



Speglingar

Uppgift 1

Två cirklar ligger på var sin sida om en rät linje. Sök på denna linje en punkt P , så belägen att vinkeln mellan tangenterna från P till respektive cirkel har den givna linjen som bisektris.

Uppgift 2

Konstruera en likbent triangel ABC , så att
1 *dess spets A är en given punkt på en given linje a ;*
2 *dess hörn B och C ligger på en given linje b respektive c ;*
3 *basen BC är vinkelrät mot linjen a .*

Uppgift 3: Ett klassiskt problem

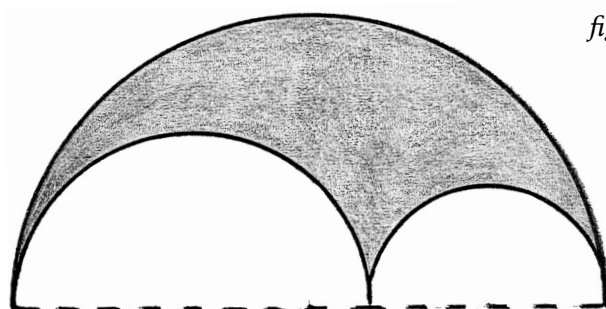
Figur 1 här intill visar konturen till ett verktyg som de forna grekerna använde, en skomakarkniv (arbelos). Konturen bildas av tre halvcirkelbågar som parvis tangerar varandra i respektive diametrars ändpunkter. Pappus (ca 290 - 350) härledde synnerligen vackra resultat beträffande de successiva cirklar som kan inskrivas i skomakarkniven, figur 2 nedan till höger. Vi ska här se hur inversion i planet leder till en elegant härledning.

Bevisa ett av Pappus främsta resultat, formeln $nd_n = h_n$ där d_n är diametern i den n :te inskrivna cirkeln C_n och h_n är avståndet från denna cirkels medelpunkt ner till diametern AB i figur 2.

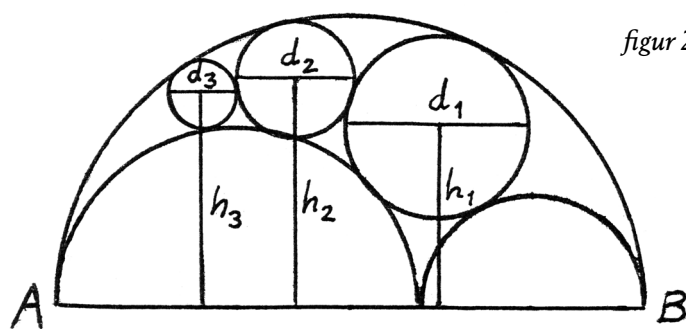
Som inversionscirkel γ väljer vi den cirkel som har centrum i A och skär cirkeln C_n under räta vinklar. Eftersom de två större halvcirkelarna går genom inversionscentrum A , avbildas de på räta linjer. Dessa är liksom halvcirkelarna vinkelräta mot diametern AB och går således parallellt. I figur 3 är C_0 den minsta givna halvcirkeln och cirklar med högre index än 2 utelämnade. Vid inversionen bevaras tangering, varför C_0 och de två inskrivna cirklarna avbildas på cirklar i det parallellband som speglingen av de två större halvcirkelarna alstrar.

Cirkeln C_2 , som är ortogonalcirkel till γ , avbildas på sig själv och tangerar såväl C_1 som de två parallellerna. Av figuren framgår att avståndet h_2 från medelpunkten för C_2 till diametern AB är 2 gånger parallellbandets bredd, dvs $2d_2$. Beviset fungerar på samma sätt för andra n -värden.

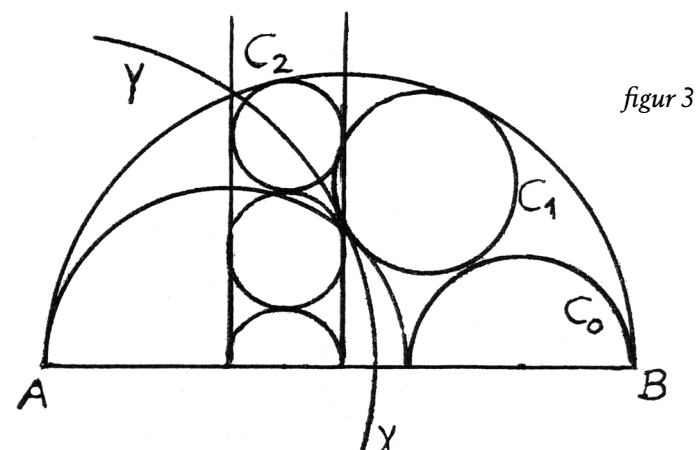
I Nämnamnaren nr 2, 2009 finns en artikel om speglingar av Bengt Ulin som anknyter till de uppgifter du hittar här.



figur 1



figur 2



figur 3