Anette Jahnke

På hal is med Bambipedagogik

Detta är en fortsättning på artikeln *Varför förenkla när vi kan förkrångla?* i Nämnaren 4, 2008. Författaren delar med sig av fler aktiviteter i klassrummet och avslutar med reflektioner kring sin egen undervisning.

Här presenterar jag ytterligare exempel på klassrumsaktivteter som jag genomfört i min undervisning vid Hvitfeldtska gymnasiet och i slutet av artikeln görs ett försökt till att reflektera över hur jag ser på den tid som jag har till förfogande som lärare. Även om aktiviteterna kan te sig spontana är de välplanerade och baserade på erfarenheter av elevers reaktioner i liknande situationer, men jag håller alltid dörren öppen för nya infallsvinklar som kan berika lektionen och sedan kanske blir uppslag för en helt ny lektion. Alla aktiviteter innehåller en dos av hjärtlig provokation, med syfte att leda eleverna mot nya upptäckter. Eleverna provocerar också mig och leder mig vidare i min utveckling som lärare, vilket följande episod ger exempel på.

Resonemang och bevis

I den första klassen jag undervisade på gymnasiet satt det alltid en elev längst fram och frågade upprepade gånger under tiden jag gick igenom ett bevis:

– Är beviset färdigt nu?
– Nej, svarade jag för femte gången.

När beviset verkligen var klart, var jag tvungen att upplysa eleven om detta och då såg eleven alltid lika förvånad ut. Detta har gjort att jag lägger stor vikt vid att tala *om* satser och bevis. Det är viktigt att uppmärksamma eleverna på att det är svårt. Dels innebär det att kunna *läsa och tolka* en sats och dess bevis, dels innebär det att klara av att *använda* satser för att lösa problem. Detta är två olika kompetenser som eleverna måste öva.

Den tecknade serien Simpsons producent har gjort en liknelse mellan att lyckas genomföra ett bevis med att få till en riktigt bra "punchline". I samband med att jag tog upp Simpson, tipsade eleverna om ett avsnitt där Simpson går från att vara en tvådimensionell tecknad figur till att vara tredimensionell. Episoden fanns naturligtvis på YouTube[1] och rekommenderas varmt – efteråt kan man diskutera hur en kub i fyra dimensioner skulle kunna se ut!

Elevernas idéer och problem är ett ständigt inslag på lektionerna. Här är ett problem från en elev som lämpar sig vid träning i att resonera:

[1] … men är numera bortagen, DVDn kostar 49 kr, avsnittet heter Homer^3

Det var en gång ett folkslag som levde på en ö. De hade en mycket konstig lag som gick ut på att alla som hade en röd prick i pannan var tvungna att lämna ön. Fast det var förbjudet att tala om för någon att den hade en prick i pannan och det fanns heller ingen möjlighet att spegla sig. En dag kom en forskningsresande till ön. På ön fanns då tre personer förutom forskaren, och alla hade prickar i pannan! Forskaren fick höra deras lag, och eftersom han inte ville tvinga någon att lämna ön så talade han inte om att alla hade prickar. Men så tänkte han, det kan väl inte skada om jag säger att åtminstone en av er har en prick. Hur många dagar tog det innan alla hade lämnat ön?

En del av kurs B är *bevis* och jag brukar inleda med att tala om Euklides. Pythagoras sats hamnar naturligtvis i fokus, fast då på olika sätt:

- Något som nästan är intressantare än Pythagoras sats är *omvändningen*[2] till Pythagoras sats, dvs givet tal *a*, *b* och c som uppfyller $a^2 + b^2 = c^2$ så är triangeln med sidorna *a*, *b* och *c* rätvinklig! Visst är det märkligt. Beviset i Euklides *Elementa* går faktiskt att förstå.
- Har jag $a^2 + b^2 = c^2$ på tavlan kan man fråga sig vilka heltal uppfyller en sådan ekvation? Går det att illustrera *alla* tal som uppfyller t ex $a^2 + b^2 = 1$?
- Jag kan lätt komma in på Fermats sista sats, som säger att det inte finns heltal som uppfyller någon av ekvationerna $a^3 + b^3 = c^3$, $a^4 + b^4 = c^4 \dots a^n + b^n = c^n$ (förutom de triviala lösningarna när t ex $a = 0$). Problemet med att hitta ett bevis för detta gäckade matematiker i flera hundra år tills Andrew Wiles lyckades 1997. Jag brukar visa Simon Singhs prisbelönta film *Fermat's Last Theorem* om Wiles bedrift. Filmen handlar om matematik och matematiker men också om drömmar, ambition, besatthet, passion, misslyckande och revansch[3].
- Det är också intressant att visa några "falska" bevis som baserar sig på att man med geometri lurar ögat. Se till exempel Strävorna, *Pyssel med Pythagoras*[4].

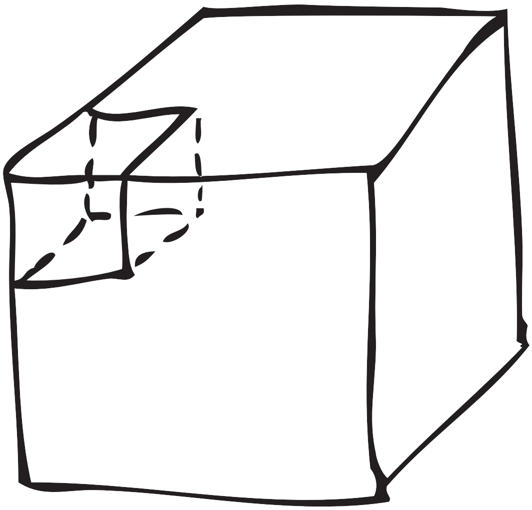
Eleverna brukar arbeta med att geometriskt troliggöra att $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Vid ett sådant tillfälle råkade min blick falla på en av elevernas anteckningsblock när jag passerade mellan bänkraderna.

Hon hade tecknat en kub ungefär så som på bilden på nästa sida.

[2] Detta ord behöver förklaras och finns definierat i ett underbart avsnitt om Matematisk argumentation i den nya boken *Matematiktermer för skolan*.

[3] http://www.simonsingh.com/The_TV_Film.html

[4] http://ncm.gu.se/media/stravor/6/c/kompletteringpythagoras.pdf



Underbart! Genast utvecklades uppgiften till att eleverna skulle undersöka om de geometriskt kunde troliggöra $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$. Tillgång till laborativt material underlättar arbetet med denna uppgift. Likheten $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$ kan jag sedan använda när jag introducerar komplexa tal. Det var faktiskt detta uttryck som matematikern Tartaglia använde sig av när han lyckades lösa en viss typ av tredjegradsekvationer år 1539. Han avslöjade lösningen i form av en dikt för läkaren och matematikern Cardano. Han lyckades i sin tur ta fram formler för alla typer[5] av tredjegradsekvationer. För $x^3 + cx = d$ är t ex formeln:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}}$$

När jag skriver upp denna formel på tavlan pustar eleverna ut av tacksamhet när jag säger att på gymnasiet nöjer vi oss med att lära oss använda formeln för andragradsekvationen. Cardanos formel satte myror i huvudet på folk även på 1500-talet, för om $x^3 = 15x + 4$, då blir

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Roten ur ett negativt tal!?!

Värre blir det, för samtidigt kan man se att 4 är en lösning till ekvationen. Kunde det verkligen vara så att:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4?$$

Jo, visst var det så, men det tog många hundra år innan man fick ordentligt grepp om både negativa tal och komplexa tal.

Varför?

Jag har olika sammanhang träffat på uppfattningen *Ja, ja, matematiken den gick väl bra i skolan … men jag förstod aldrig vad den gick ut på.* Men det finns faktiskt ett system med definitioner, axiom, satser och bevis som gör att vi kan bygga ny matematik – ”reglerna” i matematik är inte slumpmässiga. Ett historiskt perspektiv fanns med här vilket även finns med i nästa laboration, fast man kanske inte ser det i första anblicken.

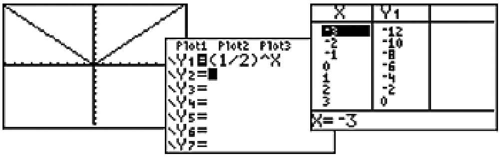
[5] Det fanns olika typer eftersom som man inte kunde handskas med negativa koefficienter.

Samband mellan graf, funktionsuttryck och värdetabell

Eleverna får papper med grafer, uttryck och värdetabeller huller om buller. Uppgiften är att para ihop en graf med rätt värdetabell och rätt funktionsuttryck. Bilderna är tagna från en grafräknares fönster. Eleverna jobbar i par och kan om de vill använda sax för att lättare dela in bilderna. Efter tio minuter …

– Anette, det går inte jämnt upp, klagar eleverna.
– Ojdå, har jag glömt något? Då får ni rita dit en egen bild på det som fattas, säger jag.

Efter ytterligare en tid …



– Du, Anette, vad är ”abs” för något?

Jag har valt att ta med absolutbeloppet som funktion. Grafräknaren har en inbyggd funktion för detta där man kan skriva in $Y = \text{abs}(X)$.

– Tja, vad gör den funktionen då? Har ni någon graf eller tabell till denna?

Efter en del jobb kommer de fram till vilken tabell och graf som borde höra till $Y = \text{abs}(X)$.

– Kan ni med ord beskriva funktionen? frågar jag.

En del elever säger att den alltid ger ett positivt värde. Jag frågar då vad en sådan funktion skulle kunna beskriva. En del ger förslag på tid eller avstånd. Uppgiften fortsätter:

– Nu springer vi ju inte omkring i matematiken och skriver Abs(x), vi behöver ett riktigt funktionsuttryck! provocerar jag. Kan ni ta fram detta?

Detta är en svår uppgift. Vissa försöker förgäves rita in två räta linjer i grafräknaren vilket resulterar i två räta linjer som skär varandra som ett kors i origo. Några kommer fram till att de måste skriva ner två uttryck. Detta leder till diskussioner om man får detta eller inte – vilket historiskt sett inte var en självklarhet[6]. Det finns de elever som skriver in $Y = \sqrt{(x^2)}$ på räknaren, vilket leder till diskussion om rottecken och dess lagar. Jag låter sedan eleverna parvis jämföra sina lösningar med varandra tills alla är övertygade om vilka grafer, tabeller och uttryck som hör ihop.

Varför?

Jag vill att de matematiska begreppen ska bli ”fylliga” och inte reduceras och förenklas. Genom att diskutera vad en funktion både kan *och* inte kan vara och hur de kan representeras ger det eleverna perspektiv. Dessutom kan jag återkomma till absolutbeloppet när vi tittar på derivatan. Absolutbeloppet är ju

[6] Begreppet funktion i historisk belysning, Johan Häggström, Normat 53:2 (2005).

ett mönsterexempel på en funktion som *saknar* derivata i en punkt. Uppgiften manar också till diskussioner mellan elever vilket utvecklar deras förmåga att kommunicera om och med matematik. Ett annat sätt att kommunicera matematik är via texter som är i fokus i nästa aktivitet.

Vad är derivata, integral och differentialekvation?

När det är dags för Kurs E, ska eleverna åter möta derivata, integraler och differentialekvationer. Första lektionen brukar jag be eleverna att skriva ner förklaringar på dessa begrepp. De jobbar i par vilket resulterar i 15 förklaringar av varje. Jag sammanställer och kopierar. Under kursens gång inleds varje avsnitt med att de ska läsa igenom de 15 förklaringarna av t ex integraler. Därefter får de berätta vilken som är deras personliga favorit och varför.

Varför?

Måste vi läsa? frågar mina elever. Ja, det ingår i ett matematikkunnande. Läsa matematisk text är undervärderat. Att ge eleverna möjlighet att på olika sätt kommunicera matematik är viktigt. När det står LÄS & LÖS på tavlan vet mina elever att de ska jobba i läroboken med att just *läsa teorin och lösa uppgifter.* En annan utmaning för eleverna är att tolka en problemsituation och omformulera den i matematiska termer, vilket görs i nästa aktivitet.

Telia uppringt modem – att tolka en problemsituation

I samband med att vi introducerar funktioner i Kurs A får alla i klassen ett utdrag från Telias webbplats.

Priser - Telia Internet 020

Ett prisvärt, uppringt modemabonnemang. Koppla upp dig mot internet via samma telefonnummer, oavsett var du befinner dig. Priset gäller tillsvidare och endast vid beställning via webben. Samtliga priser är inklusive moms.

Ordinarie erbjudande: förbetalt internetabonnemang

Kvartalsvis betalning	72 kr
12 månader	288 kr
24 månader	488 kr
36 månader	648 kr
Månadsabonnemang *	24 kr per månad

Därefter följer, för samtliga förbetalda abonnemang, ett förmånligt förlängningserbjudande.

Minutavgift:

Mån-fre, 08.00-18.00:	23 öre per minut
Övrig tid:	11,5 öre per minut
Öppningsavgift	45 öre

**) 12 månaders bindningstid*

– Hur mycket kostar det per månad för mig att surfa? Jag har ett uppringt modem.[7]
– Öööö ... va´ menar du? Vad menar hon? Det beror ju på ... Det beror ju på hur mycket du surfar? svarar eleverna förvirrat.

Precis! *Det beror på* – kärnan i funktionsbegreppet.

– Kan ni beskriva för mig hur mycket det kommer att kosta mig per månad? Som hjälp kan ni använda ord, tabell, graf eller kanske ett uttryck, säger jag.

Naturligtvis dröjer det inte länge förrän följande fråga dyker upp:

– När surfar du? frågar någon.

[7] Detta var ett par år sedan, idag har ju alla bredband.

– Efter åtta på kvällen då mina små barn somnat, svarar jag.
– Hur många gånger kopplar du upp dig då? frågar eleven.
– Ja, hmm … vad är rimligt? Detta måste vi försöka uppskatta. Har jag snälla barn som sover hela kvällen tror ni? frågar jag.

Eleverna får själva resonera kring antal uppkopplingar jag kan tänkas behöva göra. Vissa gör olika tabeller för 15, 30, 45 uppkopplingar. En av eleverna resonerar så här:

– Var sover barnen? frågar eleven.
– På ovanvåningen, svarar jag förvånat.
– Var är datorn? fortsätter han.
– På samma våning, svarar jag.
– Ja, men då har du nästan fyra minuter på dig att stoppa in nappen. Det hinner du göra. En uppkoppling per dag är rimligt, svarar eleven bestämt och jobbar vidare.

Nästa lektion täcks tavlan med deras förslag på lösningar, där ord, grafer, tabeller och uttryck samsas. Vi sätter x till antal minuter jag surfade och kostnaden till y kr och relativt fort kommer då uttryck upp på tavlan av typen $y = 24 + 0{,}115x + 15$ eller $y = 24 + 0{,}115x + 30$. Någon ger förslag att vi kan skriva

$$y = 24 + 0{,}115x + a$$

där a står för antalet gånger man kopplar upp sig varje månad.

Varför?

Avsikten var att klä funktionsbegreppet med en ”verklig” kontext och att öva eleverna att tolka en text. Jag ville även att eleverna skulle träna på olika representationsformer och om möjligt avdramatisera användningen av x och y. Uppgiften aktiverade eleverna men dess relevans kan man diskutera, det är svårt att skapa meningsfulla tillämpningar på ett specifikt matematikinnehåll. Problemet har alltid påmint mig om att våga ställa höga förväntningar på elever. De kan mer än vi anar. I uppgiften klarade de av att diskutera en funktion med två variabler! Här fanns ett utrymme för eleverna att upptäcka sätt att beskriva ett samband med hjälp av matematik vilket även är innehållet i nästa laboration.

Elevernas metoder

Inför avsnittet kring ekvationssystem i Kurs B tar jag med en kartong med smala, långa ljus och ett tjockt ljus som jag ställer på katedern.

– Om jag tänder ett smalt ljus och det tjocka ljuset – när är de lika långa?

Därefter är jag knäpptyst. Efter tio minuter utbrister eleverna – det går inte att lösa! Men de har funderat ut vad de vill veta, nämligen brinntiden och hur långa ljusen är. Jaha, säger jag och dinglar med benen där jag sitter på katedern. Förr eller senare brukar någon komma på att resa sig ur stolen och långsamt hasa sig fram och titta på kartongen. Information!

Eleverna jobbar i par och presenterar sina lösningar på tavlan. Vi jämför och diskuterar. Det mest intressanta tycker jag är att man ofta får fram alla de tre ”standardmetoderna” för att lösa ett linjärt ekvationssystem – grafisk metod, substitutionsmetod och additionsmetod.

Varför?

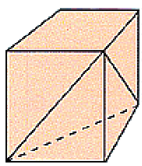
Denna uppgift lämpar sig för att eleverna själva ska upptäcka ekvationssystem. Den tvingar dem även att fundera över vad de behöver veta för att lösa uppgiften. Elevernas olika lösningssätt kan man använda när man arbetar vidare med ekvationssystem – grafisk metod blir då Eriks metod, substitutionsmetoden blir Elins metod osv. Att uppmärksamma det eleverna gör är givande för klassen som helhet. Uppgiften ovan kanske även kan ses som problemlösning, vilket nästa aktivitet handlar om.

Bambipedagogik

Vid något tillfälle brukar jag diskutera problemlösning med mina elever. Hur brukar de göra? Hur brukar jag göra? Som en del av detta brukar jag välja ett problem ur någon lärobok (t ex problemet här bredvid) som jag inte har en aning om hur jag ska lösa. Sen presenterar jag det för eleverna och säger att detta problem kommer jag att försöka lösa under några veckor. Jag känner mig ungefär som Bambi ute på hal is och varje lektion snor jag åt mig fem minuter för att försöka finna en lösning. Vissa elever engagerar sig och hjälper till, andra skakar på huvudet.

Kluvet rätblock

Om man klyver ett rätblock enligt figuren får man en del som har formen av en pyramid med fyra plana ytor. Finn ett enkelt samband, som är lätt att minnas, mellan de fyra delytornas areor!



Varför?

Ibland blir allt så tillrättalagt och välpolerat på lektionerna och i läroböckerna. Problemlösning innebär ju att man bökar, stökar, blir förtvivlad, manisk och till slut väldigt väldigt nöjd när man finner lösningen. I många år beskrev jag min egen problemlösningsmetod som att jag cirkulerade runt i ett hjul: försöker förstå problemet, utformar en plan, genomför planen – men då, mitt uppe i att utföra planen, går jag bet och får börja om med att försöka förstå problemet igen. Nyligen insåg jag att denna beskrivning ekar av ensamhet. Knäcker jag inte ett problem så tar jag kontakt med fler elever, kollegor eller en vän så hjälps vi åt. Man behöver ju egentligen inte vara rädd för att ge sig ut på den där isen – man är aldrig ensam! I det ovanstående problemet kan man även låta sig inspireras av en gammal kollega, nämligen Pythagoras[8].

Sammanfattning

Hur får jag tid till det jag beskriver? Jag tror det beror på främst tre faktorer:

[8] Det samband som efterlyses i uppgiften är en generalisering av Pythagoras sats.

För det första, jag går inte igenom allt som står i läroboken. De genomgångar jag har är mer av sammanfattande karaktär för att presentera vad avsnittet går ut på. Sen lämnar jag delar åt eleverna att själva jobba med detta på lektion och hemma. Att jag vågar göra så grundar sig i två inställningar jag har. Den första handlar om det sagda ordets betydelse. Jag misstänker att det finns en övertro till det sagda ordet. Att jag sagt något betyder det inte att eleverna uppfattat det, än mindre förstått. Jag behöver inte nödvändigtvis gå igen ett begrepp muntligt utan det kan komma upp i samband med ett problem eller en laboration. Den andra inställningen är att jag har höga förväntningar på eleverna – jag litar på att de kan klara av att lära sig matematik. De kan mer än vi tror och jag vet att de har mycket att bidra med som kommer att utveckla lektionerna. Visst kräver dessa inställningar att jag har is i magen och noga kollar om alla hänger med. I en del klasser har jag varit tvungen att dra i handbromsen och noggrannare gå igenom ett avsnitt för en mindre grupp av klassens elever.

Den andra faktorn är att om jag *inte* varierar undervisningen blir jag uttråkad och då är jag ingen bra lärare. Jag, precis som mina elever, måste känna att undervisningen är intressant och meningsfull.

Tredje faktorn är att jag har använt mig av principen: *ett litet steg i taget* när jag utvecklat min undervisning. Som nyanställd lektor blev jag i början matt av alla goda förslag jag fick från olika håll. För varje nytt läsår har jag reviderat min undervisning och successivt utvecklat den. Jag har valt att ha en lärobok i botten, som fungerar som ett stöd och kompletteras med andra aktiviteter – inte minst med elevernas egna frågeställningar.

Utan mer djupgående analys är mitt intryck från de utvärderingar mina elever gjort av undervisningen genom åren att orden ”intressant och svårt” är det mest frekventa omdömet. Precis de orden skulle jag välja för att beskriva hur det är att undervisa i matematik – intressant och svårt.

LITTERATUR

Persson, P.-E. (2008). En glimt från Mr Mxyzptlks värld. *Nämnaren*, 35 (1), 37–41.

Häggström, J. (2005). Begreppet funktion i historisk belysning. *Normat* 53:2.

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2009). *Matematiktermer för skolan*. Göteborgs universitet, NCM.