Nämnaren
på nätet

Problem med nior

av Katalin Földesi
Universitetsadjunkt
Mälardalens högskola

I Nämnarens nr 1 2009, i problemavdelningen, kan man hitta följande problem som jag gav till mina studenter som inlämningsuppgift:

3606 Nior **Hur många nior finns det bland talen mellan 1 och 100? Mellan 1 och 1000? Kan du generalisera ditt resultat?**

a) Mellan 1 och 10 finns det ett enda tal med siffran 9 och det är 9 själv.

b) Bland de första 100 talen finns samma antal nior som bland de första 99 talen eftersom 0 och 100 inte har några nior. Hur många nior finns mellan 0 och 99?

I tabellen här intill är det lätt att se att nior endast finns i den sista kolumnen och i den sista raden. I den sista kolonnen finns det 11 nior inklusive 99 och i den första raden finns det ytterligare 9 nior. Tillsammans 20 nior.

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	...							
...									
...									
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

c) Från 1 till 1000 finns det 1000 tal. Dessa innehåller samma antal nior som alla naturliga tal mellan 0 och 999 eftersom 0 och 1000 inte har några nior. Vi skriver upp tabellen igen:

I den första delen av tabellen finns det 20 nior.
I den andra delen av tabellen där alla tal börjar med 1 finns det 20 nior.
I den tredje delen av tabellen där alla tal börjar med 2 finns det 20 nior.
...
I den tionde delen av tabellen finns det 20 nior som tiotals- och entalssiffra, dessutom 100 nior som alla dessa tal börjar med.
Sammanlagt är det $9 \cdot 20 + 20 + 100 = 300$ nior.

000	001	002	003	004	005	006	007	008	009
010	011	012	013	014	015	016	017	018	019
020	021	022	023	024	025	026	027	028	029
030	031	...							
...									
080	081	082	083	084	085	086	087	088	089
090	091	092	093	094	095	096	097	098	099
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
...									
...									
990	991	992	993	994	995	996	997	998	999

d) Från 1 till 10000 finns det 10000 tal. Dessa innehåller samma antal nior som alla naturliga tal mellan 0 och 9999 eftersom 0 och 10000 inte innehåller några nior. Vi kan fortfarande använda tabellmetoden.

I denna första del av tabellen finns det 300 nior. Sedan skriver man upp alla fyrsiffriga tal som börjar med 1. Bland dessa tal får man 300 nior igen. Sammanlagt 9 · 300 + 300 + 1000 = 10 · 300 + 1000 = 4000 nior.

0000	0001	0002	0003	0004	0005	0006	0007	0008	0009
0010	0011	0012	0013	0014	0015	0016	0017	0018	0019
...									
...									
...									
0999	0991	0992	0993	0994	0995	0996	0997	0998	0999

Och så vidare ... Man får följande talföljd:
1, 20, 300, 4000, 50000, ...
$a_n = n \cdot 10^{n-1}$ anger det n-te elementet i talföljden.
Det n-te elementet anger antalet nior bland högst n-siffriga naturliga tal.
I uppgiften finns också induktionsprincipen.

Alternativ lösning

Problemet har naturligtvis flera lösningar, en annan lösning får man om man skriver upp till exempel varje tal med högst fyra siffror i tabellen och då får man 10000 naturliga tal. Dessa tal innehåller 40000 siffror tillsammans. Nu kan man göra till exempel följande transformation:

Skriv 1 i stället för 0,
Skriv 2 i stället för 1,
...
Skriv 9 i stället för 8 och slutligen
Skriv 0 i stället för 9.

Då får man exakt samma tal i tabellen men i en annan ordning. Det betyder att alla siffror har exakt samma roll i tabellen. Men de ingående siffrornas antal är också detsamma då. Vi har 10 siffror. Antalet nior är då 40 000 : 10 = 4000.