätning*, *kvot* (division), *operator* och *förhållande* (Kieren, 1976). Som bakgrund till vår framställning ska vi kort redogöra för dessa tolkningar.

Tolkningen som *del-helhet* bygger på möjligheten att dela upp antingen en kontinuerlig storhet, t ex längd-, area- och volymmodeller, i lika stora delar eller en mängd av objekt i lika stora delmängder.

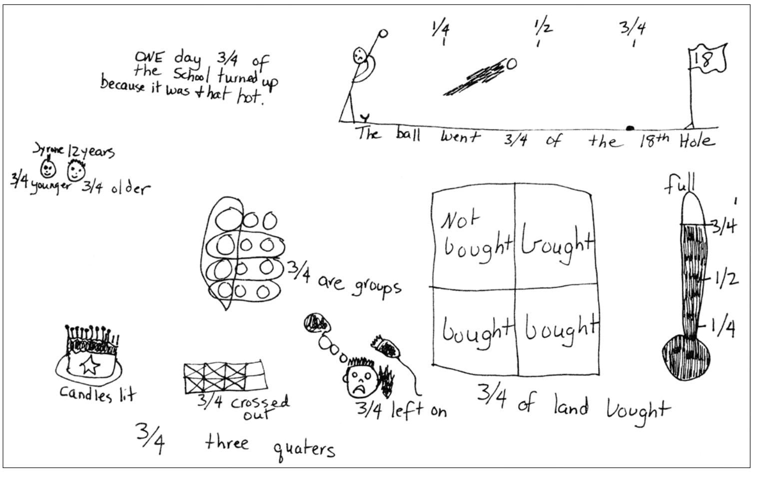
Ett bråk kan representera en *mätning*, ett mått, av en storhet i förhållande till en enhet av storheten. Det rationella talet kan placeras som en punkt på tallinjen, på ett bestämt avstånd från noll. Lamon (1999) förklarar att denna tolkning skiljer sig från andra tolkningar genom att antalet lika delar kan variera beroende på hur många gånger man delar in i mindre enheter. Den successiva uppdelningen möjliggör en mätning med allt högre precision.

Ett bråk ($\frac{a}{b}$) kan också representera en *division* eller resultatet av en division, som tex $3 \div 5 = \frac{3}{5}$. Divisions- eller kvottolkningen kan förstås som uppdelning och likadelning.

Ett bråk kan användas som och beteckna en *operator*, t ex 3/4 av 12 = 9 och $5/4 \cdot 8 = 10$. Missuppfattningar som att multiplikation alltid gör större och division alltid gör mindre är vanliga. De kan delvis bero på elevers bristande erfarenheter av att använda bråk som operatorer.

Bråk kan användas för att beskriva *förhållande* – en jämförelse av storleken av två mängder eller två mått, som att på tre flickor går det 4 pojkar. Post m fl (1993) menar att ”ratio, measure and operator constructs are not given nearly enough emphasis in the school curriculum” (s. 328).

En utmaning för både lärare och elever är att kunna etablera alla lämpliga samband så att en mogen och flexibel förståelse av bråk och, i förlängningen, rationella tal, kan utvecklas. En annan utmaning rör många lärares erfarenheter från sin egen matematikutbildning, vilken inte har förberett dem tillräckligt för att kunna undervisa om bråk på ett klokt sätt. Trots svårigheterna med att undervisa om och lära bråk finns det intressanta exempel på lärare som tydligt lyckas med att stödja elever som försöker förstå detta innehåll. Darcy fick i uppgift att beskriva eller rita 3/4 på så många sätt han kunde (figur 1). Hans arbete uppvisar en bredd i förståelsen av ett antal olika sätt att tolka och tillämpa bråk.



Figur 1. Rita eller skriv ¾ på så många sätt du kan. Så här gjorde Darcy.

Här följer nu tio råd som vi menar kan underlätta elevers förståelse av bråk.

1. Betona innebörden av bråk mer än manipulering

Styrdokument ger ibland sken av att målet för undervisning om bråk är att elever ska kunna göra operationer med alla fyra räknesätten med dem. Vi menar att elever måste få tid att komma underfund med vad bråk handlar om istället för att direkt börja manipulera med dem och att målet bör vara att utveckla elever som kan resonera proportionellt.

Ett ofta refererat resultat från den nationella utvärderingen i matematik i USA (U.S. National Assessment of Educational Progress, NAEP, se Carpenter mfl, 1980) stödjer att elever har svårt att förstå ett bråks storlek. Endast 24 procent av 13-åringarna i utvärderingen valde korrekt svar (alternativ: 1, 2, 19, 21) när de uppskattade storleken av 12/13 + 7/8. De flesta valde 19 eller 21.

Även om problem som innehåller proportionalitet ofta kan lösas med hjälp av samband som $a/b = c/d$ menar Lamon (1999) att användning av den typen av ekvationer eller samband inte i sig är resonemang och att ”proportionella tänkare” kan använda egna strategier och uttryckssätt för att förstå och hantera den här typen av problem och ”identify everyday contexts in which proportions are and are not useful” (s 235).

Vi vill att våra elever ska kunna avgöra om reklam som ”det är bättre med 5 % rabatt än 50 kr i rabatt” är sann eller ej. Vi vill att våra elever ska förstå att förhållandet mellan arean av begränsningsytan och volymen likaväl som uttorkning kan förklara varför en baby som lämnas i en bil en varm sommardag plågas medan en vuxen under samma förhållanden inte gör det (Lovitt & Clarke, 1988). Vi vill också att eleverna ska kunna använda sin taluppfattning och sin förståelse av proportionalitet för att avgöra vilket av två tvättmedelsköp som är bäst (se figur 2).

Figur 2. Vilket av dessa alternativ ger mest för pengarna?

2. Utveckla en generaliserbar regel som förklarar innebörden av täljaren och nämnaren

När elever inledningsvis försöker förstå bråk är det vanligt att läraren har förklarat på följande sätt: Nämnaren talar om hur många delar det hela har delats i och täljaren talar om hur många av dessa delar man ska ta, räkna eller måla.

Denna förklaring fungerar tämligen bra för bråk mellan 0 och 1 i vissa sammanhang, men sämre för bråk större än 1. Vi föreslår den här förklaringen istället: För ett bråk a/b är b namnet eller storleken på delen (”femtedelar” heter så därför att det behövs 5 lika delar för att fylla upp en hel) och a är antalet delar med det namnet eller den storleken. Om vi har 7/3 talar 3 om namnet eller storleken på delarna, tredjedelar, och 7 talar om att vi har 7 sådan tredjedelar (eller $2\frac{1}{3}$).

Vi menar att den här förklaringen kan hjälpa eleverna till ett bättre språkbruk när de talar om bråk. Vi har hört elever benämna tre fjärdedelar som ”three-fours” och ”four-threes”. En sådan användning av heltals- snarare än bråkbenämning kan indikera att eleverna inte ännu har klart för sig vilken siffra som refererar till antalet delar eller till delarnas storlek.

3. Betona att bråk representerar tal och använd tallinjen

Kilpatrick, Swafford och Findell (2001) framhåller att det är lätt att förbise att bråk representerar tal eftersom det är så självklart.

Att använda tallinjen har många fördelar. Den erbjuder elever en möjlighet att se hur naturliga tal och rationella tal i bråk- och decimalform är relaterade. Tallinjen kan illustrera varför 5/3 är detsamma som 1 ²⁄₃, att 6/3 är detsamma som 2 och den kan förenkla för elever att förstå ”tätheten” av de rationella talen (dvs att mellan två godtyckliga rationella tal, i bråk- och/eller decimalform, finns oändligt många andra rationella tal).

4. Ta tidigt tillvara tillfällen att uppmärksamma oegentliga bråk och ekvivalenser

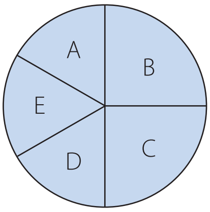
Om elever verkar förstå språkbruket kring bråk och kan använda tallinjen kommer oegentliga bråk [täljaren är lika stor som eller större än nämnaren] att passa in helt naturligt. Aktiviteten *Färglägg bråk* [arbetsblad finns på Nämnaren på nätet] kan hjälpa elever att utveckla förståelse för ekvivalenta bråk och innebörden i oegentliga bråk. När elever exempelvis försöker förstå innebörden av 4/3 i spelets kontext kan utmaningen, att vara först med att fylla hela spelplanen, motivera dem att fundera kring vad som är ekvivalent med 4/3, t ex 1 rad plus 1/3 eller 5/6 och 1/2. Spelet passar alla. Elever som brottas med ekvivalenta uttryck behöver endast färglägga det de får på tärningarna (”jag fick 2/6 så jag färglägger 2 av sjättedelarna”), men de observerar snart hur kamraterna använder ekvivalenta uttryck och kan fånga upp idén och möjligheten att vara flexibel särskilt om de tror att kommer att missa sin tur för att de inte kan hitta ekvivalenta områden att färglägga.

5. Använd olika modeller för att representera bråk

En stor mängd laborativa och andra material har använts i undervisningsförsök (Post, Wachsmuth, Lesh & Behr, 1985; Steencken & Maher, 2002) t ex bråkstavar, Cusinairestavar, papper som viks, laminerade former och datorprogram. Det är dock inte säkert att färdiggjorda bråkmaterial gör det möjligt för elever att utveckla viktiga idéer kring bråkbegreppet, exempelvis att helheten måste vara lika stor för att bråkdelar ska kunna jämföras och att lika delar inte behöver vara kongruenta (Ball 1993). Empson (2002) fann att problem som innefattade likadelning gav eleverna möjlighet att generera sina egna modeller, vilka omfattade många viktiga aspekter av bråk

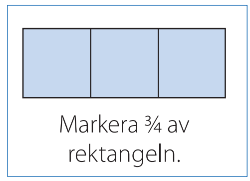
Om eleverna ska bli flexibla i att använda och gå emellan olika modeller behöver de alltså bli vana vid olika representationer, och material, då varje modell skiljer sig åt beträffande hur väl de synliggör olika aspekter. Många elever är dock ”fattiga på modeller” och kan endast föreställa sig bråk som delar av en cirkelyta (Sowder 1988) . Vi kunde bekräfta detta när vi studerade elevers svar på frågan ”rita eller skriv 3/4 på så många sätt du kan” som vi hänvisade till tidigare.

I de en-till-en intervjuer om tal i bråk- och decimalform som vi har utarbetat använde vi en uppgift från ”the Rational Number Project” som behandlar tolkningar av en cirkelmodell (Clarke mfl, 2006). Eleverna fick uppgiften i figur 3 (utvecklad från Cramer, Behr, Post & Lesh, 1997).



Figur 3. Hur stor del av cirkeln är B? Hur stor del är D?

Deluppgift *a* var relativt okomplicerad, 83,0 procent av sjätteklassarna svarade 1/4. Ytterligare 3,4 procent svarade korrekt, med ett likvärdigt bråkuttryck, ett tal i decimalform eller med procent, medan 5,6 procent och 1,9 procent svarade 1/5 respektive 1/2 (n=323). Deluppgift *b* var svårare, endast 42,7 procent gav det korrekta svaret 1/6 och 13,6 procent svarade 1/5 (troligen baserat på ”fem delar”). Lika stor andel svarade 1/3, möjligen för att de endast beaktade den vänstra sidan. Dessa elever hade troligen liten erfarenhet av uppdelning med olika stora delar och hade kanske inte mött areamodeller med ”perceptual distractors” (Behr & Post, 1981). Vi tror att elever har nytta av uppgifter som innehåller visuellt distraherande element, som de i figur 4. Här tvingas eleverna att tänka matematiskt snarare än att bara räkna upp och skugga. Den typen av uppgifter har också använts för att diagnostisera elevers förståelse av tal i decimalform (Roche, 2005).



Figur 4. En uppgift med en distraktor.

6. Relatera bråk till referenspunkter och uppmuntra uppskattning.

I vår en-till-en intervju fick eleverna åtta par av bråk och för varje par skulle de avgöra vilket som var störst och förklara varför (figur 5). Eleverna hade inte tillgång till papper och penna utan var tvungna att göra jämförelsen i huvudet. Pröva uppgiften själv. Kan du avgöra vilket bråk som är störst, och hur går du till väga? Notera dina svar innan du fortsätter läsa.

Bråkpar	Vilket bråk är störst? Beskriv din strategi.
a. 3/8 7/8	
b. 1/2 5/8	
c. 4/7 4/5	
d. 2/4 4/8	
e. 2/4 4/2	
f. 3/7 5/8	
g. 5/6 7/8	
h. 3/4 7/9	

Figur 5. Bråkpar.

Uppgiften gavs till 323 elever i slutet av sjätte klass. Resultatet varierade mellan de olika paren, från 77,1 procent korrekta svar med godtagbar förklaring för bråken 3/8 och 7/8 till det svåraste paret 3/4 och 7/9 där endast 10,8 procent av svaren var rätt.

Trots att flera elever, med varierad framgång, gjorde bråken liknämniga i flera fall, använde de mest framgångsrika eleverna två strategier som de inte hade fått undervisning om i skolan. Den första kallar vi *användning av referenspunkter*: Eleverna jämför bråken med 0, 1/2 eller 1. För paret 3/7 och 5/8 kunde de konstatera att 3/7 är mindre än 1/2 medan 5/8 är mer än 1/2. Det var tydligt att dessa elever kunde se bråk som en punkt på tallinjen.

En annan framgångsrik strategi kan vi kalla *beaktande av återstoden* ("residual thinking"): Eleverna jämförde hur mycket som saknades upp till en hel. När de jämförde 5/6 och 7/8 kunde de se att för det första saknas 1/6 upp till en hel (återstoden är 1/6), medan för det andra saknas 1/8, vilket är mindre, alltså är 7/8 störst. Detta är en utmärkt strategi.

Det fanns också elever som använde en felaktig strategi och jämförde skillnaden mellan täljare och nämnare (jmfr med "gap thinking" beskriven av Pearn & Stephens, 2004). Dessa elever menade att 5/6 och 7/8 är lika stora eftersom båda behöver "en del" för att bilda en hel.

Vi tror att när elever får ta del av varandras strategier för att jämföra bråk, kan flera bli övertygade om att använda referenspunkter och att beakta återstoden för att storleksordna tal i bråkform. Inte för att det inte fungerar att göra liknämnigt, men strategierna att använda referenspunkter och att beakta återstoden är ofta effektivare och fokuserar tydligare på innebörden av bråk, något som ofta saknas i elevers erfarenhet av bråk under skolgången.

I en undersökning där tvåhundra vuxna följdes i 24 timmar visade det sig att 60 procent av alla beräkningar dessa utförde endast krävde uppskattning eller överslagsräkning (Northcote & McIntosh, 1999). Vi anser att detta resultat bör beaktas i skolans matematikundervisning. Det är också ett skäl till varför undervisning om räkning med bråk i algoritmer för de fyra räknesätten inte förbereder eleverna för möten med bråk i vardagen, där uppskattningar och överslagsberäkningar är nyckelförmågor.

7. Framhåll bråk som division

Föreställningen om bråk som division är vanligtvis inte så uppmärksammad (Clarke, 2006). Om vi uppfattar att en betydelse av 2/3 är "två dividerat med tre", kan olika strategier för att hantera uppdelningssituationer snabbt bli självklara. När vi uppmanar elever att skriva 3/7 i decimalform och uppmuntrar dem att på miniräknaren dividera 3 med 7 innebär det ironiskt nog att sambandet mellan bråk och division kommer till uttryck, men utan att vi förklarar det. 17/5 kan uttryckas som 3 ⅖ och elever brukar göra om det genom att dividera 17 med 5 – samma sak här.

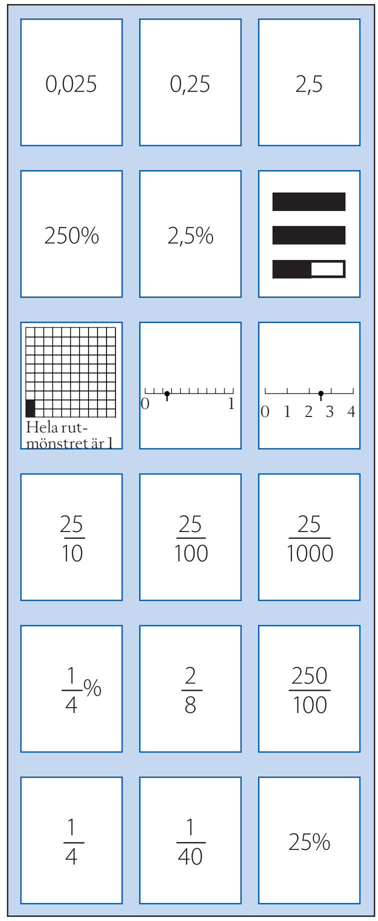
I våra intervjuer fick eleverna se en bild av fem flickor och tre pizzor, liknande den Lamon (2007) använde, och vi frågade, "Tre pizzor delades lika mellan fem flickor. Hur mycket pizza fick var och en?" Fastän 30,3 procent av sjätteklassarna svarade rätt (3/5), var det uppenbart att de flesta antingen ritade en bild eller delade upp pizzorna i huvudet för att beräkna delen, vilket tyder på att "3 uppdelat på 5 är 3/5" inte är en automatiserad förståelse utan måste beräknas med hjälp av uppdelning. Ett annat bekymmersamt resultat var att

11,8 procent av eleverna inte kunde angripa problemet. Elever behöver möta fler divisionsproblem och uttryckligen diskutera relationen mellan division och svaret i bråkform ($3 \div 5 = 3/5$ kan leda fram till generaliseringen att $a \div b = a/b$).

8. Lyft fram sambandet mellan tal i bråk-, decimal- och procentform så snart det är möjligt

Många elever väljer att göra om bråk till decimalform eller procent när de stöter på problem som innehåller bråk. Detta flexibla tänkande bör uppmuntras, då särskilt procent verkar vara intuitivt meningsfullt för många elever. Många forskare menar att tal i decimalform och procent borde introduceras betydligt tidigare än vad som vanligtvis är fallet (t ex Moss & Case, 1999).

Följande aktivitet (inspiration från Eggleton & Moldavan, 2001) kan hjälpa elever att se sambandet mellan bråk, tal i decimalform och procent. Ge varje elev ett kort och be dem ställa upp sig i en rad i storleksordning, från minst till störst (figur 6). Att storleksordna korten kan vara svårt för eleverna, men läraren kan naturligtvis anpassa svårighetsgraden till sin klass. Som vi har framhållit tidigare kan förmågan att översätta mellan tal uttryckta på olika sätt hjälpa elever att få en bättre förståelse av rationella tal.

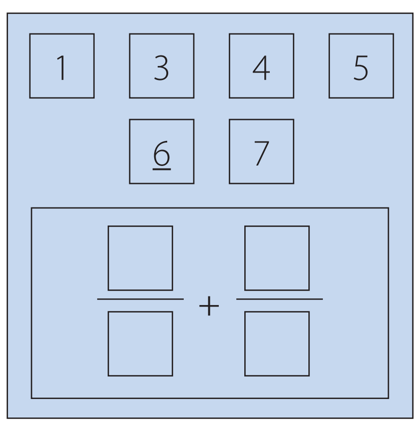


Figur 6. Kort för att koppla ihop bråk, tal i decimalform och procent.

9. Intervjua elever enskilt med utgångspunkt från uppgifter för att förstå deras tankar och strategier

Vi har diskuterat flera uppgifter som vi har använt i enskilda intervjuer som en del av vår forskning. Vi har också uppmanat lärare att pröva flera av dessa aktiviteter med sina elever. I så gott som alla fall har lärare rapporterat att intervjuer har varit speciellt användbart för att få insikt i elevernas sätt att tänka. I många fall ledde intervjuerna till större respekt för elevernas försök att komma underfund med bråk. Lärarna var ivriga att berätta om elevernas metoder för de andra eleverna och att uppmuntra dem att försöka använda dessa strategier på andra problem.

En av våra favorituppgifter, både i intervjuerna och som helklassaktivitet, är *Konstruera en summa* från ”the Rational Number Project” (Behr, Wachsmuth & Post, 1084). Eleverna ska ha kort med talen 1, 3, 4, 5, 6 och 7



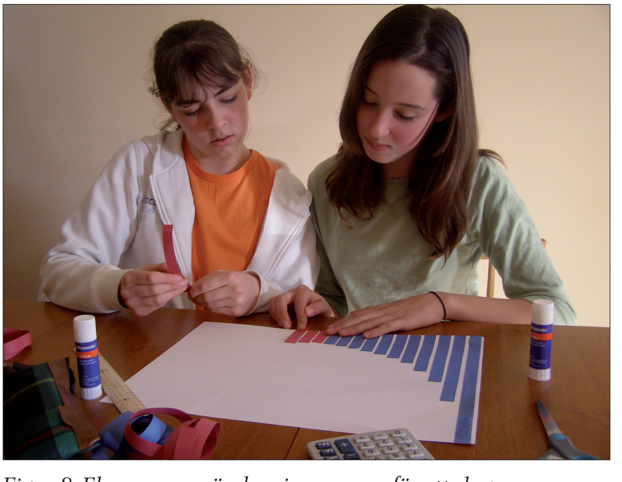
Figur 7. Konstruera en summa.

och en spelplan (figur 7). Uppgiften är att placera korten i rutorna så att summan är nära men inte lika med 1. Endast 25,4 procent av sjätteklassarna i vår studie lyckades skapa en summa mellan 0,9 och 1,1, med totalt 85 olika kombinationer. Dessutom skapade 24,4 procent av eleverna minst ett oegentligt bråk i sin lösning, vilket gör summan större än ett med ytterligare termer att addera. Det antyder kanske att förståelsen för oegentliga bråk är dåligt utvecklad. Uppgiften erbjuder stora möjligheter till diskussion av relativ storlek och till att ta upp elevernas förståelse av oegentliga bråk.

10. Leta efter exempel och aktiviteter som kan få elever att tänka kring bråk och om begreppet rationellt tal

Här beskriver vi översiktligt några av våra favoritaktiviteter.

Bråkhängbron (inspirerad av the New South Wales Department of Education and Training, 2003). Visa några bilder på olika sorters broar och foton på Golden Gate i San Francisco. Förklara för eleverna att de ska konstruera något liknande med hjälp av bråk. Ge varje par elever tre 60 cm långa pappersremsor och be dem fundera på hur man kan visa bråken 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10, 1/11 och 1/12, genom att klippa en remsa i mindre delar – förutsatt att hela remsan svara mot en hel. Varje elevpar ska sedan tillverka dessa bråk och skapa en hängbro tillsammans med ett annat par (figur 8). Denna aktivitet erbjuder både problemlösning och övning i att använda bråk som operatorer, t ex för att bestämma 1/6 av 60 cm. Elever är också, precis som vi var, intresserade av det visuella beviset för hur differensen mellan successiva stambråk minskar när man rör sig från 1/2 till 1/3 till 1/4 osv.



Figur 8. Eleverna använder sina remsor för att skapa en hängbro av bråk.

Cuisenairestavar (att gå mellan del och helhet, helhet till del och från del till del). Varje elevgrupp ska ha tillgång till en uppsättning cuisenairestavar för att lösa uppgifter som de följande:

- Vilken bråkdel av den bruna staven utgör den röda staven?
- Om den lila staven svarar mot 2/3, vilken stav utgör då en hel?
- Om den bruna staven är 4/3, vilken stav är då 1?
- Om den blå staven är 1 ½, vilken stav är då 2/3?
- Formulera en fråga till klassen.

Klistertal. Skriv ner tal i bråk-, decimalform eller som procent på post-it-lappar och fäst en lapp på ryggen på varje elev. Eleverna ska sedan gå runt och ställe en ja- eller nej-fråga i taget till varandra för att lista ut vilket tal de har på ryggen. Önskvärda frågor är sådana som utnyttjar referenspunkter ("är jag mindre än en halv?"), medan sådana frågor som separerar täljaren eller nämnaren ("är min täljare udda?") inte uppmanar till den typ av tänkande som vi eftersträvar.

Förstå operationer. Låt eleverna rita bilder och använda material för att ge mening åt och förklara följande operationer:
$1/2 + 1/3$; $1/2 - 1/3$; $1/2 \cdot 1/3$ och $1/2 \div 1/3$.

Sammanfattning

I denna artikel har vi försökt att peka på en del av de utmaningar som lärare och elever möter i undervisningen om viktiga aspekter av bråk. Vi har diskuterat stora idéer, redovisat resultat från våra intervjuer samt presenterat 10 forskningsbaserade praktiska uppslag att använda i klassrummet. Utifrån våra erfarenheter av olika kompetensutvecklingsprojekt är vi övertygade om att dessa idéer och förslag har stor potential att göra bråk levande och begripliga för elever.

REFERENSER

Ball, D. (1993). Halves, pieces, and twoths: constructing and using representational contexts in teaching fractions. I T. E. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (red), *rational numbers: an integration of research* (s 157–95). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M. J., Wachsmuth, I. & Post ,T. R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: a clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education 15* (November 1984), 323–41.

Behr, M. & Post, T.R. (1981). The effect of visual perceptual distractors on children's logical-mathematical thinking in rational number situations. I T. R. Post & M. Roberts (red), *Proceedings of the Third Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, s 8–16. Minneapolis, MN: University of Minnesota.

Carpenter, T. P., Kepner, H., Corbitt, M. K., Lindquist, M. M. & Reys, R.E. (1980). Results and implications of the second NAEP mathematics assessments: Elementary school. *Arithmetic Teacher 2* (April 1980), 10–13.

Clarke, D. M. (2006). Fractions as division: The forgotten notion? *Australian Primary Mathematics Classroom 11* (2006), 4–10.

Clarke, D. M., Roche, A., Mitchell, A. & Sukenik. M. (2006). Asssessing student understanding of fractions using task-based interviews. I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (red), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s 337–44). Prag: PME, 2006.

Cramer, K. A., Behr, M., Post, T. & Lesh, R. (1997). *Rational number project: Fraction lessons for the middle grades – Level 1.* Dubuque, IA: Kendall Hunt Publishing.

Eggleton, P. J. & Moldavan, C. C. (2001). The value of making mistakes. *Mathematics Teaching in the Middle School 7 (*Augusti 2001), 42–47.

Empson, S. (2002). Organizing diversity in early fraction thinking. I B. Litwiller & G. Bright (red), *making sense of fractions, ratios, and proportions, 2002 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*, (s 29–40). Reston, VA: NCTM.

Kieren, T.T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of the rational numbers. I R. Lesh (red), *Number and measurement: Papers from a research workshop*, (s 101–44). Athens, GA: ERIC/SMEAC.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press,.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. I F. K. Lester Jr (red), *second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s 629–68). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Litwiller, B. & Bright, G . (2002). *Making sense of fractions, ratios, and proportions, 2002 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).* Reston, VA: NCTM.

Lovitt, C. & Clarke, D. (1988). *The mathematics curriculum and teaching program professional development package: Activity bank, Vol. 1.* Canberra, Australien: Curriculum Development Centre.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: a new model and experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education 30* (March 1999), 122–47.

New South Wales Department of Education and Training. (2003). *Fractions: Pikelets and lamingtons*. Ryde, Australia: NSW Department of Education and Training.

Northcote, M. & McIntosh, A. (1999). What mathematics do adults really do in everyday life? *Australian Primary Mathematics Classroom 4* (1999), 19–21.

Pearn, C. & Stephens, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. I I. Putt. R. Faragher & M. McLean (red), *mathematics education for the third millenium: Towards 2010, Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Vol. 2*, 430–37. Sydney, Australien: Merga.

Post, T., Wachsmuth, I., Lesh, R. & Behr, M. (1985). Order and equivalence of rational numbers: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education 16* (Januari 1985), 18–36.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R. & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching and assessing of rational number concepts. I T. Carpenter, E.Fennema & T. Romberg (red), *Rational numbers: An integration of research*, s 327–61. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Roche, A. (2005). Longer is larger –or is it? *Australian Primary Mathematics Classroom 10 (2005)*, 11–16.

Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparison: their roles in the development of number sense and computational estimation." I J. Hiebert (red). *Number concepts and operations in the middle grades, Vol. 2* (s 182–97). Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Steencken, E. & Maher, C. A. (2002). Young children's growing understanding of fraction ideas. I B. Litwiller & G. Bright (red), *making sense of fractions, ratios, and proportions, 2002 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)* (49–60). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: a paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publications.