

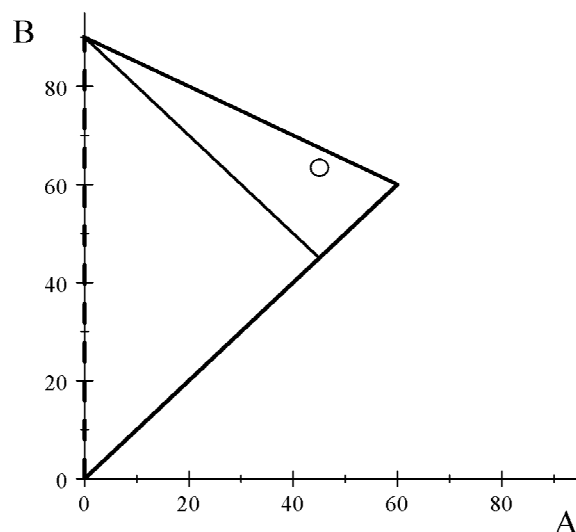
Tre metatrianglar

Den första metatriangeln – de två minsta vinklarna

En triangel har tre vinklar A , B och C , där vi kallar den minsta A , den största C och mellanvinkeln B . Låt oss utgå från A och B och eliminera C med $C = 180 - A - B$. Vi ritar upp en figur för alla tillåtna A och B , med A på x-axeln och B på y-axeln. Denna figur har då en punkt för varje möjligt värde på A , B och C , dvs för varje möjlig triangel, om vi inte skiljer på trianglar som är likformiga.

A är minst, så $A \leq B$ gäller. En begränsning är alltså linjen $A = B$. En annan begränsning är $B \leq C$, för B är mellanvinkeln och C är störst. Sätter vi in $C = 180 - A - B$ i olikheten $B \leq C$ så får vi villkoret $A + 2B \leq 180$, så vi ska vara på rätt sida av linjen $A + 2B = 180$. Den tredje begränsningen är $A > 0$, så linjen $A = 0$ är en tredje begränsning. Det är tre räta linjer. Då bildar mängden av alla möjliga vinklar A och B , som är en triangels två minsta vinklar, ... en triangel! Ritar vi ut linjerna $A = B$ och $A + 2B = 180$ så får vi figuren här intill. Vi har fått en figur där varje triangel kan placeras ut som en punkt. Figuren visar sig bli en triangel, som vi då kan kalla *en metatriangel*!

Linjen av rätvinkliga trianglar bildar en höjd i metatriangeln, linjen $A + B = 90$. Även metatriangeln är en triangel, så den är också en punkt som finns någonstans i sig själv. Den punkten kan vi kalla *metatriangelns öga* och är markerat med en ring i bilden här intill. Man kan räkna ut att den har sidorna $\sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$, 3 , som ger vinklarna $A = 45$, $B = 63.4$ och $C = 71.6$, så i figuren svarar metatriangeln mot punkten $A = 45$ och $B = 63.4$. Ögat är den punkt som avspeglar hela metatriangeln.

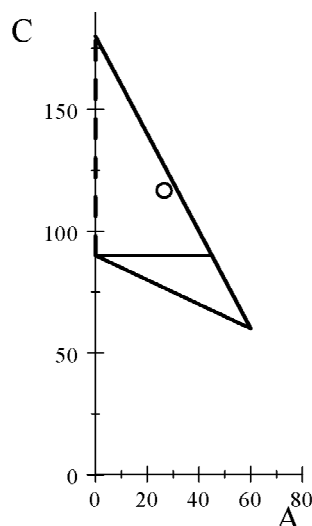


Den andra metatriangeln – den minsta och den största

Vi kan göra detsamma med den minsta och den största vinkeln, med A och C . Vi utgår igen från olikheterna $A \leq B$ och $B \leq C$, men vill nu eliminera B . Då ger $B = 180 - A - C$ de två olikheterna $2A + C \leq 180$ och $A + 2C \geq 180$. Ritar vi upp begränsningslinjerna $2A + C = 180$ och $A + 2C = 180$ så får vi den andra metatriangeln, se figuren till höger.

Den andra och den första metatriangeln är olika på flera sätt. I den andra finns de breda likbenta på den övre sidan, de smala likbenta på den undre, med den liksidiga där linjerna möts. De rätvinkliga svarar mot $C = 90$, helt enkelt. Det är en rät linje som är vinkelrät mot en sida, men det är inte en höjd, som det var för den första metatriangeln.

Den rätvinkliga linjen delar även här metatriangeln i två delar - de som har en trubbig vinkel och de som inte har det. Denna metatriangel har en trubbig vinkel, så dess öga är inte på samma sida om rätvinkliga linjen som den liksidiga triangeln. Sidlängderna har det inbördes förhållandet $4, 3\sqrt{3}, 8$, vilket (enligt cosinussatsen, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$) svarar mot vinklarna 25.6 , 34.1 och 120.3 grader. Detta är ganska nära en bred likbent, så ögat till denna metatriangel ligger nära sidan som innehåller alla breda likbenta trianglar.



Denna artikel är en bilaga till en artikel om metatrianglar i Nämaren nr 3, 2009. Det första stycket här intill är en kort resumé.

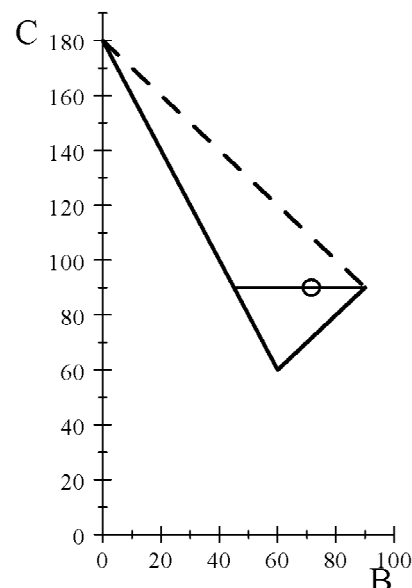
av Håkan Lennerstad
Blekinge Tekniska Högskola

Den tredje metatriangeln – de två största vinklarna

Den tredje metatriangeln beskrivs av B och C. Vi utgår igen från olikheterna $A \leq B$ och $B \leq C$, och vill nu eliminera A med $A = 180 - B - C$. Det ger $2B + C \leq 180$ och $B \leq C$ kvarstår. Vi har också gränsen $B + C < 180$, som är $A > 0$.

Linjen med de rätvinkliga är även här $C = 90$, det är inte en höjd här heller, liksom i den andra metatriangeln. Emellertid är denna metatriangel själv en rätvinklig triangel, den enda av de tre som är det. Det betyder att dess öga ligger på den rätvinkliga linjen $C = 90$. Sidorna har här det inbördes förhållandet 1, 3, $\sqrt{10}$, med vinklarna 18.4, 71.6, 90. Den är alltså inte en pytagoreisk triangel, då det finns kvoter mellan sidor som inte är rationella tal (man måste nästan formulera sig så här för triangeln $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, och $5\sqrt{2}$ har irrationella sidor men ju är ändå pytagoreisk – likformig med 3,4,5- triangeln...).

De breda likbenta är här på den vänstra begränsningslinjen, och de smala likbenta på den högra. Den halva kvadraten är en bred likbent triangel, så den finns där linjen för de rätvinkliga triangelarna möter den vänstra begränsningslinjen.

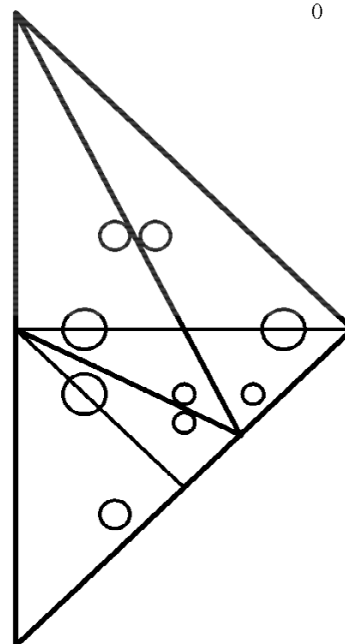


Tre metatrianglar bildar en trippeltriangel

Man kan pussla ihop de tre metatriangelarna till en enda triangel – till en *trippeltriangel*. Då möts de sidor i metatriangelarna som innehåller likbenta trianglar. I trippeltriangeln svarar varje triangel mot tre punkter, en i varje metatriangel. Utom de likbenta som svarar mot två punkter, för två av de tre sammanfaller där metatriangelarnas sidor möts. Den liksidiga är igen ett undantag, som befinner sig i endast en punkt, den enda punkt där alla tre metatriangelarna möts. Ett Trekröse!

Trippeltriangeln är en halv kvadrat. De två sista metatriangelarnas rätvinkliga linjer är inga höjder, men de bildar tillsammans en höjd i trippeltriangeln. Trippeltriangeln har den halva kvadraten mitt på den nedre sidan, i den första metatriangeln, och dessutom mitt på trippeltriangelns höjd. Eftersom trippeltriangeln själv är en halv kvadrat, kan vi säga att den har två egna ögon – ett yttre och ett inre.

Man kan sätta ut metatriangelarnas ögon i alla tre metatriangelarna. Då får trippeltriangeln ytterligare nio ögon. Det ser ut som i bilden här intill. Den första metatriangelns ögon markeras i figuren med små cirklar, den andra med större och den tredje, som är rätvinklig, med de största cirkarna, sammanlagt nio punkter.



Kuriosa

Dessa nio punkter har ingenting att göra med den sk *niopunkts-cirkeln*, som säger något om en triangel, vilken som helst. Det är faktiskt så att varje triangel har en cirkel på vilken inte mindre än nio punkter ligger: sidornas mittpunkter, höjdernas fotpunkter, och mittpunkterna på höjderna mellan respektive hörn och höjdernas gemensamma skärningspunkt. Men, som sagt, det är en helt annan historia!

En annat sällsamt triangelkuriosum är *Morleys mirakel*. Den bekräftar hur speciell den liksidiga triangeln är. Dra i en triangel från varje hörn två trisektriser – linjer som delar vinkeln i tre lika stora vinklar. Tre av trisektrisernas skärningspunkter, till "angränsande" trisektriser, kommer faktiskt då att bilda en liksidig triangel, oberoende hur den ursprungliga triangeln ser ut.

Litteratur

Lennerstad, H. (2009). Metatrianglar. *Nämaren* nr 3, 2009, NCM.

Lennerstad, H. (2007). *Commensurable and Rational Triangles*. Research Report no 2007:07, Blekinge Institute of Technology.

Tengstrand, A. (2005). *Åtta kapitel om geometri*, Studentlitteratur.

