

Facit till Fraktaler – en fråga om upprepning

I Nämnaren nr 4, 2008 finns en artikeln med uppgifter.

1.

a) $a_n = 2^{n-1}$

b) $L_n = (2/3)^{n-1}$

c) $a_n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$ och $L_n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$.

d) Då delsträckorna till slut blir oändligt många, blir samtidigt deras sammanlagda längd noll.

2.

a) $A_n = a_n s_n = 8^{n-1} \left(\frac{1}{3^{n-1}} \right)^2 = 8^{n-1} \left(\frac{1}{3^2} \right)^{n-1} = \left(\frac{8}{9} \right)^{n-1}$

b) 0,702...

c) Ekvationen $(8/9)^{n-1} = 1/2$ har den approximativa heltalslösningen $n = 7$, som man finner genom provning eller med hjälp av logaritmer.

d)



3.

a) $a_n = 3^{n-1} \Rightarrow a_{10} = 19\,683$ stycken.

b) Låt v_n vara antalet vita trianglar i figur n .

$$v_1 = 0$$

$$v_2 = 1$$

$$v_3 = 1 + 3$$

$$v_4 = 1 + 3 + 3^2$$

$$v_5 = 1 + 3 + 3^2 + 3^3$$

...

$$v_n = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-2}$$

Den geometriska summan:

$$s_n = a \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

där a är första termen, k den konstanta kvoten och n antalet termer.

I denna beräkning får dessa konstanter följande värden:

$$a = 1$$

$$k = 3$$

$$n = n - 1$$

Vi får det allmänna uttrycket:

$$v_n = 0,5(3^{n-1} - 1) \Rightarrow v_{10} = 9\,841 \text{ stycken vita trianglar.}$$

4.

a) $a_n = 4 \cdot 8^{n-1}$

b) $s_n = 1/4^{n-1} = 4^{1-n}$

c) Provning ger: figur 8.

d) $L_n = a_n s_n = 2^{n+1}$

e) Antalet sträckor blir fort ett stort antal. Sträckorna längd minskar däremot hela tiden och detta medför att den totala längden blir liten jämfört med antalet. Dock, efter gränsövergång blir de lika stora, båda blir oändligt stora.

f) Provning ger: figur 22.