Tillegg til
Frode Rønning: Hvor mange kanter har en firedimensjonal terning?

Eulers formel i dimensjon *n*

Utgangspunktet er at en *n*-dimensjonal terning er definert ved de rekursive formlene i (1):

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
&S_n^{(0)} = 2S_{n-1}^{(0)} \\
&S_n^{(1)} = 2S_{n-1}^{(1)} + S_{n-1}^{(0)} \\
&S_n^{(2)} = 2S_{n-1}^{(2)} + S_{n-1}^{(1)} \\
&\ldots \\
&S_n^{(n-1)} = 2S_{n-1}^{(n-1)} + S_{n-1}^{(n-2)}.
\end{aligned}
$$

Formodningen er at en generalisert Eulers formel gjelder,

$$
(2) \qquad S_n^{(0)} - S_n^{(1)} + S_n^{(2)} - S_n^{(3)} + \ldots + (-1)^n S_n^{(n)} = 1.
$$

Vi vet at (2) gjelder for $n = 0$ fordi $S_0^{(0)} = V = 1$. For så vidt vet vi også at formelen gjelder for $n = 1, 2, 3, 4$, men det er ikke viktig nå. Anta at (2) gjelder for $n = k$, og la strukturen (1) ligge til grunn. Hvis man kan vise at (2) da også gjelder for $n = k + 1$, så vil induksjonsprinsippet gi at den gjelder for alle *n*. Ved å bruke summetegnet kan (2) skrives litt kortere slik:

$$
\sum_{i=0}^{n} (-1)^i S_n^{(i)} = 1.
$$

Anta altså at $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i S_k^{(i)} = 1$, og se på $\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i S_{k+1}^{(i)}$. Det gjelder da å vise at også denne summen blir lik 1. I utregningen brukes formlene (1) og det faktum at $S_i^{(i)} = S_j^{(j)}$. Denne størrelsen er faktisk lik 1 (antall komponenter av maksimal dimensjon), men akkurat det er ikke viktig. Utregningen går nå som følger.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i S_{k+1}{}^{(i)} &= S_{k+1}{}^{(0)} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i S_{k+1}{}^{(i)} + (-1)^{k+1} S_{k+1}{}^{(k+1)} \\
&= 2S_k{}^{(0)} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i \left[2S_k^{(i)} + S_k^{(i-1)}\right] + (-1)^{k+1} S_{k+1}{}^{(k+1)} \\
&= 2\sum_{i=0}^{k}(-1)^i S_k{}^{(i)} + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i S_k^{(i-1)} + (-1)^{k+1} S_{k+1}{}^{(k+1)} \\
&= 2 + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{i+1} S_k^{(i)} + (-1)^{k+1} S_{k+1}{}^{(k+1)} \\
&= 2 - \sum_{i=0}^{k}(-1)^i S_k^{(i)} + (-1)^k S_k^{(k)} + (-1)^{k+1} S_{k+1}{}^{(k+1)} \\
&= 2 - 1 = 1.
\end{aligned}
$$

- Formlene $S_{k+1}{}^{(0)} = 2S_k{}^{(0)}$ og $S_{k+1}{}^{(i)} = 2S_k{}^{(i-1)} + S_k{}^{(i-2)}$ fra (1) brukes i overgangen fra linje 1 til linje 2
- Fra linje 3 til 4 brukes antakelsen om at formelen holder for *k*. Dessuten gjøres en reindeksering i det andre summetegnet på linje 3
- I overgangen fra linje 5 til linje 6 brukes antakelsen en gang til.

Dette viser at med basis i strukturen gitt ved (1) så gjelder en generalisert Eulers formel som sier at den alternerende summen av antall komponenter er lik 1, altså $\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i S_{k+1}{}^{(i)} = 1$.

Summen av alle komponentene

For hver dimensjon, legg sammen alle komponentene (hjørner, kanter, flater osv.) som terningen i den aktuelle dimensjonen består av. Dette gir tallfølgen $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4$. Hypotesen blir da at summen av alle komponentene i dimensjon *n* er 3^n. Algebraisk kan det uttrykkes slik:

$$
(3) \qquad \sum_{i=0}^{n} S_n{}^{(i)} = 3^n .
$$

Denne hypotesen kan vises ved et induksjonsargument på helt tilsvarende måte som Eulers formel ble bevist. Vi vet at (3) er riktig for *n* = 0. Anta at den er riktig for *n* = *k*. Vi skal vise at da må den være riktig for *n* = *k* + 1. Anta altså at $\sum_{i=0}^{k} S_k{}^{(i)} = 3^k$, og husk at $S_i^{(i)}$ har samme verdi for alle *i* (den er lik 1). Utregningen blir slik:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} S_{k+1}{}^{(i)} &= S_{k+1}{}^{(0)} + \sum_{i=1}^{k} S_{k+1}{}^{(i)} + S_{k+1}{}^{(k+1)} \\
&= 2S_k{}^{(0)} + \sum_{i=1}^{k} \left[2S_k^{(i)} + S_k^{(i-1)} \right] + S_{k+1}{}^{(k+1)} \\
&= 2\sum_{i=0}^{k} S_k{}^{(i)} + \sum_{i=1}^{k} S_k^{(i-1)} + S_{k+1}{}^{(k+1)} \\
&= 2\sum_{i=0}^{k} S_k{}^{(i)} + \sum_{i=0}^{k-1} S_k^{(i)} + S_k{}^{(k)} \\
&= 2\sum_{i=0}^{k} S_k{}^{(i)} + \sum_{i=0}^{k} S_k^{(i)} \\
&= 3\sum_{i=0}^{k} S_k^{(i)} = 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Resonnementene som brukes underveis er nokså lik de som ble brukt for å vise Eulers formel. Dette viser da at $\sum_{i=0}^{n} S_n{}^{(i)} = 3^n$.