



Nämnnaren *TEMA*

Matematik – ett kärnämne

Elevers och lärares erfarenheter

Att utgå från elevers kunskande

Elevers och lärarens ansvar

Utvärdering av kunskaper

Undersökande aktiviteter

Matematik i samverkan

Att utgå från problem

Att organisera för lärande

**Kursplaner, timplaner, betygskriterier
och exempel på ett nationellt prov**



Nämnnaren
NCM, Göteborgs universitet

Matematik – ett kärnämne

Matematik – ett kärnämne behandlar grundläggande matematikutbildning i gymnasieskolan. Boken tar upp elevers och lärares syn på matematik och matematikundervisning. I varje kapitel finns exempel på elevaktiviteter och studieuppgifter med litteraturförslag. Kursplaner, timplaner, betygskriterier och ett nationellt prov ingår som bilagor.

Medverkande

Elisabeth Aasa, Roland Aronsson, Agneta Beskow, Margareta Bladh,
Kenneth Borg, Göran Emanuelsson, Susanne Gennow, Ing Marie Gustafsson,
Bo Hansson, Hans Heikne, Hans Henriksson, Mikael Holmquist,
Johan Häggström, Bengt Johansson, Eva Jungmark, Karin Kristersson,
Eva-Stina Källgården, Krister Larsson, Lisbeth Lindberg, Madeleine Löwing,
Margita Nilsson, Kerstin Olofsson, Gull Olsson, Astrid Pettersson,
Ulf Peterson, Bo Rosén, Ilse Rossi, Ronnie Ryding, Sonja Sannesson,
Marie Skedinger Jacobsson, Tore Selander, Lennart Wendelöv.



NCM
Nämnamn
Göteborgs universitet

I samband med den nya läroplanen i gymnasieskolan Lpf 94, hade Skolverket ett projekt för att ta fram material med syfte att diskutera den inledande matematikundervisningen och uppmärksamma

- målsättningen för kärnämnet matematik,
- elevernas erfarenheter av och sätt att lära matematik,
- metodik och arbetssätt.

Materialet gör inga anspråk på att vara heltäckande. Erfarenhetsmässigt betydelsefulla områden har valts ut av de medverkande i projektet. Elev- och studieuppgifter är avsedda som underlag för diskussion kring frågor om hur vi får bättre utbyte av utbildningen i matematik.

Projektledning

Gull Olsson
Göran Emanuelsson
Bengt Johansson

Redaktion

Göran Emanuelsson, Bengt Johansson,
Margita Nilsson, Gull Olsson,
Bo Rosén & Ronnie Ryding

Omslag Ronnie Ryding

© 1995 Författarna och Nämnen
ISBN 91-88450-04-X Upplaga 1:12

Tryck:

Grafikerna Livréna i Kungälv AB. 2006.

Adresser

NCM/Nämnen
Göteborgs universitet
Box 160
405 30 Göteborg

Fax. 031-773 22 00

e-post:

Namnaren@ncm.gu.se

Innehåll

Medverkande 6

Matematik – ett kärnämne 7

- En förändrad skolmatematik 7
- Arbete med stöd- och stimulansmaterial 7
- Matematik ett kärnämne 8
- Materialets användning. Resurspersoner 9
- Skolutveckling 10
- Kompetensutveckling 10
- Utveckling av kursplaner 10
- Litteratur 10

Kapitel 1

Elevers och lärares erfarenheter 11

- Vad händer under lektionerna? 12
- Varför har vi hemuppgifter? 13
- Glädjen när eleverna förstår 14
- Är matematik det svåraste ämnet? 17
- Litteratur 18

Kapitel 2

Att utgå från elevers kunskande 19

- Förkunskaper och erfarenheter 19
- Diagnosresultat 21
 - Några frågor 22
 - Stimuleras elever med goda kunskaper? 22
 - Vad säger en poängsumma? 22
 - Vilka kunskaper kommer inte fram? 22
 - Visar resultaten på förståelse? 23
 - Hur kan eleven utveckla sin matematik? 24
- Hur tänkte jag? 25
- Meningen med matematik 26
 - Procent – ett av flera nyckelbegrepp 28

Symbolspråk och förståelse 31

- Formler 31
- Ekvationer 31
- Litteratur 33

Kapitel 3

Elevers och lärares ansvar 35

- Dubbla budskap 36
- Att lösa en uppgift i boken 36
- Vem bestämmer? 37
- Elever kan ta ansvar 38
- Att sätta mål för studierna 38
 - Exempel på näraliggande mål 39
 - Ansvar och val 40
- Utvecklingssamtal 41
- Sammanfattning 42
- Litteratur 45

Kapitel 4

Utvärdering av kunskaper 47

- Kontinuerlig utvärdering 47
- Prov som styr 47
- Portföljer 48
- Dagbok 49
- Kunskapsmatriser 51
 - Småtest 53
 - Exempel på uppgifter 54
- Problemlösning 57
 - Provvuppgifter 57
 - Projekt 58
 - Problemlösning i grupp 60
- Föredrag och uppsatser 61
 - Individuella samtal – intervjuer 62
- Litteratur 63

Kapitel 5

Undersökande aktiviteter 65

Laborativa uppgifter 66

Undersökningar i grupp 68

Att söka information 74

Miljöpåverkande faktorer: Trafik 70

Att finna mönster 71

Att simulera 71

Att göra uppgifter 72

Grupsammansättning 73

Litteratur 75

Kapitel 6

Matematik i samverkan 77

Matematik i karaktärsämnen 79

Matematik i fordonsprogrammet 81

Förutsättningar 81

Arbetsorder 82

Tid 83

Area och tryck 85

Årskursplaner 85

Problemlösning 87

Olika typer av prov 87

Vad ansåg elever och lärare? 88

Linjära funktioner i matematik och företagsekonomi 89

Ett inledande exempel 89

Intäkter, kostnader och resultat 93

Kritisk punkt 95

Några förslag till temaområden 97

Dropande kran 97

Sänk temperaturen 98

Energiprognos 98

Spara 98

Låna 99

Köpa dator 100

Är det dyrt att ha djur? 100

Körkort och bil 100

Resa i Egypten – något för humanister? 102

Matematikens historia 103

Spel 104

Litteratur 104

Kapitel 7

Att utgå från problem 107

Problemlösning som mål 107

För att komma i stämning... 108

Olika typer av problem 109

Undervisning om/i problemlösning 110

Att utgå från problem 112

Problemlösning som medel 112

Rika problem 112

Undervisningsmetodik 112

Elever gör problem 113

Att presentera problem 113

Litteratur 114

Problemsamling 115

Tal och räkning 115

Inledande algebra 117

Algebra 118

Geometri 120

Statistik 123

Funktioner 124

Litteratur 126

Kapitel 8

Att organisera för lärande 129

En skola för alla 129

Individualisering och klasstorlek 130

Alternativkurser 131

Gemensamma påbyggbara kurser 133

Kurstimplaner – en flexibel ram 134

Att gruppera för undervisning 134

Homogena eller heterogena? 135

Homogena grupper 135

Heterogena grupper 136

Försök med nivågruppering 137

Val och byte av grupp 139

Betyg och elevinflytande 140

Litteratur 142

Bilaga 1

Kursplaner och betygskriterier 143

Grundskolan 143

Gymnasieskolan 148

Bilaga 4

Nationellt prov, dec 95, kurs A 155

Medverkande i

Matematik – ett kärnämne

Elisabeth Aasa, Angeredsgymnasiet, Göteborg
Roland Aronsson, Birger Sjöberggymnasiet, Vänersborg
Agneta Beskow, Lundby gymnasium, Göteborg
Margareta Bladh, Eksjö gymnasium
Kenneth Borg, Väggaskolan i Karlshamn
Göran Emanuelsson, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet
Susanne Gennow, Danderyds Gymnasium
Ing Marie Gustafsson, gymnasiet Spyken, Lund
Bo Hansson, Angeredsgymnasiet, Göteborg
Hans Heikne, Hagagymnasiet, Norrköping
Hans Henriksson, Karlbergsgymnasiet, Åmål
Mikael Holmquist, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet
Johan Häggström, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet
Bengt Johansson, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet
Eva Jungmark, Institutionen för pedagogik, Göteborgs universitet
Karin Kristersson, Komvux, Strängnäs
Eva-Stina Källgården, Högskolan för lärarutbildning, Stockholm
Krister Larsson, De Geergymnasiet i Norrköping och Linköpings universitet
Lisbeth Lindberg, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet
Madeleine Löwing, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet
Margita Nilsson, Lärarhögskolan, Malmö
Kerstin Olofsson, Nösnäsgymnasiet, Stenungsund
Gull Olsson, Skolverket, Göteborg
Ulf Peterson, Munkebäcksgymnasiet, Göteborg
Astrid Pettersson, Högskolan för lärarutbildning, Stockholm
Bo Rosén, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet
Ilse Rossi, Vårdgymnasiet, Borås
Ronnie Ryding, Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet
Marie Skedinger-Jacobsson, Malmö latinskola och Lärarhögskolan, Malmö
Sonja Sannesson, läroboksförfattare, Kungsbacka
Tore Selander, Finnvedens gymnasium, Värnamo
Lennart Wendelöv, Aranäsgymnasiet, Kungsbacka

Matematik – ett kärnämne

Här ges en kort redogörelse för bakgrund, målsättning och arbete som lett till detta Nämnaren TEMA. Innehållet och hur materialet är tänkt att användas beskrivs med övergripande frågeställningar för bokens åtta kapitel.

En förändrad skolmatematik

Matematik är ett av skolans viktigaste ämnen och ett kärnämne i gymnasieskolan. Målen uttrycks i de nya kursplanerna som tillsammans med nya förordningar, läroplaner, timplaner och ett nytt betygssystem skall medverka till en förbättrad matematikutbildning [1].

Genom det nya styrsystemet för skolan har en stor del av ansvaret för utbildningen förskjutits från nationell till lokal nivå. Lärare har därmed större möjligheter att påverka utbildningen men också större ansvar. Det är nödvändigt att utveckla undervisningen, om läroplanens värdegrund skall respekteras, mål uppnås och riktlinjer följas. Detta ställer nya krav på lärares kunskande.

Arbete med stöd- och stimulansmaterial

Inom Skolverket började 1993/94 ett arbete för att ta fram ett studiematerial för matematiklärare. Bakgrund till arbetet har varit de beskrivna förändringarna och nationell utvärdering av matematikundervisningen i grundskolan 1992 samt erfarenheter från tvååriga gymnasielinjer. Frågor kring mål, motiv och differentiering är nu lika aktuella i gymnasiet som tidigare i grundskolan.

Enligt den nationella utvärderingen som gjordes bland 10 000 elever i åk 9 och deras matematiklärare våren 1992, så har många elever negativ syn på matematik och matematikundervisning [2]. Eleverna ser visserligen matematik som nyttig men inte särskilt intressant. Många elever anser att de lär sig onödiga saker i matematik. En del elever (17 %) anser att de får för lätta uppgifter, en del (30 %) att de får för svåra uppgifter i grundskolan. Enskilt arbete dominerar i undervisningen. En elevkommentar:

Vi tyckte om att arbeta med sådana här gruppuppgifter eftersom det inte är så enformigt som att räkna i matteboken och det här gör man mer när man kommer ut i livet.

Ett 40-tal lärare och lärarutbildare från hela landet har prioriterat och diskuterat innehåll och hur detta skulle presenteras. Inom valda arbetsområden har problem i gymnasiets grundläggande matematikundervisningen bearbetats ur elev- och lärarperspektiv.

I de nya kursplanerna betonas vikten av att få tilltro till och inse värdet av matematikkunnande i både grund- och gymnasieskolan – att kunna berätta, förklara och argumentera när man arbetar med matematik. Hur skall då matematikstudierna utformas för de elever som redan i grundskolan haft svårigheter och som inte vill lära sig mera matematik – nästan var tredje elev enligt [2]?

Å andra sidan finns oro för att den inledande kursen blir för lätt eller av andra skäl inte tillräckligt stimulerande eller utmanande för dem som har goda kunskaper i matematik från grundskolan och omfattande studier framför sig.

Många elever visar stora brister i förståelse och färdigheter i grundläggande matematik. En del elever inser inte betydelsen av matematikkunskaper i vardag, samhälle eller utbildning. De ser matematik som ett regelsystem för matematiklektioner. Detta har lett till negativa attityder till ämnet och till undervisningen.

Utifrån den förda diskussionen bestämde vi oss för att försöka uppmärksamma:

- *Undervisningens samband med elevernas attityder och förkunskaper*
- *Aktiviteter som engagerar och stimulerar intresse och kreativitet*
- *Arbetsätt som fördjupar förståelse för och användning av matematik*

Matematik – ett kärnämne

Problemen i kärnämnet matematik är komplicerade och ett omfattande material togs fram inom arbetsgrupperna. Det visade sig vara en lång och svår process att strukturera materialet efter de riktlinjer vi kommit överens om. Efter att ha engagerat flera personer i granskning och redigering kom vi fram till *Matematik – ett kärnämne*.

Detta material skall *inte* ses som anvisningar! Syftet är att stimulera reflektion och diskussion om och i undervisningen. Vi vill visa på matematikens betydelse för våra studerande och ämnets unika plats i samhälle och utbildning. Materialet är tänkt att utan pekpinnar ge stöd och stimulans till att "*frigöra och tillföra energi*".

I detta *Nämnamn* *TEMA* behandlas elevers och lärares uppfattningar, erfarenheter och kunskaper som viktiga att ta hänsyn till. Några frågor som varit vägledande för materialets kapitelindelning:

- 1 Vad vet vi om elevernas erfarenheter av matematik?
- 2 Hur kan vi bygga vidare på elevers kunskande?
- 3 Hur får vi eleverna att ta större ansvar för sina studier?
- 4 Hur blir vi bättre på att utvärdera elevers kunskaper?
- 5 Hur får vi ett mer undersökande arbetssätt?
- 6 Hur får vi samverkan över ämnesgränser?
- 7 Hur stimulerar vi intresset för problemlösning?
- 8 Hur organiserar vi undervisning för lärande?

Varje kapitel inleds med en *ingress* som ger en kort beskrivning av kapitlets innehåll. Syftet med texterna är att ge perspektiv och nya tankar. Som underlag för reflektion och erfarenhetsutbyte finns *elevuppgifter* att pröva tillsammans med elever och *studieuppgifter* att diskutera med lärarkollegor i matematik eller i andra ämnen.

Kapitlen kan studeras oberoende av varandra.

Materialets användning. Resurspersoner

Vi vill stimulera till erfarenhetsutbyte och utvecklingsarbete, till fortbildningsaktiviteter och vidare studier. Tanken är att boken skall kunna användas vid enskild planering, på studiedagar, i studiecirklar och kurser och i grundutbildningen.

Materialet kan med fördel diskuteras i grupper med lärare i matematik från både grund- och gymnasieskolor eller med lärare i matematik och lärare i karaktärsämnen (särskilt kapitel 5–7).

Till Matematik – ett kärnämne finns en *video*, som beskriver hur det kan gå till i klassrummet. Den kan tjäna som diskussionsunderlag om hur man inleder ett avsnitt och hur elever arbetar i grupp med problemorienterad undervisning.

Om någon vill ha råd för uppläggningsen eller få tag på t ex föreläsare eller seminarieledare, kontakta någon av de medverkande (s 6) eller Nämnenredaktionen.

För att underlätta diskussioner och vardagsarbete ingår (se s 143-172):

Bilaga 1 Kursplaner A, B, C, D och E med tillhörande betygsgränser

Bilaga 2 Ämneskommentar – Matematik

Bilaga 3 Anvisningar om specialarbete

Bilaga 4 Nationellt prov för kurs A, dec 1995 med bedömningmall

I varje kapitel ges referenser och lästips under rubriken *Litteratur*. Svensk litteratur har prioriterats. Med hjälp av Nämnarens databas har vi valt ut ett antal artiklar, böcker och rapporter för de som vill fördjupa sig kring innehåll i olika kapitel. Det ges också förslag på utländsk litteratur. I litteraturförteckningarna presenteras Nämnaren-artiklar först, därefter (avskilda av streck) annan svensk litteratur och sist litteratur på engelska eller skandinaviska. Nyutkommen meto- disk och didaktisk litteratur anmäls i *Nämnaren* [3] och litteratur med vetenskaplig inriktning i *NOMAD* [4] se även s 171 – 172. I tidskrif- terna ges också information kring svenska, nordiska och internatio- nella konferenser samt dokumentation kring dessa.

Skolutveckling

Kommunerna har sedan 1991 arbets- givaransvar för lärare och är enligt skollagen skyldiga att se till att fort- bildning anordnas för undervisande personal. Staten ansvarar för att det finns tillgång till fortbildning av god kvalitet. Detta gäller i synnerhet vid införandet av nya läroplaner. Rektor är enligt läroplanen ansvarig för den kompetensutveckling som krävs för att lärarna skall kunna utföra sina arbetsuppgifter i en god arbetsmiljö.

Kompetensutveckling

Nya förutsättningar med högre krav på kvalitet och likvärdigt utbud av fortbildning gör att vi strävar efter bättre former för kompetensutveck- ling. Om denna skall fungera som ett fint instrument i lokal skolutveckling måste varje kommun och skola ana- lysera behoven av fortbildning. Läro- plan, kursplan och arbetsplan samt egna behov i relation till utvärdering och uppföljning är utgångspunkter vid denna analys. Lärares inflytande och delaktighet är en förutsättning för kvalitet i utvecklingen av skolan och den egna professionen.

Utveckling av kursplaner

Enligt förarbeten till läroplanerna skall vi ha en kontinuerlig förändring av kursplanernas innehåll. Vid dis- kussioner och studier av den här bo- ken kommer det säkert förslag till förbättringar och kompletteringar av matematikkurserna. Det är viktigt att dessa kommer fram.

Vi välkomnar bidrag för vidare spridning. Hör av dig till oss! Adress, telefon, fax och e-post på s 2.

Litteratur

- [1] *Regler för målstyrning*. (1995, Tredje upp- lagen). Gymnasieskolan: Skollagen, Gymna- sieförordningen, Läroplan, Programmal, Kursplaner. Stockholm: Svensk Facklitteratur.
- [2] Skolverket (1993). *Den nationella utvär- deringen av grundskolan våren 1992. Mate- matik åk 9*. Huvudrapport. Skolverkets rap- port nr 15. Stockholm: Liber distribution och publikationstjänst.
- [3] *Nämnaren*, tidskrift för matematikundervis- ning. Institutionen för ämnesdidaktik, Göte- borgs universitet.
- [4] *Nordisk matematikdidaktik, NOMAD*, Nordic Studies in Mathematics Education. In- stitutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs uni- versitet.

Redaktionen

1

Elevers och lärares erfarenheter

Avsikten med detta kapitel är att jämföra erfarenheter från grundskolan och gymnasieskolan utifrån den översyn av matematikundervisningen i skolan som gjordes inom Utbildningsdepartementet 1986 och utifrån Skolverkets rapporter från den Nationella utvärderingen, NU 1992. Drygt 100 slumpvis utvalda skolor med ca 10 000 elever i åk 9 deltog i NU. Förutom elevernas kunskaper och färdigheter undersöktes både elevernas och lärarnas syn på matematik och matematikundervisning.

1986 presenterade en arbetsgrupp vid Utbildningsdepartementet en översyn av undervisningen i matematik i svensk skola. Arbetsgruppens slutsatser sammanfattades i diskussionsmaterialet *Matematik för alla* (Utbildningsdepartementet 1986). Där redovisas intervjuer med matematik- och yrkeslärare i gymnasieskolan om övergången från grund- till gymnasieskola.

Olika brister i elevernas kunskande påpekades liksom de stora skillnaderna i kunskaper mellan olika högstadieskolors elever. Man var också bekymrad över den stora spridningen i kunskaper mellan elever från samma högstadieskola. Många elever har så dåliga kunskaper i matematiken som språk och i allmän ordkunskap att de inte förstår instruktioner och förutsättningar i ett problem som ska lösas med matematiska hjälpmedel. (s. 20–21)

Lärarna framhöll att åtskilliga elever hade utvecklat en inställning till matematik som var mycket olycklig.

Många elever betraktar ämnet som ett "pluggämne", där man före prov läser in några formler som man sedan kan glömma bort. (s. 21)

- Hur stämmer beskrivningen av elevernas matematikkunskaper och av deras ämnesuppfattning med dina erfarenheter?
- Många elever tycks betrakta matematiken som ett pluggämne
 - a) Hur har denna uppfattning uppstått?
 - b) Hur kan man undvika att eleverna utvecklar en sådan uppfattning av matematikämnet?

Vad händer under lektionerna?

Gymnasieinspektörernas rapporter från 1980 visade att en stor del av undervisningstiden gick åt till tyst räkning och att liten tid användes till att resonera kring matematikens natur eller roll, att förebygga missuppfattningar eller att diskutera tankeformer och begreppsbildning. Vid undersökningen 1986 fanns inga tecken på att tiden användes på annat sätt på grundskolans mellan- och högstadium. Man frågade sig om eleverna inte skulle få bättre kunskaper om en rejäl del av undervisningstiden användes till att *prata matematik, att diskutera olika lösningar av problem och konstruktion av problem*. (Ds U 1986:5 s 279)

Enligt Lpo 94 och Lpf 94 skall lärare och elever tillsammans planera vad som skall göras under lektionerna. Eleverna kan då bli engagerade och motiverade att ta ansvar för sin inläring. Om de får arbeta i mindre grupper finns det goda möjligheter att deras förmåga och lust att engagera sig och att kommunicera matematik förbättras. Eleverna behöver öva sig i att kunna följa ett matematiskt resonemang, att kunna uttrycka sig, förklara och argumentera i matematik.

Hur ofta används olika arbetsformer enligt lärarna.

Procentuella andelar (N= 571). NU, åk 9. Tabell 4, s 33. (Skolverket, 1993)

Arbetsform	I stort sett varje lektion	Någon gång varje vecka	Någon gång varje månad	Mycket sällan eller aldrig
Huvudräkning.				
Gemensam och/eller enskild	21	45	29	5
Överslagsräkning.				
Gemensam och/eller enskild	10	38	42	10
Gemensam genomgång med klassen under Din ledning	53	42	4	1
Enskild "tyst räkning"	87	9	2	2
Eleverna redovisar lösningar och tankesätt för klassen	6	34	36	23
Eleverna arbetar tillsammans två och två eller i mindre grupper	50	16	16	18
Eleverna konstruerar egna matematikuppgifter	0	3	20	77
Klassen diskuterar olika problem och lösningar tillsammans	11	43	33	13

Hur ofta används olika arbetsformer enligt eleverna. Procentuella andelar (N= 9 500)
NU, åk 9. Tabell 5, s 34. (Skolverket, 1993)

Arbetsform	I stort sett varje lektion	Någon gång varje vecka	Någon gång varje månad	Mycket sällan eller aldrig
Hur ofta arbetar du tillsammans med någon kamrat på matematiklektionerna?	39	24	12	25
Hur ofta arbetar ni tillsammans (3 eller fler) i smågrupper när ni löser matematikuppgifter?	3	6	11	80
Hur ofta diskuterar ni matematikuppgifter gemensamt i undervisningsgruppen tillsammans med läraren?	37	46	12	5
Hur ofta planerar ni tillsammans med läraren vad ni ska göra på lektionerna i matematik?	7	17	24	52
Hur ofta arbetar du med andra matematikuppgifter än de som finns i läroboken?	3	16	32	49
Hur ofta har läraren gemensamma genomgångar med er?	43	45	10	2

Varför har vi hemuppgifter?

Enligt NU-rapporten ger så gott som alla högstadielärare hemuppgifter – de flesta någon gång per vecka. Det vanligaste är att alla elever får samma hemuppgifter, men det förekommer också att eleverna får olika många uppgifter och att dessa är av olika slag. Över hälften av lärarna i grundskolan ger hemuppgifter ur andra källor än läroboken. Som exempel nämns tidningar, men även uppgifter gjorda av elever.

- Hur stämmer resultaten i tabellerna med dina erfarenheter? Välj ut ett matematikavsnitt och försök att beskriva hur ofta du brukar använda de olika arbetsformerna som finns i tabellen.
- Vad har dina elever för erfarenheter av och önskemål om olika arbetsformer? Utgå från och jämför gärna med resultaten i tabellen. Vilka förslag har dina elever för att öka sitt intresse för och utbyte av matematikutbildningen?

En fråga som inte ställts är i vilket syfte lärarna ger hemuppgifterna och hur eleverna ställer sig. Syftet är kanske att befästa vissa färdigheter, men det finns lärare som använder hemuppgifter för att stimulera och aktivera eleverna och ge dem en bakgrund inför vad som skall tas upp vid senare lektioner. Eleverna kan t ex få i uppgift att ta fram fakta så att de kan beskriva problem och beräkningar som gjorts tidigare och utvidga dem med hjälp av ny information. Man försöker ge eleverna en utgångspunkt i form av "det här vet vi, och vad tillför den nya informationen i relation till den vi hade tidigare?".

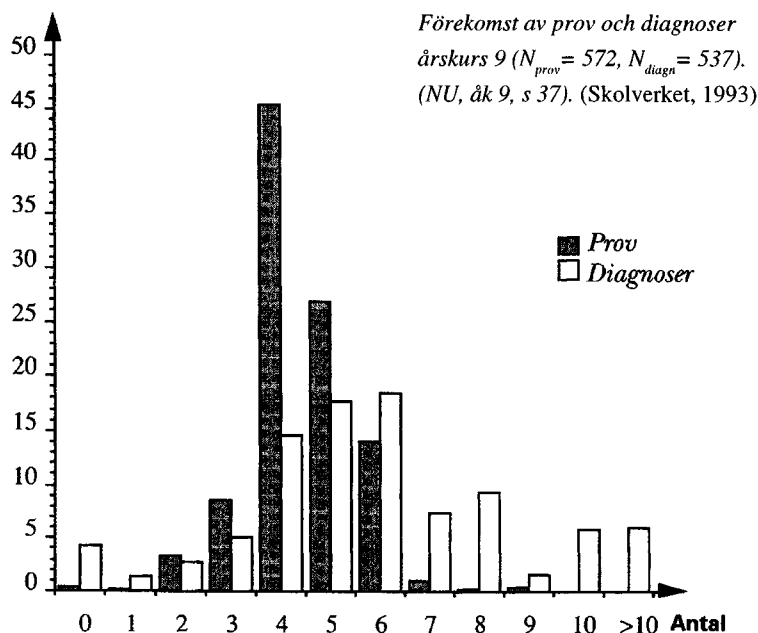
Flertalet elever har gjort sina hemuppgifter, men vad de får ut av hemarbete får vi inte veta i studien. Som lärare borde vi fråga "Vad har du lärt, eller vad har du förstått genom detta?"

Glädjen när eleverna förstår

I diskussionen om nya betyg har det framförts att antalet prov borde skäras ner. Kan man få en bättre bild av elevernas kunskaper genom kontinuerlig uppföljning – där man antecknar framsteg och inte de fel som det är naturligt att en människa gör medan hon lär sig?

Enligt NU-rapporten anser tre av fyra elever att diagnoser är bra. Hur prov och diagnoser används enligt rapporten visas i nedanstående diagram.

Andel
lärare (%)



Nedan redovisas elevernas svar på frågor om den undervisning de fått under sin skoltid. Jämför denna tabell med tabellen på sidan 11 som beskriver vilka arbetsformer som används under lektionerna.

Elevernas svar på några frågor om undervisningen. Procentuella andelar (N ≈ 9 500)
NU, åk 9. Tabell 1, s 29.(Skolverket, 1993)

Påstående	Instämmer helt	Instämmer i stort sett	Instämmer delvis	Instämmer inte alls
Alla i undervisningsgruppen ska räkna samma uppgifter	37	28	23	12
Det är viktigt att alla räknar alla uppgifter i läroboken	7	16	30	47
Jag tycker att det är bra med prov i matematik, så jag får visa vad jag kan	27	34	30	9
Det är bra med diagnoser, så jag får veta om jag behöver arbeta mer med något i matematiken	38	34	23	5
Jag har fått arbeta med för många lätta uppgifter i matematik				
på lågstadiet	22	20	33	25
på mellanstadiet	14	25	39	22
på högstadiet	5	12	41	42
Jag har fått arbeta med för många svåra uppgifter i matematik				
på lågstadiet	3	7	29	61
på mellanstadiet	3	10	38	49
på högstadiet	10	20	41	29
Jag skulle vilja lära mig mer matematik i skolan	11	19	40	30
Jag har fått lära mig mycket i matematik som jag tycker är onödigt	15	15	44	26
Jag tror att jag kommer att ha nytta av den matematik som jag lärt mig	39	39	21	1

- Hur vill du/dina elever att hemuppgifter skall användas i skolarbetet? Vad skall de ha för syfte, innehåll och omfattning? Hur skall de kunna stimulera till arbete och lärande?
- Vad anser dina elever om prov/diagnoser i matematik? Vilka andra sätt tycker du/de att det finns att ta reda på vad elever kan?
- Välj ut någon fråga som du vill ha svar på och undersök hur dina elever svarar. Jämför resultaten med siffrorna i tabellerna.

Nästan en femtedel av eleverna har haft stora eller mycket stora problem att förstå lärarens förklaringar i matematik på högstadiet. Liknande resultat har nyligen presenterats av Svensson (1995). Motsvarande andel för låg- och mellanstadiet är ungefär en tiondel.

I tabellen nedan har eleverna gett sin syn på den egna insatsen. Enligt lärarna är det största glädjeämnet när eleverna förstår och får ”aha-upplevelser”. Andra saker som nämns är att få arbeta med målmedvetna eller duktiga elever och att få bidra till ökat självförtroende i matematik hos eleverna.

Hälften av lärarna har också angett svårigheter i matematikundervisningen. En tredjedel nämner omotiverade elever och elever som inte förstår matematiken trots ansträngningar från både elev och lärare. Annat som nämns är svårigheter att hinna med kursen, heterogena elevgrupper, brist på resurser och brist på disciplin.

I fråga om mål som det är svårt att förverkliga på högstadiet är det vanligaste svaret ”att individualisera undervisningen”. Hälften av de 30% som svarat på frågan har nämnt detta. Ungefär en av fem nämner svårigheter att motivera eleverna för matematikämnet och att vardagsanknyta matematiken.

Annat som nämns som svårt att förverkliga är att lära eleverna baskunskaper och att ändra en del elevers negativa inställning till ämnet.

Elevernas svar på några påståenden rörande den egna motivationen.
Procentuella andelar (N ≈ 9 500). NU, åk 9. Tabell 2, s 30. (Skolverket, 1993)

Påstående	Instämmer helt	Instämmer i stort sett	Instämmer delvis	Instämmer inte alls
För det mesta ger jag upp när jag får en svår uppgift	5	10	38	47
Jag skulle ha kunnat vara bättre i matematik om jag ansträngt mig mer	25	24	38	13
Jag har gjort mitt allra bästa för att lära mig matematik				
på lågstadiet	46	30	18	6
på mellanstadiet	36	38	21	5
på högstadiet	30	40	23	7
Jag är nöjd med det jag presterat i matematik				
på lågstadiet	47	31	16	6
på mellanstadiet	38	36	19	7
på högstadiet	17	36	31	16

Är matematik det svåraste ämnet?

Ca 7 000 gymnasieelever i åk 1 har 1984 och 1989 svarat på frågor om sin grundskoletid. De fick bland annat frågan om de upplevde problem med matematik under sin högstadietid, och i så fall med vad. Svaren utföll ungefär likadant 1989 som 1984. Andelen elever som anser sig ha haft stora eller mycket stora problem på högstadiet varierar i olika undervisningssituationer, mellan 2% och 12%. Störst problem säger de sig ha haft med "Att tala i grupp eller i klassen" och med "räkning" (11%).

Gymnasieeleverna svarade också på frågan hur pass säkra de kände sig i situationer då de behövde räkna, läsa, skriva eller tala i grupp. 20% av eleverna kände sig osäkra eller mycket osäkra när de skulle räkna. När det gällde att läsa och skriva var det endast 4% som kände sig osäkra. Det framgår inte huruvida situationerna då de behövde räkna gällde skolan eller livet utanför.

- Välj ett exempel på en egen, särskilt framgångsrik undervisningsinsats. Varför blev resultatet så lyckat? Jämför gärna med motsvarande exempel från några kollegor.
- Välj ett exempel på en misslyckad undervisningsinsats. Varför blev den så misslyckad? Jämför och diskutera gärna med några kollegor.
- Idag studerar alla elever matematik i gymnasiet. Man kan anta att andelen elever med sämre förkunskaper ökat jämfört med tidigare. Hur hjälper man bäst de elever som uppger sig ha problem?
- Enligt informationschefen på kronofogdemyndigheten i Göteborg, Rosén (1994), har många problem med privatekonomi. Bristande kunskaper leder till ekonomiska svårigheter och innebär allvarliga störningar i privatlivet. I kronofogdemyndighetens register finns nästan 500 000 personer. Vet eleverna om detta?
- I grundskolan arbetar eleverna i par eller i mindre grupper i stort sett varje lektion enligt 50% av lärarna. Hur ofta sker det i din klass? Hur stora grupper? Vilka ämnesområden?
- På mellanstadiet är det inte ovanligt att eleverna får konstruera egna uppgifter. På högstadiet låter var femte lärare eleverna göra det någon gång varje månad. Vilka erfarenheter har du? Hur gör dina kollegor?
- Vilka erfarenheter har grundskolans elever av miniräknare och datorer, och vad möter de i gymnasieskolan?

Skolverkets rapport nr 15, *Matematik i åk 9* ger ytterligare underlag.

Litteratur

- Andersson, K. (1988). Läroboken en autolots. *Nämnamnaren* 15(1), 42-47.
- Björk, L.-E. & Brodin, H. (1990). Matematiken och de nya verktygen. *Nämnamnaren* 17(3-4), 63-67.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1989). Vad ska en matematiklärare kunna? *Nämnamnaren* 16(1), 2 - 5.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1995). Matematikämnet didaktik – ett växande vetenskapsområde. *Nämnamnaren* 22(1), 48-49.
- Garmannslund, K. (1984). Kan ikke jenter regne? *Nämnamnaren* 10(4), 32-34.
- Grevholm, B. & Areskoug, M. (1987). Vems matematik? *Nämnamnaren* 14(1), 32-37.
- Johansson, B. (1991). Forskning och utvecklingsarbete i matematikdidaktik i Sverige. *Nämnamnaren* 18(3/4), 47-53.
- Löthman, A. (1991). Perspektiv på matematikundervisning. *Nämnamnaren* 18(2), 6-8.
- Pettersson, A. (1994). Högstadielärares syn på matematiken. *Nämnamnaren* 21(1), 34-35.
- Sjögren, P. (1992). En matematikers syn på svensk skolmatematik. *Nämnamnaren* 19(3), 12-19.
- Svensson, A. (1995). Högstadiets matematik skrämmer. *Nämnamnaren* 22(2), 8-11.
- Wahlund, B. (1986). Vi valde bort matten – fick räkna ändå! *Nämnamnaren* 12(4), 70-72.
- Alexandersson, C. (1985). *Stabilitet och förändring. En empirisk studie av förhållandet mellan skolkunskaper och vardagsvetande*. Göteborg Studies in Educational Sciences, nr 53.
- Carleson, L. (1968). *Matematik för vår tid. En presentation och ett debattinlägg*. Stockholm: Bokförlaget Prisma.
- Emanuelsson, G., Johansson, B., Rosén, B. & Ryding, R. (1992). *Dokumentation av 7:e Matematikbiennalen, Göteborg 22-24 januari 1992*. Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.
- Emanuelsson, G., Johansson, B., Rosén, B. & Ryding, R. (1994). *Dokumentation av 8:e Matematikbiennalen, Göteborg 26-28 januari 1994*. Institutionen för ämnesdidaktik, Göteborgs universitet.
- Grevholm, B. (1993). *Naturvetenskap och teknik i Sverige. Kan forskningsinformation stimulera?* Stockholm: Verket för Högskoleservice.
- Johansson, B. (1993). Matematikdidaktik – nordiskt samarbete i historisk belysning. *NOMAD* 1(1), 55-61.
- Löthman, A. (1990). *Perspektiv på matematikundervisningen. En pilotstudie på Komvux och grundskolans högstadium angående elevers och lärares uppfattningar av undervisningsprocessen*. Rapport från Pedagogiska institutionen, Uppsala universitet, 151.
- Nilsson, M. (1993). *Matematikundervisning i gymnasieskolan. Del I – III. Lärarhögskolan i Malmö*.
- Pettersson, A. (1990). *Att utvecklas i matematik. En studie av elever med olika prestationsutveckling*. Stockholm Institute of Education. Studies in Education and Psychology No 25.
- Skolverket (1993a). *Den nationella utvärderingen av grundskolan våren 1992. Matematik åk 9. Huvudrapport*. Skolverkets rapport nr 15. Stockholm: Liber distribution.
- Skolverket (1993b). *Attityder till skolan. Skolbildaundersökningen 1993/94*. Skolverkets rapport Nr 72. Stockholm: Liber distribution.
- SOU 1992:94. *Skola för bildning. Betänkande av läroplanskommittén*. Stockholm: Allmänna förlaget.
- Utbildningsdepartementet. (1986). *Matematik för alla. Sammanfattning av rapporten Matematik i skolan*. Utbildningsdepartementet och Liber Utbildningsförlaget.
- Wyndhamn, J. (1988). *Tankeform och problemmiljö. Skolan som kontext för tänkande i elementär matematik*. SIC 26, 1988. University of Linköping: Studies in Communication.
- Alrø, H. og Skovsmose, O. (1993). Det var ikke meningen! – Om kommunikation i matematikundervisningen. *NOMAD* 1(2), 6-29.
- Cockcroft, W. H. (Chairman). (1982). *Mathematics Counts: Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools*. London: H.M.S.O.
- Damerow, P. et al (Eds.) (1986). *Mathematics for all*. Unesco.
- Grouws, D.A. (Ed.) (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. A project of the National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. New York: MacMillan.
- National Council for Teaching Mathematics, NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Va.: Author.

2

Att utgå från elevers kunnande

I detta kapitel diskuteras vad elever tänker om matematik och matematikundervisning och hur man som lärare kan ta reda på och bygga på deras kunskaper. Det gäller att få eleverna att tro på sina möjligheter och engagera sig.

Förkunskaper och erfarenheter

För att få en bild av elevernas kunskaper i matematik är det ganska vanligt att man använder någon form av diagnos när vid starten i gymnasieskolan. Svagheten med en skriftlig diagnos med traditionella uppgifter är att den mera pekar på eventuella brister – det är ju dessa som skall åtgärdas – än på den plattform av kunskaper som eleverna står på. Trots att avsikten är att hjälpa elever med behov av stöd, kan den upplevas som en form av ”prov”. Diagnosresultatet kan verka nedslående och bekräfta många elevers negativa syn på matematiken och på sina egna matematiska kunskaper.

Det är svårt att från ett diagnosresultat få en klar uppfattning om hur eleven löst en uppgift eller vilken tankeform eleven har använt. Genom att komplettera diagnosen med ett samtal (intervju) kan man få reda på hur eleven faktiskt tänkt. Vid sådana samtal finner man ofta att elevens svårigheter beror på missuppfattningar eller att eleven fastnat i alltför tidsödande tankeformer.

I stället för – eller som komplettering till – diagnoser av vanlig typ kan man be eleverna redogöra för sina kunskaper i matematik, muntligt eller skriftligt. På detta sätt kan eleverna få tillfälle att beskriva vad de kan, anser är viktigt i matematik och vad de tycker är svårt snarare än vad de inte kan. Det är viktigt för elevernas självförtroende och utveckling att deras kunnande respekteras och tas som utgångspunkt för undervisning.

Eleverna bör uppmanas att ge exempel på vad de minns inom olika områden såsom bråk, procent eller geometri. De kan ge exempel på vad de funnit lätt eller svårt, roligt eller tråkigt, nyttigt eller onödigt. De kan också (hemma eller i skolan) konstruera problem – lätta, lagom eller riktigt svåra – som visar vad de kan av matematiken från

grundskolan. Med hjälp av detta kan eleverna reflektera över vilka kunskaper de har och vad de uppfattar som matematik. Läraren kan därigenom få en god bild av elevernas uppfattningar och tänkande i matematik.

Ett förslag i samma riktning är att eleverna inte bara får ge exempel på matematik de minns, utan också beskriva sina upplevelser av och inställningar till ämnet.

En elevkommentar i samband med att en lärare prövade liknande former av utvärdering var: *Det är första gången någon matematiklärare frågat efter vad jag tänkt!*

Det förhållningssätt till eleverna som sådana övningar ger uttryck för borde kunna genomsyra hela kursen. I kapitel 4 *Varierad utvärdering* kan du läsa mer.

- Låt dina elever med hjälp av exempel beskriva eller demonstrera den matematik som de anser sig behärska bäst.
- Undersök dina elevers upplevelser och inställning till matematikämnet genom att t ex fråga dem om vad som är
 - lätt, svårt
 - roligt, tråkigt
 - bra att kunna, onödigt att lära sig
 - intressant/ointressant
- Hur skall man utforma en diagnos så att eleverna får visa vad de redan kan eller snabbt kan repetera utan att de behöver någon undervisning?
- Är det nödvändigt eller meningsfullt att sätta poäng på elevernas prestationer på en diagnos? För vem sätter man poäng? I vilket syfte? På vilka grunder sätts poäng? Vad används poängen till? Gäller dina kommentarer också prov som används som underlag för betygssättning?
- Utgå ifrån en diagnos som du givit dina elever och som du rättat. Be eleverna berätta vilka matematikkunskaper de anser sig ha inom det diagnostiserade området men som av någon anledning inte visar sig i diagnosresultatet.

Diagnosresultat

PRIM-gruppen i Stockholm publicerade 1990–91 resultaten av diagnoser gjorda i början av åk 1 i gymnasieskolan. Oscarsson m fl (1990), Ljung m fl (1991). En del resultat är tankeväckande, och det kan vara mycket intressant att jämföra sin egen undervisningsgrupp med de elever som deltog i PRIMs diagnoser. Några elevuppgifter finns här som exempel.

Elevuppgifter

(Ursprungligt uppgiftsnummer och total lösningsfrekvens inom parentes)

- 1 Beräkna $5 + 3 \cdot 2$ (1, 55%)
- 2 Beräkna $0,3 \cdot 0,12$ (5, 56%)
- 3 Vad är hälften av $2/3$? (13, 39%)
- 4 Beräkna $2/3 + 1/6$ (14, 45%)
- 5 På en karta i skalan 1:100 000 är avståndet mellan två orter 12 cm. Hur stort är avståndet i verkligheten uttryckt i kilometer? (40, 23%)
- 6 En kartritare mäter upp avståndet 120 m mellan två föremål i naturen. Hur långt blir detta avstånd i millimeter på en karta i skalan 1:10 000? (41, 24%)
- 7 Beräkna värdet av uttrycket $x + 1/x$ då $x = 0,5$. (45, 18%)
- 8 Kalle har x kr. Pelle har 10 kr mer. Teckna ett uttryck som visar hur mycket de har tillsammans. Svara i enklaste form. (46, 15%)

- Prova uppgifterna ovan med dina elever, enskilt eller i grupp. Be dem lämna in fullständiga lösningar och förklara hur de tänkt, och vad de anser är lätt/svårt eller behöver repetera.
- Formulera om de fyra första uppgifterna till konkreta problem som kan lösas genom respektive beräkning. (Exempel: Du kastar fyra tärningar. Resultatet blir en femma och tre tvåor. Hur många "prickar" blir det?). Låt dina elever lösa de "nya" uppgifterna. Jämför resultaten med förra omgången och diskutera dem med dina elever.

Några frågor

Det finns många frågor man kan ställa sig när det gäller konstruktion, tolkning och uppföljning av diagnoser.

Stimuleras elever med goda kunskaper?

När elever får beskriva vad de kan och hur de ser på matematik, finner man att många elever har goda kunskaper. De tycker att uppgifterna i grundskolan varit för lätta, och de är utleda på t ex procent. Deras krafter och intressen har inte tagits tillvara som de önskat (17 % enligt NU-rapporten, s 24. Skolverket 1993).

Vad säger en poängsumma?

Poängsumman kommer oftast i blickpunkten på ett sätt som inte är avsett. Eleven tänker *Jag hade två poäng mer än Kalle!* Diagnosen uppfattas inte bara som ett test som visar vad jag kan eller inte kan, utan den säger också om jag är bra eller dålig, bättre eller sämre än andra. Om testet är bra konstruerat kan en hög poängsumma vara ett uttryck för bättre kunskaper än en låg. Men det man bör studera efter en diagnos är snarare delresultat som antingen visar kunskaper att utgå ifrån eller misstänkta brister, som man behöver samtala med eleven om.

Vilka kunskaper kommer inte fram?

En muntlig uppföljning ger fler dimensioner åt diagnosresultatet. En elev kan veta hur man beräknar arean av en rektangel eller en triangel, men kan bli osäker eftersom hon förutsätts mäta sidorna själv, vilket hon kanske inte är van vid eller inte tror är "tillåtet".

PRIM-testerna visar att många elever som deltar inte kan beräkna $\frac{3}{4} \cdot 12$ eller $\frac{2}{0,01}$. Beror det på att de helt saknar begrepp om bråk, decimalform och räkneoperationernas innebörd eller är det "de nakna siffrornas fenomen"? Eleven kanske inte kan associera till ett sammanhang eller till någon storhet. Eleven litar till räkneregler som dessvärre glöms bort, inte till vad hon vet och kan tänka ut. Skulle samma elev ha kunnat säga vad $\frac{3}{4}$ av 12 dm är eller hur många centimer det går på två meter?

I en test på vårdlinjen i Malmö, med elever i åldrarna 18 till 53 år, gavs bland annat uppgiften 1,20/0,60. Det var många som inte kunde lösa den. De uppfattade skolmatematiken som ett system av regler att följa. Läget blev ett annat om de tänkte på att köpa 60-öres frimärken för 1,20 kr.

Om en elev redan har ett tänkande, men i en annan "klädedräkt", är det lättare att inse att det man redan kan också kan utvecklas och användas här. Man behöver inte "börja från noll". Hur kan vi tillsammans med eleverna ta vara på det de redan kan?

Visar redovisade resultat på förståelse?

Det händer att elever svarar rätt på uppgifter i test men ändå saknar de kunskaper som uppgifterna har för avsikt att mäta. En elev kan t ex räkna ut en rektangelarea rätt utan att veta varför han multiplicerar längden med bredden.

Resultaten i PRIM-testerna på procent är jämförelsevis goda. Men hur har de tänkt? I en grupp elever i åk 1 kunde t ex 73% av eleverna beräkna 5% av 4 500, men bara 27% kunde säga vad fem hundradelar av 4 500 är.

Ett annat exempel ger berättelsen om Carina i åk 8, som löst bokens alla uppgifter rätt:

Jag fattar ingenting om procent. Jag tittar på de lösta uppgifterna och så skriver jag på samma sätt fast med andra siffror. Går det inte direkt provar jag med räknaren, för antingen är det gånger eller också är det delat med. Sen kollar jag med facit och så är det bara att skriva på samma sätt som i en färdiglöst uppgift.

Problemet med ytkunskaper och lotsning är välkänt i skolan. (Kilborn, 1979; Wyndhamn, 1988; Granström & Einarsson, 1995.)

Elevuppgifter

Utför beräkningarna och beskriv hur du gör.

9 a) $320 \cdot 0,8$ b) $2/0,01$

c) $3/4 \cdot 12$ d) 3 dividerat med $1/2$

10a) Är $320 \cdot 0,8$ större eller mindre än 320? Hur vet man det?

b) Hur många centimeter går det på 2 m?

c) Hur mycket är $3/4$ av 12 dm?

d) Kan verkligen 3 dividerat med $1/2$ bli 6? Hur kan man inse det?

- Prova elevuppgifterna 9 a – d vid ett tillfälle och 10 a – d vid ett annat. Jämför och diskutera resultaten.

Hur kan eleven utveckla sin matematik?

Alla elever har matematikkunskaper som inte kommer fram i diagnoser eller under arbetet på lektionerna. Ofta klarar eleven av de vardagssituationer hon/han hamnar i och kan använda matematik i sin närmiljö. Skolmatematiken berör inte alltid elevens verklighet och sätts kanske inte in i ett sammanhang som är välbekant för eleven. Det kunnande som utvecklas i klassrummet kan bli svårt att utnyttja utanför skolan. Ur kursplanen i matematik, Lpf 94:

Matematik är ett nödvändigt verktyg såväl för andra ämnen inom den gymnasiala utbildningen som för ett flertal ämnesområden inom eftergymnasiala studier.

Matematikundervisningen syftar till att ge eleverna tilltro till det egna tänkandet samt till den egna förmågan att lära sig matematik och använda matematik i olika situationer.

Det är känt att gymnasister i ämnen som ekonomi och fysik kan stå handfallna inför beräkningar som borde vara välbekanta. Fenomenet har i alla tider beskrivits som "vattentäta skott mellan ämnena".

Om man låter eleven skriva eller berätta om vad han/hon kan i matematik, kan man passa på att också be eleven berätta om när och i vilka sammanhang, som han/hon brukar använda matematik och kanske skulle behöva använda matematik men inte kan eller vågar. Hur skall vi annars kunna bryta den isolering som elevernas "skolutvecklade" matematikkunskaper tycks befinna sig i?

- Hur tar ni emot eleverna på er skola när de börjar sina matematikstudier? Får de tillfälle att visa vad de kan eller vad de inte kan? Vad är bra och vad kan bli bättre?
- Varför sägs det ofta att matematiken är skolans mest isolerade ämne? Hur kan vi bryta denna isolering?
- Hur skall man kunna förhindra att elever utvecklar den typ av "färdighet" som Carina visar exempel på?

Hur tänkte jag?

Vid mötet med en ny skola är det tryggt om den nye läraren förstår och bryr sig om vad eleven gjort och varit med om tidigare. Det finns elever som tappar tråden när läraren skriver $0,06 \cdot 300$ kr på tavlan. Läraren i grundskolan tycker kanske det blir mer konkret om ”kronor” används och inte bara $0,06 \cdot 300$. Men eleven undrar: ”Vad då $0,06$? Vad är det där? Förr räknade jag 1% först, det lärde vi oss på mellanstadiet och det förstod jag. Nu är allt mycket svårare.”

Motsvarande frågor ställer elever i gymnasieskolan. De kan behöva frågor som ”Kan man räkna det här på något annat sätt? Hur brukar du göra?” Får de inga frågor eller kommentarer i den riktningen kan de uppfatta sitt kunskande som värdelöst och läraren som likgiltig för vad eleverna lärt sig tidigare.

Det är inte heller ovanligt att eleverna förmodas förstå vad de egentligen aldrig förstått. Att 6% av 300 kr kan skrivas och beräknas som $0,06 \cdot 300$ kr är bara ett exempel av många.

Vad eleverna lär sig i matematik på grundskolan är viktig information för gymnasieläraren. Det gäller även elevernas tidigare erfarenheter av arbetssätt och arbetsformer. I grundskolan är det inte ovanligt att eleverna arbetar laborativt i mindre grupper. De konstruerar också egna uppgifter. Laborativt arbete – mäta, väga, klippa och klistra – förekommer också i grundskolan.

I kapitel 5 kan du läsa mer om detta. Där föreslås också att eleverna får konstruera egna uppgifter, något som ingen högstadielärare i NU-rapporten uppger att de låter eleverna göra.

I samma NU-rapport anger 50% av lärarna att eleverna arbetar parvis i stort sett varje lektion. Eleverna har erfarenheter som kan tas till vara, och det gäller att få dem att berätta, förklara, motivera och diskutera matematiken.

Matematikkursen skall befästa och utvidga elevernas begreppsvärld. Ett viktigt mål är att de skall utveckla sin förmåga att uttrycka sig. Ett sätt att börja är att eleverna i smågrupper får diskutera sig fram till hur de skall förklara innebörden i formler och regler som de använt. De kan ha använt formler och regler utan att tänka på *att* eller *hur* de kan förstås. Om eleverna reflekterar över ”vad jag kan i matematik”, och inte bara tänker ”jag vet hur det är!”, och detta leder fram till ”vi kan förklara hur det är!” – är väl det en fin utveckling?

En students syn

När studenter beskriver sin syn på matematik och sin egen förmåga ger det information om det förhållningssätt till matematik som de tillägnat sig. Några kommentarer från en lärarstuderande:

– *Bra att man kunde diskutera i gruppen hur man tänkte när man löste uppgiften. Det är ju det man lär sig på.*

– *Att man kan tänka matematik på så många olika sätt hade jag ej reflekterat över tidigare. Jag tänkte nog att de duktiga räknarna var sådana som löste uppgifter snabbt, tänkte snabbt och kom i håg vad man skulle göra snabbare.*

– *Främst har jag återvunnit intresset för matematiken. Jag tycker mig ha fått ett "större matematiskt självförtroende".*

Hur skall man undervisa så att sådana insikter kommer tidigare?

Meningen med matematik

Skolmatematiken som helhet uppfattas olika av lärare och elever. I NU-rapporten anger lärare i större utsträckning än elever problemlösning, överslagsräkning, förståelse och logiskt tänkande som viktigt. Ingen elev har nämnt de två sista områdena.

Matematiken uppfattas olika av lärare med olika utbildningsbakgrund och huvudintresse. En del ser i matematiken en samling (nyttiga) regler att använda, medan andra snarare ser idéer, mönster och relationer att utforska och diskutera.

Att lösa problem kan med det ena synsättet främst uppfattas som en tillämpning och som övning för att lära sig bärande regler och komma till önskat resultat. Med det andra synsättet kan problemlösning främst uppfattas som en inkörsport, ett medel eller motiv för att komma till insikt om och förståelse för olika sammanhang och företeelser. Båda synsätten förekommer naturligtvis parallellt och kan förenas. Se även kapitel 7.

Man lär sig förstå när man funderar själv och när man talar med andra. Sitt eget språk använder man för att befästa och utveckla sina begrepp. Men att växla mellan det egna språket och det matematiska språket kan vara problematiskt.

Om eleverna inte uppfattar motiv för och mening med symboler – siffror under tidigare skolår, bokstavssymboler för tal och andra symboliska beteckningar senare – så bidrar det till en klyfta mellan elevernas verklighet och skolmatematiken. Eleverna famlar mer eller mindre blint efter mönster och sammanhang bland symbolerna. Den vik-

tiga översättningen från eget språk till matematikspråk och omvänt går snett. Det är svårt att berätta, förklara och argumentera med hjälp av symboler som man inte förstår.

Senare års forskning om matematikinläring har visat att bokstavs-symboler är lätta att använda, men svåra att förstå. Detta beror på att bokstäverna dels är som siffror, fast annorlunda, dels är som ord, fast annorlunda.

Alla måste bli medvetna om vikten av att man lär sig symbolerna samtidigt som man lär sig begreppen. Det borde därför vara fruktbart att använda det vanliga språket betydligt mer i matematikundervisningen.

Eleverna behöver träna på att formulera sina tankar utan att använda symboler innan de övergår till att skriva komplicerade sammanhang i den för matematiken karakteristiska, kortfattade formen. Enstaka tecken ger den invigde många associationer och begreppsbilder. För en oinvigd blir symbolspråket en börda om man först måste tränga igenom en svårforcerad mur för att förstå innebörden av själva tecknen. Det finns risk för att formler kommer att fungera som ersättning för tänkande.

Att arbeta tillsammans i grupper med 3–4 elever ger tillfälle att reda ut vad man menar och befästa sin uppfattning. Eleverna kan berätta med vanliga ord hur de tänker och vänta med symboler tills de behövs. För att kunna förklara för andra behöver man själv ha förstått eller tänkt igenom vad man inte förstått.

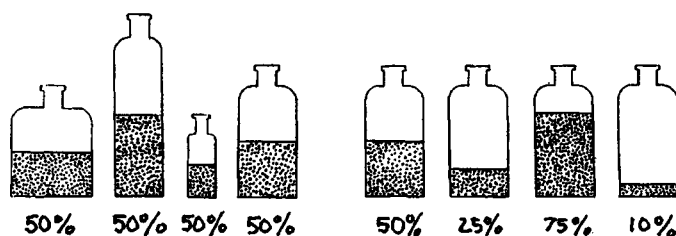
Det kan vara effektivt för eleverna att skriftligt beskriva hur de uppfattat en arbetsuppgift eller den senaste veckans arbete. "Dagbok" av typen "Vad jag lärt mig idag/den här veckan" används med framgång av många lärare. Man får se hur eleven uppfattat det arbete det är fråga om, och eleven får möjlighet att klargöra för sig själv vad hon/han tänkt och gjort.

- Välj ut några formler eller regler som innehåller symboler och nyligen behandlats. Låt eleverna diskutera i grupper varför man ställt upp formlerna och vad de egentligen säger för en invigd och för en oinvigd. Diskutera svårigheter att förstå och hur man skall gå tillväga för att förstå bättre.
- Välj en eller ett par olika arbetsuppgifter som behandlats den senaste veckan. Låt eleverna skriftligt beskriva hur de uppfattat uppgiften, hur de löst den och vad de lärt sig av uppgiften. Be dem konstruera en annan uppgift som de anser är mera intressant.
- Diskutera utfallet av uppgifterna ovan med dina kollegor.

Procent – ett av flera nyckelbegrepp

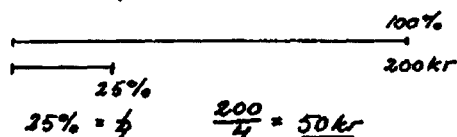
Diagnosresultat på procent kan vara rätt goda, men den bakomliggande förståelsen kan ändå vara bräcklig. Det står klart för alla att god förståelse för proportionalitet och procent är viktig. Vad kan man göra för de elever som trots allt inte tillägnat sig begreppen? Här följer några förslag:

- att man gör "en förändring i taget" när man börjar med procent.
- att man arbetar med begreppet "del av" och med förhållandet mellan olika storheter i olika sammanhang.
- att eleverna ritar schematiska bilder med markering av delen och helheten. Bilderna underlättar förståelsen av beräkningarna.

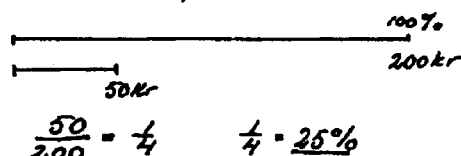


- att procentbegreppet belyses samtidigt från olika sidor. Hur mycket är 20% av 200 kr? Hur många procent är 40 kr av 200 kr?
- att övergången från att räkna via 1% till decimalform särskilt beaktas.

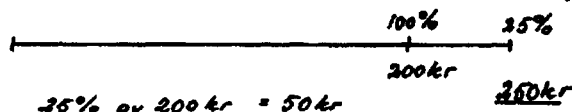
1. Hur mycket är 25% av 200kr?



2. Hur många procent är 50kr av 200kr?



3. Priset 200kr ökar med 25%. Nya priset?



I samband med det sista förslaget kan man reflektera över om det kanske är bra att eleverna tänker via 1% (eller 10%) i många sammanhang. Kan övergången till annat tanke- och skrivsätt skjutas upp till en senare tidpunkt för en del elever? För att räkna med förändringsfaktor behöver man decimalformen. Men en del elever kan ha behov av mer närliggande mål. Den nämnda överslagsräkningen räcker vid många av vardagens procentproblem.

Åsikterna bland lärare går isär när det gäller användandet av bråkform respektive decimalform i samband med procenträkning. En del lärare anser att $(3/100) \cdot 600$ kr förefaller mer "påtagligt" för eleverna än $0,03 \cdot 600$ kr. Många kan inte se "tre hundra delar" bakom 0,03, medan det är något klart och suggestivt i divisionen med heltalet 100.

$$\frac{3}{100} \cdot 600 \text{ kr} = \frac{3 \cdot 600}{100} \text{ kr}$$

Beräkningen 3% av 600 kr ligger också närmare beräkningen via 1%. Vidare framhåller de som föredrar bråkformen att den är bättre om man skall räkna med p procent.

Målet att eleven skall kunna berätta, förklara och argumentera innebär att man måste kunna förstå och förklara för sig själv och andra inte bara hur man räknar via 1% utan också hur man räknar både i decimalform och i bråkform?

Som alltid, har man som lärare att försöka möta spridningen i elevernas kunskaper och intresse. Här ges ett förslag till hur man kan arbeta på olika nivåer med procenträkning. Idén är hämtad från den amerikanska lärarföreningens underlag till kursplan i matematik från förskola till åk 12, *Standards*. Det bearbetade exemplet är hämtat från Emanuelsson m fl, (1992).

Observera den stegvisa ändringen av beteckningssätt, övergången till mer generella metoder och användningen av ett undersökande arbetssätt med räknare och datorer.

- Formulera ett procentproblem med hjälp av en tidning, och diskutera med eleverna olika sätt att lösa det, med hjälp av en figur, i bråk- och decimalform, genom att först räkna ut vad 1 % är, med förändringsfaktor osv på olika sätt som beskrivs i kapitlet. Vilka reaktioner får du från eleverna? Diskutera utfallet med dina kollegor.
- Hur tycker du att man kan förbättra utbytet av undervisningen kring procent?

Olika nivåer i procenträkning

En elev sätter in 1000 kr på ett bankkonto med 6% ränta. Hur mycket pengar finns det på kontot efter 10 år?

På den första nivån kan alla elever bestämma beloppets storlek vid slutet av varje år genom att successivt använda sambandet:

Beloppet vid årets slut = Beloppet vid årets början + $0,06 \cdot$ (beloppet vid årets början).

Med miniräknare kan man beräkna:

År 1: Beloppet vid årets slut:
 $1000 + 0,06 \cdot 1000 = 1060$

År 2: Beloppet vid årets slut:
 $1060 + 0,06 \cdot 1060 \approx 1123,6$

År 3: Beloppet vid årets slut:
 $1123,6 + 0,06 \cdot 1060 \approx 1191$

...

År 10: Beloppet vid årets slut:
 $1689,5 + 0,06 \cdot 1689,5 \approx 1790,8$

Man kan också använda ett annat skrivsätt för att söka ett mönster:

År 1: Belopp vid årets slut: $1000 \cdot (1,06)^1$

År 2: Belopp vid årets slut: $1000 \cdot (1,06)^2$

.....

År 10: Belopp vid årets slut: $1000 \cdot (1,06)^{10}$

Mönstret kan verifieras genom en jämförelse med de värden man fick tidigare. Man kan se hur kraftfull metoden med tillväxtfaktor är, genom att studera alternativa frågeställningar:

- Vad händer om tiden ändras till 20 år?
- Vad händer om startbeloppet ändras till 2000 kr?
- Vad sker om årsräntan ökas till 12%?

Ett kalkylprogram är en naturlig förlängning och ett kraftfullt hjälpmedel för vidare undersökningar.

På nivå 2 kan eleverna generalisera sina enskilda beräkningar för varje år och använda mera ändamålsenliga beteckningar:

$$A_0 = 1000$$

$$A_1 = 1000 + 1000(0,06)$$

eller

$$A_1 = A_0 + A_0(0,06) = A_0(1,06) \text{ och}$$

$$A_2 = A_1 + A_1(0,06) = A_1(1,06)$$

....

$$A_{10} = A_9(1,06)$$

Utveckling och insättning ger:

$$A_1 = A_0(1,06)$$

$$A_2 = A_1(1,06) = A_0(1,06)^2$$

.....

$$A_n = A_0(1,06)^n, \text{ där } n \text{ är antalet år}$$

och ett steg till i generaliseringen ger

$$A_n = A_0(1+r)^n$$

Efter nivå 2 kan eleverna fortsätta att generalisera det senaste sambandet så att r tolkas som ränta per investeringsperiod och n är antalet investeringsperioder. Man kan då behandla problem där räntan beräknas per halvår, kvartal, månad osv – till omedelbar kapitalisering och exponentialfunktioner.

På olika nivåer kan eleverna med hjälp av räknare och datorer diskutera problem såsom:

- När fördubblas värdet om
 - a) räntan fördubblas?
 - b) tidsperioden fördubblas?
- Vilka är fördubblingsperioderna om räntesatsen är 7%, 10% eller 20%?
- Man kan använda sambandet $d = 72/p$ för att uppskatta fördubblingstiden d , när räntan är p %.
- Testa sambandet för olika räntesatser och pröva dess tillförlitlighet.
- Hur mycket måste du sätta in i dag för att spara ihop till 200 000 kr på 20 år?

Symbolspråk och förståelse

Formler

För många är en formel inte någonting man kan tänka sig att förstå. Den bara finns. För en del är en formel to m avskräckande. Man *kan*, eller man *kan inte*, räkna med den. Man tänker sig inte att man skulle kunna tänka ut hur den har uppkommit eller hur man kan kontrollera att den är riktig.

Hur möter eleverna formler i grundskolan och i gymnasieskolan? Vad förväntas de förstå och göra?

I många tekniska sammanhang behöver eleverna kunna räkna med en formel. De byter ut bokstavssymbolerna i formeln mot givna numeriska värden i t ex $s = v \cdot t$ eller $U = R \cdot I$. Sammanhanget gör det meningsfullt, men det kan finnas en ingrediens av mekanisk obegrip- lighet i arbetet.

Eleverna kan bearbeta sin uppfattning av formler genom att berä- ta, förklara och argumentera kring de enkla formler eller regler de mött tidigt i grundskolan, t ex vid enhetsbyten eller area- och volym- beräkning. Diskussionen kan sedan utvecklas till andra formler som eleverna behandlat senare. Hur har man kommit fram till uttrycket för cirkelarean eller formeln $s = v \cdot t$? Hur kan man förstå och använ- da sambandet mellan Celsius- och Fahrenheitgrader?

Kontrollera formler kan eleverna också göra. Formeln för voly- men av ett klot kan vara svår att resonera sig fram till, men den går att kontrollera i en modell med mätglas och vatten.

Det kan också vara en upplevelse att konstruera en egen formel. Då eleverna gjort en formel själva, kan det vara lättare att acceptera formler som andra gjort.

Ekvationer

Man kan tycka att något underligt sker under grundskoletiden. En elev som tidigare utan vidare svarat på frågan ”Med vilket tal skall man dividera 12 för att få resultatet 4?” kan senare inte lösa ekvatio- nen $12/x = 4$. Hur kan detta komma sig?

Och hur kan det komma sig att en elev av fem i början av de tidiga- re treåriga linjerna inte kan lösa ekvationen $12 - 3x = 6$, även om eleven har läst särskild kurs tidigare? Betyder uttrycket $12 - 3x = 6$ just ingenting?

Man arbetar i allmänhet ganska mycket med ekvationslösning i grundskolan. Det är däremot mindre vanligt att eleverna konstruerar egna uppgifter, eller gör uppgifter till varandra – något som skulle kunna understödja deras begreppsbildning. Lärare som provat detta

berättar att om elever får be sina kompisar "ta reda på mitt tal", så kan de konstruera mycket "livgivande" ekvationer, och även ekvationssystem.

Kopplingen mellan ekvationsavsnittet och andra moment i kurserna bör observeras. I samband med formler finns det många problem som naturligt leder till ekvationer. Här kan eleven hämmas av traditionen att formler i första hand skall behandlas så, att man byter bokstäverna på ena sidan likhetstecknet mot siffror. Detta leder ibland till en viss oflekterad monoton i elevens arbete.

Procent är ett moment som kan tas upp i samband med ekvationslösning. Se på uppgiften: Hur många procent är 70 kr av 350 kr?

Vilket är lättast, att muntligt (eller skriftligt) beskriva och förklara,

$$\frac{70}{350} = 0,20 = 20\%$$

eller

$$70 = \frac{x}{100} \cdot 350?$$

- Prova någon av följande uppgifter med dina elever. Diskutera resultaten med dem och med dina kollegor.

- Välj en formel som du känner till, t. ex.

$$s = v \cdot t \quad \text{eller} \quad U = R \cdot I$$

Beskriv vad formeln innebär. Var används den, av vem och hur? Hur tror du att man kommit fram till den? Varför har man formler?

- Ta en tråd (t.ex. 48 cm) och forma den till rektanglar med olika bredd. Hur stora areor har rektanglarna?
Gör en värdetabell och ett diagram som visar hur rektangelns area beror av rektangelns bredd. Försök ta fram en formel som beskriver din värdetabell och ditt diagram.
Om du skriver in formeln på en dator eller en räknare kan du se om den ger samma resultat som du fått.
- Hur lång är den längsta stång, som får plats i en låda?
Uttryck stångens längd med hjälp av lådans kantlängder, så att ditt uttryck kommer att likna Pythagoras' sats.

Elevuppgifter

- 11 Vad betyder ekvationen $12 - 3x = 6$? Vad ska $3x$ vara för att likheten ska gälla? Lös ekvationen med olika metoder och jämför.
 - 12 Sambandet mellan Celsius och Fahrenheitgrader ges av sambandet $9C = 5 \cdot (F - 32)$.
 - a) Förklara för en besökande amerikan hur varmt det är när det är 37°C .
 - b) Hur många grader Celsius är 40°F ?
 - 13 a) Lös ekvationen $300 = 5x$.
 - b) Stina kör 300 km på 5 timmar. Vad har hon för medelfart? ($s = v \cdot t$). Vad finns det för likheter mellan denna uppgift och ekvationen i a) ovan?
 - 14 Hur många procent är 70 kr av 350 kr? Aziz löste problemet med hjälp av ekvationen $70 = \frac{x}{100} \cdot 350$. Hur tänkte han?
- Låt eleverna lösa uppgifterna.
Diskutera resultatet med dina elever och kollegor.

Litteratur

- af Ekenstam, A. (1982). Geometrin genom skolan. *Nämnnaren* 8(3), 10-21.
- af Ekenstam, A. (1991). Dubbel algebra. *Nämnnaren* 18(3/4), 130-134.
- Ahlström, R. (1994). Kan vi nå bättre resultat på högstadiet? *Nämnnaren* 21(4), 13-15.
- Brekke, G. & Støren, H. (1995). Kvalitet i matematikundervisningen. *Nämnnaren* 22(3), 10-14 och 26-27.
- Brekke, G. (1995). Opfatninger av desimaltall. *Nämnnaren* 22(4), 27-36.
- Dahl, K. (1995). Ger matematiken men eller mening? *Nämnnaren* 22(2), 15-22.
- Emanuelsson, G. (1995). Måltavlan: Språk, symboler och uttrycksformer. *Nämnnaren* 22(2), 2-3.
- Firsov, V. (1995). Algebra i olika former. *Nämnnaren* 22(3), 31-33.
- Grevholm, B. (1993). Vem ägnar sig åt matematik? *Nämnnaren* 20(4), 16-19.
- Grevholm, B. (1994). Ett centralt uttalande om flickor och matematik. *Nämnnaren* 21(3), 18-25.
- Gunnarsson, B. (1988). Metodikuppgift för livet? *Nämnnaren* 15(4), 11-14.
- Lerman, S. (1989). Att göra matematik. *Nämnnaren* 16(2), 6-12.
- Löwing, M. (1986). Vardagsdiagnostik. *Nämnnaren* 13(2-3), 104-105.
- Moberg, J. (1987). Hur kommer det att gå för Torvar? *Nämnnaren* 14(2), 20 - 21.
- Nämnnaren, Tema Diagnos och utvärdering. (1984). *Nämnnaren* 10(4).
- Rosén, B. & Svartborn, B. (1986). ELAM - Elev- och linjeanpassad matematik. *Nämnnaren* 13(2-3), 107-108.
- Ryding, R. (1984). Hur diagnostiserar man AMU-elever? *Nämnnaren* 10(4), 27-28.
- Silvén, S. (1995). Hur blev den intelligenta en "dum" elev. *Nämnnaren* 22(3), 16-19.

- Strandenes, B. J. K. (1989). Er undervisningsopp-
legget årsak til at mange elever har matematik-
kvanster? *Nämnaren* 16(1), 28-32.
- Wistedt, I. (1993). Matematiska samtal. *Nämnaren*
20(4), 21-23.
- Anderberg, B. (1992). *Matematikmetodik i grund-
skolan del 1 & 2*. Stockholm: Bengt Anderberg
läromedel.
- Anderberg, B. & Söderström, U. (1988). *Täljaren:
Bokstäver att räkna med*. Kristianstad: Utbild-
ningsförlaget.
- Björkqvist, Ole: Social konstruktivism som grund
för matematikundervisning. *NOMAD* 1(1), 8-17.
- Brandell, G. m fl (1994). *Kvinnor och matematik*.
Rapport från konferens i Luleå 13-16 juni 1993.
Högskolan i Luleå.
- Emanuelsson, G. & Johansson, B. (1995). *Kommen-
tarer till grundskolans kursplan i matematik*. Bi-
drag till Sveriges matematiklärarförenings som-
markurs i Mullsjö 18-21 juni 1995. Stencil.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Lingefjärd, T.
(Red) (1992). *Matematikämnet i skolan i inter-
nationell belysning*. Göteborgs universitet, Insti-
tutionen för ämnesdidaktik.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (Red)
(1992). *Geometri och Statistik*. Lund: Student-
litteratur.
- Granström, K. & Einarsson, C. (1995). *Forskning
om liv och arbete i svenska klassrum*. Stock-
holm: Skolverket.
- Johansson, B. (1993). *Nordisk matematikdidaktisk
forskning i dag. En kartläggning mot en histo-
risk bakgrund*. Göteborgs universitet, Institutio-
nen för ämnesdidaktik.
- Kilborn, W. (1979). *PUMP-projektet – bakgrund
och erfarenheter*. Skolöverstyrelsens Utbild-
ningsforskning FoU-rapport 37. Stockholm: Li-
ber Utbildningsförlaget.
- Kilborn, W. (1979). *Ämnesmetodiska processana-
lyser i matematik inom KomVux*. Rapport 8:1979.
Stockholm: Högskolan för lärarutbildning.
- Kilborn, W. (1991). *Didaktisk ämnesteor i mate-
matik. Del 2. Rationella och irrationella tal*.
Stockholm: Utbildningsförlaget.
- Kilborn, W. (1992). *Didaktisk ämnesteor i mate-
matik. Del 3. Mätning, geometri, funktioner,
sannolikhetslära och statistik*. Malmö: Almqvist
& Wiksell, Hermods.
- Kupari, P. (1993). Matematiken i den finska grund-
skolan. Attityder och kunskaper. *NOMAD* 1(2),
30-58.
- Ljung, B-O., Oscarsson, E. & Rosén, B. (1991).
*Översiktsdiagnos i matematik inför skolstarten
på treåriga gymnasielinjer*. Stockholm: PRIM-
gruppen, HLS.
- Nilsson, M. (1993). *Matematikundervisning i gym-
nasieskolan. Del I – III*. Lärarhögskolan i Malmö.
- Oscarsson, E., Rosén, B. & Ljung, B-O. (1990).
*Översiktsdiagnos i matematik inför skolstarten
på tvååriga gymnasielinjer*. Stockholm: PRIM-
gruppen, HLS.
- Stake, S. (1989). *Täljaren: Del av en helhet*. Kris-
tianstad: Utbildningsförlaget.
- Unenge, J., Sandahl, A. & Wyndhamn, J. (1994).
Lära matematik. Lund: Studentlitteratur.
- Wyndhamn, J. (1988). *Tankeform och problem-
miljö. Skolan som kontext för tänkande i elemen-
tär matematik*. SIC 26, 1988. University of Lin-
köping: Studies in Communication.
- Askew, M. & Wiliam, D. (1995). *Recent Research
in Mathematics Education 5–16*. London:
HMSO.
- Biehler, R. et al (Eds.) (1994). *Didactics of mathe-
matics as a scientific discipline*. Dordrecht:
Kluwer.
- Christiansen, I. M. (1994). "Informal activity" in
mathematics instruction. *NOMAD* 2(3/4), 7-30.
- Grevholm, B. & Hanna, G. (Eds.) (1995). *Gender
and Mathematics Education*. Lund: Lund Uni-
versity Press.
- McIntosh, A., Reys, B.J., & Reys R.E. (1992). A
proposed framework for examining basic number
sense. *For the Learning of Mathematics* 12: 2-8,
44.
- National Council of Teachers of Mathematics
(1990). *Teaching and Learning Mathematics in
the 1990s. NCTM Yearbook 1990*. Reston, Va.:
Author.
- National Council of Teachers of Mathematics
(1991). *Professional Standards for Teaching
Mathematics*. Reston, Va.: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics
(1994). *Professional Development for Teachers
of Mathematics. NCTM Yearbook 1994*. Reston,
Va.: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics
(1991). *Grades 9-12 Addenda Series: Algebra in
a technologicaal world. Connecting mathematics.
A core curriculum: Making mathematics count
for everyone. Data analysis and statistics across
the curriculum. Geometry from multiple perspec-
tives*. Reston, Va.: Author.

3

Elevens och lärarens ansvar

Matematik är av tradition ett ämne där läraren ger uppgifter som eleverna skall lösa. Leder det till att läraren övertar elevens ansvar för att lära matematik? Funderar eleverna överhuvudtaget på vad de lär sig och varför de behöver kunskaper i matematik? Kapitlet handlar om hur man kan inspirera elever att ta större ansvar för vad de skall lära sig, vad de skall arbeta med och på vilket sätt.

Mål att sträva mot

Skolan skall sträva mot att varje elev

- *tar personligt ansvar för sina studier och sin arbetsmiljö*
- *aktivt utövar inflytande över sin utbildning, ...*

Läraren skall:

- *utgå från att eleverna kan och vill ta ett personligt ansvar för sin inlärnin g och för sitt arbete i skolan, ...*
- *planera undervisningen tillsammans med eleverna,*

(Lpf 94, s 33)

Vad ligger bakom sådana honnörsord? Hur kan eleverna ta ansvar? Hur kan eleverna stimuleras till att ta ett personligt ansvar för sin inlärnin g? Det är frågor som angår både grundskolan och gymnasiet.

I allmänhet är eleverna vana vid att läraren tar ansvaret. Den elev som ropar "Jag har ingen penna!" säger i själva verket "Jag kan inte eller jag orkar inte ansvara för att ha min penna med mig – ta ansvaret du! Fixa det åt mig!" Och läraren fixar penna istället för att fråga: "Hur skall du göra för att skaffa dig en?" Om inte läraren lägger över ansvaret på eleven behöver eleven inte tänka på att ta med sig en penna i morgon heller.

Varje lärare känner igen denna situation. Den glömda pennan kan ges en symbolisk betydelse. Är det inte så att vi lärare av tradition tar på oss ansvar, i stort som smått, för att eleven skall arbeta i skolan i stället för att uppmuntra och stödja eleven att ta initiativ till eget ansvar för sina studier.

Vad är elevens ansvar i skolan? Är det att eleven gör som läraren säger, eller är det att eleven själv, inom givna ramar och under lärarens handledning, bestämmer vad som behövs för att nå de mål man gemensamt satt upp för arbetet?

Dubbla budskap

Många gånger ger vi eleverna intryck av att de själva får bestämma, men när vi inte är nöjda med resultaten tillåter vi inte misstag, som kan bli en konsekvens av detta ansvarstagande. Ena dagen säger vi kanske: ”Tänk själv! Ta ansvar själv!” Nästa dag talar vi om för eleverna precis hur de skall göra för att lösa ett problem, skäller på dem när de kommer för sent eller inte har läst på. Eleverna får med andra ord gärna göra som de själva finner bäst, bara de gör som vi säger.

Hur skall då ansvarsfördelningen vara? – Man kan uttrycka det så, att läraren ansvarar för att eleven utvecklar sin egen förmåga att ta ansvar. Hur skall det gå till? Hur kan man bäst stödja och stimulera eleven till eget ansvarstagande?

Ansvar är ett vidsträckt begrepp. Det täcker inte bara medvetna val och handlingar, utan också en känslomässig attityd, ur vilken skilda val och handlingar föds.

Att lösa en uppgift i boken

Eleven löser en matematikuppgift för att få och befästa ny kunskap. Men man förstår något nytt bara på grundval av vad man redan vet, och man skall aktivt bearbeta sambandet mellan den nya kunskapen och den man har.

Den som kan ställa frågor till sig själv har lättare att lära nya saker än den som väntar på besked om hur man skall göra. När man ställer frågor kring hur det nya hänger ihop med vad man redan vet är man inne i en kunskapsprocess. Det är en process som inte startar automatiskt – men som lärare kan man genom frågor inspirera eleven att förklara sitt tänkande. På detta sätt synliggör man både för eleven och läraren just denna elevs sätt att se på problemet.

Som lärare kan man försöka stimulera eleverna att ställa frågor till sig själva och andra, så att de upplever att det går bättre för dem och att de lättare får fram en lösning. Vi kan undvika att tala om hur man löser uppgiften, och i stället låta eleven ta initiativet genom lärarens frågor. Vi kan låta målet vara att eleverna så snart som möjligt på eget initiativ börjar ställa egna frågor, till oss, till sig själva eller till varandra. Detta kan ske i tre steg:

- Ställ frågor till eleven.
- Stimulera eleven att ställa frågor till läraren.
- Stimulera eleven att ställa frågor till sig själv och andra.

Det tar ofta längre tid att sitta med en elev och samtala om en uppgift med hjälp av olika frågor än att bara tala om hur man gör. Men den tid som investeras får man oftast tillbaka senare då eleven självständigt tar ansvar för sin problemlösning. Som lärare kan man också tala om för eleverna hur man ser på saken, t ex ”Jag sitter länge bredvid er därför att jag vill uppmuntra er till att tänka själva, jag tror nämligen att ni lär er bättre på det viset”. Vare sig vi säger något eller inte skall vi sträva efter att uppträda så att eleven uppfattar budskapet: För att lära sig måste man tänka själv. Det kan vara starten till en förändring från passivitet till aktivt ansvarstagande. Det är inte läraren som skall ta ansvar för att jag löser den här uppgiften. Det är jag själv som har ansvaret. Eleven tänker då kanske mera ”jag vill” än ”jag skall”.

Här är några exempel på frågor som det kan vara bra att ställa till eleven. Det är välkända frågor för de flesta, men de anger tonen:

- Hur tänker du?
- Vad vill du beräkna? Varför det?
- Föredrar du att skriva 5% som $5/100$ eller som 0,05? Varför?

Vem bestämmer vad som skall göras och läras?

Många uppgifter i läroböckerna är träningsuppgifter. Tanken är att förståelse och övning stödjer varandra. Men vilka och hur många uppgifter skall eleven räkna – och varför?

Många elever uppfattar helt enkelt matematiken som en samling uppgifter att ta sig igenom. De har minnen av både monotont räknande och hastighetstävlingar. De kan göra reflektioner om att uppgifterna är för svåra eller för lätta, och de finner dem mer eller mindre meningsfyllda. De känner igen – eller de känner inte igen – vad de tidigare varit med om. Men de funderar sällan över uppgifternas innebörd i meningen ”Vad kan jag nu som jag inte kunde förut? Vad har detta lärt mig?”

Tanken att eleverna själva skall kunna avgöra vilka uppgifter de skall räkna för att kunna säga ”Det här kan jag!” är främmande för många elever. Här påtar sig läraren ofta ensam ansvaret. Man gör (eller man gör inte) läxan. Sedan är det klart. Många vet dagen efter att de gjort läxan inte ens vad uppgifterna handlat om. Vad som hänt eller inte hänt i deras egen kunskapsutveckling reflekterar de inte över.

Denna attityd är inte sällan kopplad till uppfattningen att arbetet utgörs av att just räkna uppgifter. Man ser kanske vagt ett syfte med

dem – att lära sig mera matte – men att räkna ”talen” framstår ändå på ett säreget sätt som ett självändamål. Det är inte ovanligt med elever som inte vet vad uppgifterna behandlar och varför de räknar dem. Man skall bara göra det, matten är sådan. Det hela kan se bra ut – ”talen” är räknade, och dessutom rätt. I en mening visar det på personligt ansvar: ”Jag skall räkna och jag har gjort det”. I en annan mening visar det inte på personligt ansvar för studierna – tvärtom ger man bort det egna ansvaret genom att bara räkna det som är bestämt.

Elever kan ta ansvar

En lärare i en matematiksvag åk 1:

– Nu har ni visat att ni kan räkna med procent. Se nu efter om ni kan räkna ut det nya priset när man vet med hur många procent priset stiger eller faller? På sidan 87 har ni övningsuppgifter som handlar om det. Räkna så många uppgifter som ni tycker er behöva för att känna er säkra.

En förvånad elev:

– Men då vet ju inte du vilka uppgifter jag räknat? Du vet t ex inte om jag räknat nr 43! (Det hördes på tonen att här kunde man smita undan.)

Läraren svarade:

– Varför skall jag veta det då? Du räknar inte en uppgift för att jag skall veta att du gjort den utan för din egen förståelse. Bara du själv kan förstå vad det gäller, så välj de uppgifter som du tycker att du behöver öva på.

Kunde eleverna sedan ta ansvaret och stå för vad de lärt? Visst kunde de det. Dessutom kom en diskussion i gång. Vad handlade det om på nästa sida? Kunde man efter lärarens genomgång välja....? Men tänk om man valde bort någon uppgift som var viktig på något sätt? Skulle läraren säga till eller gå igenom...? Och betydde alltsammans att man inte behövde räkna uppgifter som man visste att man kunde? På detta sätt blev eleverna delaktiga i en inlärningsprocess under eget ansvar.

Att sätta mål för studierna

Elevers ansvarstagande hänger självklart ihop med att de känner att de arbetar för egna uppställda mål.

Att ta ansvar för något som man själv kommit fram till att man vill göra är en sak. Att ta ansvar för något som man mera dimmigt föreställer sig att man måste och egentligen inte vill, är en helt annan sak.

När man skall utveckla elevernas ansvarskänsla kan det vara bra att se på vilka motiv eleverna själva tycker att de har för att studera. De är huvudsakligen två:

- Eleven tycker att kunskapen är viktig i sig. Den har ett bruksvärde.
- Eleven tror eller vet att hon/han har användning för kunskapen i framtiden.

Många elever kan inte hänföras till någon av dessa grupper. De tror t ex inte att de senare kommer att få någon användning för skolans kunskaper – ”det finns ju inga jobb i alla fall”. Kanske har de inte heller människor kring sig som tycker att kunskaper är värdefulla i sig. Hur kan man visa dem att de har fel, och hur kan man då försöka motivera dem?

Att försöka med moraliska motiv svarar inte på elevens fråga varför det är bra med kunskaper. Man säger saker som ”Det förstår du väl att alla måste kunna!” eller ”Hur kommer det att gå för dig om du inte....” och förväntar sig, kanske omedvetet, att om eleven gör uppgifterna så får hon/han en viss tillfredsställelse mot att om hon/han inte gör uppgifterna så får eleven dåligt samvete. Men många elever tänker inte så. De låter sig inte manipuleras av en moralisk anledning som de inte kan se något skäl till.

Exempel på näraliggande mål

En lärare hade bestämt att uppgifterna 234 – 242 skulle räknas. Men det blev inte gjort. Eleverna skulle räkna, men de ville inte. Vad göra?

Den här läraren tänkte sig att man kunde ”dela på ansvaret”, så att han bestämde vilka uppgifter som skulle räknas, men gjorde detta i form av ett ”ackord”. Han sa alltså under de sista eftermiddagstimmarna: ”Räkna 234–242, när de är färdiga får ni gå hem.” Det räckte. Nu räknades det. Händelsen visar att eleverna inte tog något ansvar för sitt arbete – men den visar också på deras behov av ett näraliggande mål, och att en grund för ansvarstagande fanns bland dessa från början negativt inställda elever.

I stället för att bara tala vagt om framtiden i form av fortsatta studier (som eleven kanske inte har tänkt sig) eller yrkesarbete (som eleven kanske inte kan föreställa sig) kan man tala med eleven om framtiden nästa vecka eller nästa månad. Det blir mera påtagligt och konkret. Betyg skall eleven ha, och betyg förstår sig eleven på. Ett förslag är att eleven sätter upp betygsmål. Läraren kan visa hur arbetet den närmaste veckan eller månaden hänger ihop med motsvarande betygskriterier, och fråga eleven vad hon/han vill göra om det vi-

sar sig att det behövs färre eller fler lektioner än normalt för att nå det mål hon/han har ställt upp.

Med lektionerna är det ju i grunden så som det är med bokens övningsuppgifter, de är till för eleverna. För elever som behöver fler lektioner än normalt kan skolan ordna stödundervisning. Den elev som når sina mål på färre lektioner behöver inte delta i alla lektioner. Hon/han kan då få arbeta med det som intresserar henne/honom mest i skolan? Ett sådant synsätt rimmar inte bara med elevens eget ansvarstagande, utan också med läroplanerna:

För elever som har behov av extra stöd i skolarbetet under en begränsad tid skall stödundervisning anordnas

(Gymnasieförordningen, 8 kap. 1§)

Rektor har ett särskilt ansvar för att varje elev i dialog med skolan gör upp en individuell studieplan...

(Lpo 94 s 36)

Läraren skall organisera arbetet så att eleven

- *utvecklas efter sina egna förutsättningar och samtidigt stimuleras att använda och utveckla sin förmåga*
- *upplever att kunskap är meningsfull och att den egna kunskapsutvecklingen går framåt*

(Lpf 94, s 31)

För att eleverna skall kunna sätta upp mål för vad de vill lära sig i matematik är det bra om de inte enbart behöver lita till att all kunskap är värdefull, utan att de också vet vilka krav som gäller för olika betyg. För att eleverna skall få tydliga signaler angående de olika betygsstegen måste läraren ha en klar bild av de kunskapskvaliteter som varje betygssteg omfattar. Detta kan låta som en truism men kan vara en svårlöst uppgift.

De allra flesta elever brukar vara intresserade av att veta vad de kan. Att uppnå delmål ger också glädje. Den tillfredsställelse de känner då kan vara underlag för att motivera dem till nya ansträngningar. När elever, som är vana vid att få negativa besked om sina prestationer, ser att de kan något som motsvarar betyget *Godkänd* skjuter de i höjden av lycka. Sådana upplevelser borde vi skapa utrymme för så ofta vi kan!

Ansvar och val

Skolans förväntningar på eleven förmedlas bland annat i budskapet: "I varje ämne måste du försöka lära dig allt som läraren säger! Sen får vi se om du lyckas och vilket betyg du kan få!" För många elever är denna målsättning orealistisk. De varken vill eller kan leva upp till den. "Måste vi lära oss det här? Kommer det här på provet?" är frå-

gor alla lärare känner igen. Det är inte så underligt att eleven blir frustrerad – och svarar med tillgängliga medel – när hon/han inte kan ta till sig ens en liten del av det som förväntas. Budskapet ”ta till dig allt som läraren säger” är kanske inte lyckat.

Ge eleverna möjlighet att välja. Tala om för eleverna, klart och tydligt, vad de behöver kunna för betyget Godkänd. Säg ”det jag nu skall tala om måste man kunna för att bli godkänd”. Men säg också ”Det här är överkurs, alltså frivilligt”. Då kan eleven själv välja. Inte sällan är denna valmöjlighet en motivation för eleven, då den bygger på ett eget ansvar. Många elever som ser att de har det kunnande som krävs för betyget Godkänd börjar också med optimism på nästa betygsnivå. Andra gör det inte. De vill kanske nå målet Godkänd, men inte mera. En förutsättning är att kraven för Godkänd – ett betyg som skall innebära att man har baskunskaper – är så rimliga att i stort sett varje elev kan nå dit med någon ansträngning. Det är lärarens sak att intressera eleven för djupare kunskaper, men också att respektera elevens val.

Utvecklingssamtal

Hur kan man hjälpa eleverna att utveckla sin ansvarskänsla? En del elever kan uppleva att de inte har lust eller inte orkar studera matematik om de får ta för stort ansvar. Ansvaret kan helt enkelt bli för tungt. Den breda vägens lockelse är för övrigt stor, vare sig man är lärare eller elev. Har läraren ansvaret, konstrar man för att slippa, och är ansvaret ens eget – ja, då blir man trött och skjuter arbetsuppgifter framför sig.

En vanlig och god form för stöd är det kontinuerliga samtalet. Vi kan kalla det utvecklingssamtal. Det är samtal som bör läggas upp med utgångspunkt i den enskilda elevens behov och förutsättningar. Det bör också styras av elevens upplevelser i skolan och av elevens mål med studierna – inte enbart av lärarens eller skolans förväntningar eller förhoppningar på eleven. Om man tänker sig att eleven skall ta ansvar för vad hon/han vill med sitt arbete i skolan, är det också viktigt att eleven bemöts med respekt för de mål som hon/han ställer upp för sig.

Tillsammans med läraren sätter eleven alltså upp mål för sitt arbete i skolan. Vad skall hon/han lära sig och när skall hon/han göra det? Eleven får hjälp att förverkliga målet men styr själv den praktiska planeringen. Den tid som behövs för stödjande samtal kan vara mycket varierande. Det kan vara att man har ett 20–30 minuters samtal enskilt. Många gånger kan det räcka med någon minuts samtal i klass-

rummet. Det viktiga är inte samtalens längd utan elevens känsla av kontakt och stöd.

Vilka mål är rimliga? I utvecklingssamtal är det viktigt att inte bara se på dagsläget utan också ta hänsyn till elevens potentiella förmåga. Vad eleven inte kan förstå eller göra på egen hand *idag*, kan kanske förstås under en lektion då läraren förklarar, eller när eleven arbetar tillsammans med andra. Därefter mognar insikter om lärande och kunnande så att man kan komma vidare även på egen hand. För att göra eleven uppmärksam på detta kan man be eleven jämföra med hur liknande frågeställningar lösts tidigare.

Sammanfattning

Som lärare måste vi fråga oss vad ungdomarna vill med sina studier och hur skolan skall kunna stödja dem i deras arbete. I stället för att utforma skolans verksamhet på basen av regler om närvaro, uppförande, betyg och krav på prestationer, skulle man kunna utforma den utifrån de olika kvantitativa och kvalitativa kunskaper eleverna efterfrågar. Visserligen är det så att efterfrågan på kunskap är beroende av en kännedom om denna kunskap. – Man har svårt att fråga efter eller förstå värdet av något som man inte känner till. Det är också så att ungdomars förmåga att ta ansvar är under utveckling. Fullt ansvar kan man kanske inte begära av eleverna. En del måste vara obligatoriskt både i fråga om kunskaper och närvaro. Men arbetsuppgifternas utformning och t ex uppföljning av närvarostatistik kan underordnas elevens personliga mål med sina studier. På detta sätt kan man få en skolverksamhet som eleverna uppfattar som konsekvent och som stöder deras utveckling till ansvarstagande och harmoniska individer.

Bortse från konventionerna om gruppstorlekar, undervisning och närvaroplikt. Ta dessa sex elever som exempel. Utgå från följande utdrag ur Lpf 94:

Hänsyn skall tas till elevena olika förutsättningar, behov och kunskapsnivå. Det finns också olika vägar att nå målen. ...

Därför kan undervisningen aldrig göras lika för alla (s 24).

Hur skulle du lägga upp ett samtal med var och en av eleverna och hur skulle du vilja försöka arbeta med de här eleverna?

Sara

Sara har som mål i matematik att få betyget Godkänd. Hon är så pass duktig att hon kan skaffa sig de kunskaper som behövs utan att delta hela lektionstiden. Hennes stora intresse är videokunskap. Hon skulle vilja fördjupa sig mera i detta ämne.

Samira

Samira är också mycket duktig. Hon skaffar sig kunskaper motsvarande (Mycket) Väl Godkänd betydligt snabbare än din undervisning fortskrider. Hennes mål är att få (Mycket) Väl Godkänd.

Anton

Anton har som mål att få godkänt betyg. Han har svårt för att klara detta mål. Han behöver mycket hjälp och har dessutom dålig närvaro och visar lågt intresse. Det ser ut som om Anton skulle behöva alla lektioner och mer till (hemarbete, stödtimmar) för att ha någon chans till godkänt betyg.

Erik

Eriks kunskaper motsvarar enligt ett test åk 6. Erik vill inte sätta något mål för sig i matematiken, som han tycker är pest. Han säger att han struntar i om han får betyget Godkänd eller inte.

Jessica

Jessica har lika stor förmåga att ta till sig kunskaper som Sara. Hon behöver inte heller utnyttja hela lektionstiden, och hon är nöjd med betyget Godkänd. Men Jessica är inte intresserad av att fördjupa sina kunskaper i något av skolans ämnen.

Oscar

Han verkar kunna om han vill, men mesta tiden gapar han och stör arbetsro för både sina klasskamrater och din undervisning. På dina försök att få honom att arbeta svarar han bara: det är ingen idé. Det finns inga jobb och förresten vill jag inte göra något.

- Diskutera och jämför elevernas inflytande och ansvar med några kollegor. Utgå t ex från
 - lektionsarbetets innehåll och omfattning
 - hemarbetet
 - läromedel och hjälpmedel
 - prov och bedömning

På vilka punkter håller du med om att elevernas ansvar skall ökas?

- I en artikel i *Nämaren* av Blomhøj (1994) behandlas "det didaktiska kontrakt" som finns i varje klassrum. Där karakteriseras bl a traditionell matematikundervisning:
 - att läraren går igenom de metoder och algoritmer som presenteras i läroboken
 - att läraren bara ger uppgifter som eleverna på förhand har fått redskap att lösa
 - att en uppgift är löst, när dess fråga är besvarad
 - att ett önskat svar ges kortfattat med t ex ett tal, en figur eller en kort mening
 - att eleverna vill ha lärarens bedömning när uppgiften är löst
 - att elevers lärande bedöms enbart utifrån om de kan lösa de uppgifter som ges
 - att eleverna gör sitt bästa att lösa precis de uppgifter de fått

Detta leder ofta till en bedräglig trygghet i klassrummet, men undervisningen lever inte upp till intentionerna att elever skall tillägna sig kunskande och vetande, där de självständigt och kritiskt skall kunna använda matematik.

På vilket sätt påverkar det didaktiska kontraktet i klassrummet elevers ansvarstagande? Varför utvecklas denna typ av kontrakt i våra klassrum? Hur ser det didaktiska kontraktet ut i ditt klassrum?

- I en dansk studie i gymnasiskolas år 1 har Lindenskov (1994) funnit att eleverna i huvudsak har tre uppfattningar av matematik.

A Matematik är att räkna uppgifter som andra formulerat

B Matematik är en samling regler som andra satt upp

C Matematik är instrument för mänskliga intentioner

Eleverna har alltså en egen kursplan i A och B som stämmer dåligt med både lärarens och statens. Hur hanterar vid denna konflikt?

För många elever är matematik tydligen något som bara hör till skolan och som bara ett fåtal kan lära sig. Hur skall vi möta dessa uppfattningar? Fråga några av dina elever om deras kursplan i matematik – varför studerar de matematik, vad är det för ett ämne de studerar och vad är deras målsättning med studierna?

- Detta kapitel har diskuterat en lärarroll som i mycket skiljer sig från den "traditionella".
 - a) Vilket inflytande har dina elever på matematikundervisningens mål och aktiviteter?
 - b) Vilket ansvar tar dina elever för sitt arbete och lärande i matematik?
- Stieg Mellin-Olsen (1984) tar bl a upp de konflikter som eleven möter i skolan. Å ena sidan skall eleverna sorteras och socialiseras i ett bestämt samhällssystem och därtill hörande matematikkultur (som avspeglas i skolan). Å andra sidan har vi den ideologiska profilen att skolan skall ge utrymme för personlig, intellektuell och kreativ utveckling. Dessa funktioner möter eleverna dagligen i skolan. Hur ser de dem i sin matematikutbildning? Hur kan vi diskutera matematikundervisningens betydelse och roll i den konflikten, så att eleverna kan ta ansvar för sitt lärande?

Litteratur

- Blomhøj, M. (1994). Ett osynligt kontrakt mellan elever och lärare. *Nämnan* 21(4), 36-43.
- Ekström Holm, W. (1990). Samarbete – Självkänsla – Ansvar. *Nämnan* 17(2), 18-21.
- Lerman, S. (1989). Att göra matematik. *Nämnan*, 16(2), 6 – 12.
- Orstadius, P-A. (1984). Till en mattelärare om blockeringar och kursinnehåll. *Nämnan* 10(4), 24-26.
- Baird, J. R. & Northfield, J. R. (1992). *Learning from the Peel experience*. Melbourne: Monash University Press. (Valda utdrag från rapporten finns på svenska i ett häfte utgivet av Utbildarna, Eskilstuna kommun).
- Granström, K. & Einarsson, C. (1995). *Forskning om liv och arbete i svenska klassrum - en översikt*. Stockholm: Skolverket.
- Häglund, S-O. (1995). *PLAN - ett projekt för lärande under eget ansvar*.
- Gökstenskolan, Eskilstuna kommun.
- Nissen, G. (1994). Matematikundervisning i en demokratisk kultur. *NOMAD* 2(2), 58-69.
- Skolverket (1995) Utvecklingssamtal. En mötesplats för elev-föräldrar-lärare. Stocholm.
- Eriksen, D. B. (1993). *Personlige og sociale sider ved tilegnelse af faglig viden og kunnen i folkeskolens matematikundervisning*. Ph.D-avhandling. København: Danmarks Lærerhøjskole.
- Lindenskov, L. (1994). Samtalen der blev væ – om elevens egen læreplan. I G. Nissen & M. Blomhøj (Red). *Hul i kulturen*, Sæt matematiken på plads i kultur- og samfundsbilledet. Viborg: Spektrum.
- Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og samfunnet*. Larvik: NKI-forlaget.
- Mellin-Olsen, S. (1989). *Kunnskapsformiddling. Virksomhetsteoretiske perspektiver*. Rådal: Caspar Forlag.
- Nickson, M. (1994). The culture of the mathematics classroom: an unknown quantity? In S. Lerman (Ed.), *Cultural perspectives on the mathematical classroom*. Dordrecht: Kluwer.
- Skovsmose, O. (1994). Kritisk matematikundervisning? I G. Nissen & M. Blomhøj (Red) (1994), *Hul i kulturen*. Sæt matematik og matematikundervisning på plads i kultur- og samfundsbilledet. Viborg: Spektrum

4

Utvärdering av kunskaper

De flesta lärare funderar säkert ofta över vilken vikt man skall ge resultat på prov när man skall sätta betyg på sina elever. I Lpf 94 sägs att läraren vid betygsättningen ska göra en allsidig bedömning och beakta såväl muntliga som skriftliga underlag. Därför är det viktigt att hela tiden försöka hitta nya situationer där eleverna ges tillfälle att visa sitt kunnande. Vad är det vi skall och kan värdera? Vad är det vi kan iaktta och låta vara grund för betygen? Varför är det så viktigt med utvärdering?

Kontinuerlig utvärdering

En lärare som kontinuerligt vill följa elevens kunskapsutveckling strävar med sin utvärdering att finna varje tecken på framsteg hos eleven. Det som bokförs är framsteg och inte misslyckanden. Viktigt är att eleven är väl införstådd med vad som sker och upplever att hela utvärderingsprocessen stöder och hjälper till att nå uppställda mål. Det är fråga om att hela tiden hjälpa eleven att få maximal behållning av matematikstudierna. Om detta står klart för eleven, kommer utvärdering inte att upplevas som kritik eller enbart underlag för betyg.

När målen för studierna är tydliga för eleven vinner man också att eleven lättare tar eget ansvar för sitt arbete och accepterar en utvärdering som hjälp i detta arbete. Eleven kan sträva mot ett överskådligt mål, välja rätt uppgifter att lösa samt förstå att man måste gå vidare från väl grundade kunskaper. En *kontinuerlig* uppföljning och utvärdering kan ge eleverna ett viktigt stöd genom att deras arbetsinsatser och resultat hela tiden uppmärksammas. En klarhet och öppenhet gentemot elever och föräldrar i fråga om förväntade och uppnådda resultat ger också trygghet och en god arbetssituation.

Prov som styr

En bekant sanning är: ”Det som testas är det som lärs in. Det som inte testas lärs inte in”. På elevspråk blir det *Kommer det på provet?*

Det är nödvändigt att använda varierade testmetoder för att komma åt de olika aspekter på kunskaper och färdigheter som värdesätts

och att kunna visa eleverna vad det är som gäller. Det behövs också metoder för att kunna undersöka om elevernas kunskaper är gedigna och användbara. Märker eleverna att läraren verkligen försöker komma åt att bedöma detta blir elevens kunskapsinhämtande mer målinriktat.

Varje lärare måste vara medveten om vilka konsekvenser för elevernas arbete som en viss testmetod har. Förståelseinriktning behöver inte utesluta att man värdesätter förmågan att snabbt och rätt göra algebraiska manipulationer. Men det kan hända att man genom sina testmetoder kommit att högt värdera ett inlärt schema för lösning utan att undersöka om eleven muntligt skulle kunna beskriva hur uppgiften kan lösas. I kursplanen för kurs A understryks speciellt att det är viktigt att eleverna lär sig

- *förstå och föra matematiska resonemang samt redovisa sina tankegångar muntligt och skriftligt*
- *skapa och använda matematiska modeller samt kritiskt granska deras förutsättningar, möjligheter och begränsningar.*

s 146

I det följande beskrivs några metoder som använts för att styra undervisningen och arbetet i denna riktning.

Portföljer

En *Matematikportfölj* innehåller en utvald samling arbeten, som eleven åstadkommit under en kurs – skrivningar, prov, laborationsredogörelser, projektarbeten och allt annat material som kan visa vilka framsteg eleven gjort under kursens gång. Sådana matematikportföljer används i flera länder som viktiga underlag för utvärdering, inte bara av elevers utan också av lärares och skolors arbeten.

En elev bör själv kunna ansvara för att visa upp en mapp med ett bra innehåll. När han/hon väljer att ersätta något i portföljen med ett senare och bättre arbete, känner eleven att gamla misstag glöms bort och att han gör framsteg.

I början är eleverna kanske inte vana vid att ta ansvar. När idén med portfölj introduceras frågar de *Vad händer om min mapp är tom när kursen är slut?* – Ett svarsom man kan ge är – *Vad vill du då bli bedömd på?*

Dagbok

I arbetet med att göra mål och aktuella resultat tydliga kan man ha hjälp av en journal, som varje elev för över sina studier i matematik. *Dagboken* kan bestå av lösa blad med förtryckta kolumner eller av en anteckningsbok som eleven själv skaffar och vars innehåll ges en individuell utformning.

Anteckningarna ger eleven fortlöpande övning i att konkretisera och skriftligt formulera sina tankar i och om matematik. Det här är viktiga övningar. Man bör avsätta tid till anteckningar i dagboken och göra klart för eleverna att detta arbete värderas högt.

Vid försök, som gjorts med dagbok, har man funnit en utveckling från attityden: *Jag förstår inte meningen med det här till Aha, man greppar ju en massa när man måste lura ut vad man ska skriva så att det blir vettigt.*

Här följer två exempel på dagböcker. Den första användes i en specialklass och den andra i en samhällsvetarklass.

Datum	Aktivitet (Nr på uppgift)	Vad jag har gjort och lärt mig
12/9	234 – 248	<i>Lade ihop bråktalet. Man ska göra samma nämnare, annars går det inte. Alla uppgifterna hade a - f!</i>
14/9	Stinas huvud	<i>Alla gissade hur många liter mjölk som får plats i Stinas huvud, sedan mätte vi med linjal och räknade som om det var fyrkantigt, sedan lånade vi Elkas måttband och mätte runt. Formel för volym av klot är $3,14 \cdot R^3 \cdot 4/3$. Vi mätte på många cirkel. $3,14$ kallas Pi och är ett tal som bara blir när man mäter på cirkel.</i>
19/9	248 – 252	<i>Nu kan jag lägga ihop två bråk! Man ska säga stycken – alltså två stycken tredjedelar. Om jag lägger ihop två stycken tredjedelar och tre stycken femtedelar så får jag fem delar äpple men jag vet inte hur mycket äpple jag har. Jag måste ha lika stora delar innan jag lägger ihop.</i>

Datum	Arbete	Resultat
12/2	Laboration: Studs med liten boll	<i>Sambandet mellan fallhöjd, x, och studshöjd, y, kan skrivas $y = k \cdot x$. Grafen är en rät linje. Man säger att y är <u>proportionellt</u> mot x, och att y är en <u>linjär</u> funktion av x.</i>
13/2	Genomgång av $f(x)$	<i>$f(2)$ står för <u>värdet</u> av det uttryck som är $f(x)$ då man sätter in $x = 2$. $f(x)$ är en <u>symbol</u> som man inte får dela på, t ex bryta ut ur.</i>

Det är viktigt att förklara att dagboken inte ska användas av läraren som en kontroll av vilka uppgifter eleven räknat. Det visar sig att många elever, speciellt de med lägre ambitioner, vill att det ska räcka med att anteckna numren på de uppgifter som man klarat av. De finner en viss mening även i detta genom att de tycker sig få ”kvitto” på sitt arbete.

Dagböckerna ger läraren möjlighet att överblicka arbetet när eleverna arbetar med olika moment. Efter ett avbrott för gemensam aktivitet kan eleven i dagboken friska upp minnet av det arbete han höll på med när det är dags att återuppta det igen. När man blivit van vid att föra mattedagbok kan läraren inkludera uppgifter som är avsedda för framtida utvärdering. Man kan t ex låta klassen diskutera nyttan av kunskaper i bråk- eller procenträkning och uppmanar sedan eleverna att skriva ner en resumé av diskussionen och illustrera egna åsikter i frågan med exempel.

I dagboken kan eleven med egna ord beskriva genomgångar som läraren gjort på tavlan. I den kan eleven notera svårigheter vid hemarbete och anteckna förklaringar till det som varit svårt eller oöverkomligt hemma. Det ska också finnas sammanfattningar av resultat från mattelaborationer medan anteckningarna från varje enskild laboration kan anses vara bilaga till dagboken. Resultat av projekt eller grupparbeten kan också sammanfattas i dagboken eller vara bilaga till den.

Hur mycket man arbetar med dagboken i matematik och hur man utformar den kommer naturligtvis att variera mycket kraftigt beroende på vilken typ av elever som ska använda den. Idén har prövats i en specialklass med mycket svaga elever. Det var bra att ha en loggbok när var och en arbetade med ett eget område och med olika böcker. Först kändes det bra för eleverna att visa kvitto på att arbete förekommit. Så småningom blev anteckningarna mera omfattande. Man

gick över från att anteckna att man *arbetat* till att anteckna *vilket område man arbetat med* och vidare till att notera *vad man tyckte att man hade lärt sig*. Dagboken blev mycket viktig för dessa elever. De skulle inte ha betyg. Den blev kvittot på deras arbete. Framgången ledde till att idén prövades också i andra klasser. Det finns naturligtvis en del elever som inte förstått tanken med dagbok och som skriver – *Kära dagbok! I dag räknade jag åtta tal. Vårn fröken är världens bästa fröken.*

När läraren lovade att man fick ha dagboken med sig på proven började de flesta elever försöka att skriva. Men många av dem fann det så svårt att de ville ge upp. Det är också svårt att inte hjälpa till i början. Det är ju viktigt att eleven inte tror att det är fråga om att anteckna efter diktamen eller att kopiera förklaringar ur boken. Det är de egna tankarna som ska beskrivas. Det är markant hur förvånade eleverna blir över att det inte är så mycket text som behövs för att fröken "ska bli glad".

Men när läraren så hävdade att dagböckerna skulle föras på ett sådant sätt att de kunde bli underlag för betygssättningen blev det opposition. *Det har du inte rätt att göra. Ingen annan gör så!*

Kunskapsmatriser

Om man väljer att använda projektarbeten, grupparbeten, laborationer, ofta återkommande småtest och läxförhör för att bedöma elevernas framsteg behöver man kontinuerligt notera och systematisera de upplysningar och intryck man får i olika sammanhang. Ett projekt kan t ex ge en elev tillfälle att räkna procent, andra laborerar och arbetar med geometri och någon håller ett föredrag om trigonometri.

Man kan känna behov av att förenkla och systematisera sina anteckningar. För att lätt få överblick över mängden av elevdata kan man sätta upp *kunskapsmatriser*, som man kopierar i klassuppsättning och fyller i för varje elev. Utformningen av matrisen kan bero på vad läraren anser viktigt och vilken typ av klass det gäller. Man får pröva sig fram och se vad som passar.

Läraren ska ju individualisera och hålla reda på vad varje elev behöver. Om man använder kunskapsmatriser på rätt sätt och i lagom omfattning behöver det inte uppfattas som ett onödigt arbete.

För att eleven inte ska uppleva registreringen som mekanisk eller obehaglig är det viktigt att man är mycket öppen, visar vad som står i en elevs matris och gärna noterar framsteg tillsammans.

Om läraren sköter "sina kort" på rätt sätt, kommer de att bidra till att elever och föräldrar känner förtroende. Man kan vid varje tillfälle, vid föräldra- eller elevsamtal, tala om hur man uppfattar elevens stu-

diesituation i matematik och peka på de skriftliga grunderna för bedömning.

Eleverna riskerar inte att övervärdera sina kunskaper och behöver heller inte gå och oroa sig för att läraren undervärderar dem. De vet fortlöpande vilka anteckningar som görs. Bra utformade matriser kan på så vis ge eleverna styrning och uppmuntran.

Den mest minimala kunskapsmatris man kan sätta upp är den som utgörs av någon kombination av kursplan och betygskriterier. För mycket snabbbläsande elever på naturvetenskapligt program kan detta möjligen vara tillräckligt, men för andra elever får man nog söka efter ”steg” som ska leda fram till slutmålet. Ju fler steg desto bättre uppmuntran för den som lär sig långsamt. Å andra sidan förlorar man lätt överblicken över hela kursen om man har ett mycket stort antal delmål, och läraren får ett orimligt arbete med att uppdatera elevdata.

En kombination av delvis överlappande matriser med varierande finmaskighet och av olika typer är troligen mest realistiskt. Det här är i högsta grad ett område där varje lärare måste söka sig fram, styrd av sina egna värderingar och sina existerande rutiner samt av elevgruppernas sammansättning.

Nedan följer några exempel på delar av matriser för individuell kunskapsuppföljning.

En notering i kolumnen ”inte” betyder att eleven studerat området och att man iakttagit en brist som måste åtgärdas. Eleven kan inte momentet. Det ska vara en uppmaning till lärare och elev att snarast göra någonting åt det.

Kolumnen ”ibland” är intressant. Den kan egentligen bara användas om kunskaper som innebär rutinarbete. Att man kan ”ibland” betyder vanligen att eleven har ett ofullständigt tankemönster eller som behöver förstärkas. En notering i kolumnen ”har fullgod förståelse” betyder att man har tydliga bevis på att elevens kunskaper inte bara omfattar algoritmen för en beräkning utan att eleven förstått det begrepp det är fråga om.

Då anteckningarna görs efter vad man tror gäller, kan det hända att det senare dyker upp i en kolumn till vänster. Man får då stryka tidigare notering till höger och ta nya tag. Exemplet med procenträkning

Eleven kan	inte	ibland	alltid	har fullgod förståelse
Beräkna ändringsfaktor	läxf 12/1	10/1 test 14/1	prov 20/1 muntl. 23/1	prov 20/1 projekt 27/2

förutsätter att eleven nått ”fullgod förståelse” för olika typer av procenträkning, innan läraren kan tänka sig att göra en notering i kolumnen till höger. Ett högt mål att sikta mot!

Nedan visas ett exempel på en detaljerad matris för studier av området ”problemlösning med hjälp av skala”, för en klass med låg studietakt. Matrisen hjälper eleven att överblicka området och ger god plats för uppmuntrande noteringar.

Genom att låta eleverna i förväg ta del av de matriser man använder för bedömning av t ex grupparbeten, projekt, föredrag och problemlösning informeras eleven på ett öppet och förtroendeskapande sätt om vad han/hon ska sträva mot och vad som är värdefullt.

- Diskutera för- och nackdelar med matematikportfölj.
- Prova idén med matematikdagbok en viss tid, t ex någon månad. Diskutera erfarenheterna.
- Gör en kunskapsmatris för någon del av matematikkursen och prova den. Diskutera utfallet av matrisen med dina kollegor.

Småtest

Det finns fördelar med ofta återkommande småtest. Men de får inte upplevas som stressande av eleverna eller innebära ett alltför betungande rätningsarbete. Ett sätt att klara detta är att låta eleven själv rätta sina test eller att inte rätta så att man sätter poäng eller ger resultat i form av graderade omdömen utan fritt skriver vad man tänker, t ex ”läs på mer”, ”Bra” eller ”OK”. Man kan diskutera om det är nödvändigt att rätta alla test eller uppgifter bara man ger lämplig och snabb återkoppling till eleverna. Man kan se igenom bunten och skaffa sig ett intryck och sedan sortera ut några elevers test för åtgärd. Om

Eleven kan	inte	ibland	alltid	i svåra problem
Bestämma skalan				
Beräkna bildens storlek				
Beräkna föremålets storlek				

avsikten var att ta reda på vilka elever som lärt sig behärska ett visst område, sorterar man ut de godkända och noterar deras framsteg. Om avsikten var att få veta vilka som behöver arbeta ytterligare med ett visst moment så noterar man bara vilka dessa är. I deltest eller läxförhör är läraren mindre bunden än vid ett större prov. Tidsåtgången kan avpassas fritt och en felbedömning i formuleringen av en uppgift får inga allvarliga konsekvenser. Man kan experimentera i jakten på bra uppgifter.

För att kraftfullt kunna visa eleverna att det inte bara är "svaret" (i form av ett tal) som är väsentligt utan att det ingår i kraven att de ska kunna redovisa sina tankegångar skriftligt, kan ett prov bestå av en enda uppgift till vilken läraren ger svaret. Eleverna ska sedan ge en fullständig lösning som leder till detta svar.

I *Measuring What Counts* (Mathematical Sciences Educational Board, 1993) föreslås att eleverna ska få öva sig i grupp på att betygssätta olika fiktiva lösningar på problem för att de på så sätt ska bli medvetna om hur en lösning kan utformas för att bli bra.

En fri behandling av resultat gör det lättare att använda verklighetsanknutna problem av öppen typ, då det inte finns bara "ett" svar (Se t ex Problemsamling, s 115). Eleven kanske måste göra egna antaganden om de data som behövs eller välja mellan olika metoder att lösa uppgiften. Eftersom svaret inte är entydigt måste eleven inte bara göra egna bedömningar utan också argumentera för sina slutsatser. Sådana uppgifter ger god grund i att förklara sina tankar – både skriftligt och muntligt.

Exempel på uppgifter

Under första terminen i en samhällsvetenskaplig klass fick eleverna arbeta med en typ av läxförhör där det begärdes både konstruktion av enkla uppgifter och skriftliga beskrivningar av hur man löser en uppgift av en viss typ. Dessa skulle kunna följas upp av en direkt motivering av varför den beskrivna algoritmen ger en korrekt lösning.

De första proven rev upp en proteststorm. Eleverna ifrågasatte lärarens rätt att bedöma och betygssätta dem med hjälp av "sådana konstiga prov". De var speciellt harmsna över att det begärdes av dem att de skulle svara på frågor som de aldrig träffat på förut. De fick skriva ner sina synpunkter och lämna in dem anonymt. Här är några typiska exempel på deras "brev":

– Jag tycker det var ett dåligt läxförhör. Som t ex gällande siffror. Räcker det inte att man vet att det ska vara t ex 2, utan måste veta varför, historien till det och dess konstiga anledningar. Då blir man ju snurrigare än om man lär sig reglerna.

– Jag tycker inte provet var bra. Det bevisar ju inte om man kan räkna ut ett tal. Om man ska tänka på varför ett tal blir som det blir så kommer det bara att röra ihop allting. Det skulle vara bra om man fick lära sig reglerna på nya tal. De gamla kan vi redan. Men man kan inte lära de som redan kan reglerna ett nytt sätt. Det får man göra med dom som börjar sjuan (om inte ännu tidigare).

Elevuppgifter

- 1 Man mäter höjden av en dörröppning. Hur många gällande siffror bör man ange i resultatet, vid mätning i millimeter?
- 2 Ge ett exempel på addition av två bråk.
- 3 Beskriv med både egna ord och matematiska termer hur man adderar två tal i bråkform.
- 4 Hitta på ett problem, som leder till den beräkning du utförde i uppgift 2.
- 5 17% av 200 kr är 34 kr. Beskriv detta samband utan att använda begreppet procent.
- 6 Då ett kapital ökar med 5% blir ändringsfaktorn 1,05. Varför?
- 7 Hitta på ett sifferexempel som visar hur du kan beräkna en procentuell ökning när du vet det ursprungliga värdet och det nya värdet.

- Pröva uppgifterna med dina elever.
- Diskutera med kollegor hur elevernas arbete ska bedömas. Hur kan resultatet användas?

– Det var jättesvårt och löjligt. Jag har inte lärt mig i grundskolan varför utan bara hur man gör.

– Jag har aldrig haft läxförhör i matte förut. Det är mycket svårare att förklara saker med ord än med siffror. Jag satt kvällen innan och repeterade. Jag fick ingen nytta av det.

– Jag har aldrig fått lära mig att tänka så. Att hitta på exempel är inte så himla lätt när hjärnan är inställd på nåt annat.

På höstens föräldramöte redogjorde läraren för sina metoder och sa bland annat:

”Denna matematik har eleverna redan arbetat med i grundskolan. Många av dem har fortfarande stora svårigheter. De har då kanske lärt sig hur men inte varför. De är nu mogna att få en ny chans att inse vad förståelse i dessa sammanhang är, så att de kan sträva mot den. Eftersom tiden att klara av detta är kort har jag valt att ta till kraftfulla metoder för att få fram dessa insikter. Om det inte lyckas kommer det att bli svårt med de senare delarna av kurserna. Det kan gälla inte minst de elever av typ duktiga flickor, som snabbt har lärt sig att räkna felfritt enligt vissa algoritmer, men som kanske just därför inte kommit att inse vikten av att sträva efter förståelse”

De mest högljudda protesterna hade också kommit från denna grupp av elever, som ju vågar och kan uttrycka sina åsikter. Med stöd från hemmen ökade lärarens tidigare minimala popularitet avsevärt. Det visade sig att det funnits stor oro även bland föräldrarna över de för dem ovana metoderna.

När man börjar använda deltest är det en fördel att starta med sådana i vilka alla kan bli godkända. Då kan testen bli populära och efterfrågade, speciellt i klasser med elever som tror att de aldrig kan lära sig matte. De som fått underkänt på ett prov ber att snarast få ett nytt. De vill läsa mera, får kvitto på sitt arbete och känner att de gör framsteg.

En bra form för ett småtest är ”Brev till en sjuk kamrat”. Brevet går ut på att eleven ska förklara för en kamrat, som inte varit med i undervisningen. Eleven försätts i en lärarroll och har ett starkare tryck på sig att ge en sammanhängande framställning. Det förefaller också som om situationen gör det lättare att hitta på egna exempel för att illustrera. Det visar sig att eleverna uttrycker sig tydligare när de vänder sig till varandra med förklaringar än när de ska redovisa lösningar för läraren, som ju redan vet hur det är. Breven kan utvärderas på olika sätt. Ett sätt är att låta eleverna jämföra och diskutera varandras

brev. Skulle du ha förstått med hjälp av den här förklaringen? Varje grupp kan kanske sedan sammanställa en förbättrad förklaring.

Problemlösning

För att visa att problemlösning är viktigt måste problem av typer som eleverna inte träffat på tidigare förekomma både i undervisningen och på proven. Det ställer speciella krav på konstruktion av uppgifter. Det är viktigt att man som lärare gör klart för sig själv vad man vill med uppgifterna, så att man inte får med uppgifter som egentligen är intelligenstag. Risken blir att alla uppgifter av den nya arten uppfattas just som intelligensprov. Sådant skulle ju riva ner mer än bygga upp elevernas självförtroende. Det gäller att konstruera problem som går att lösa med hjälp av de tankevanor och metoder som eleverna tillägnat sig i undervisningen, utan att uppgifterna för den skull är av någon standardtyp (se även kapitel 7).

Provuppgifter

Studier har visat att ett trevligt innehåll höjer lösningsfrekvensen på provuppgifter. Jämför t ex följande varianter av en uppgift.

Elevuppgifter

8 Du befinner dig på Skattkamarön med en skattkarta i handen. På kartan finns ett skelett, ett träd, en grotta och ett kryss. Hörnet med skalangivelse har tyvärr mulnat bort.

Enligt kartan ska du gå från det döda trädet till skelettet och sedan i riktning mot grottan till den plats som markeras med ett kryss på kartan.

Du har hittat trädet och skelettet och står nu vid detta och tittar mot grottan. Den ligger ganska långt bort och du vill inte gräva i onödan i den heta sanden. Hur ska du göra för att finna den plats som markeras av krysset på kartan?

9 En ritning saknar skala. Hur kan man bestämma denna?

Den första uppgiften (8) får högre lösningsfrekvens än (9). Provuppgifter av flerstegstyp, med ökande krav på förståelse, kan ge tydliga anvisningar om vilka stegen mot ökande förståelse är och vart eleven ska sträva. Sådana uppgifter är inte alltid lätta att konstruera. Man får en naturlig stegring mot ökad förståelse om man håller sig till en och samma berättelse eller situation.

För att förtydliga målen kan man tala om vad uppgifterna testar på vissa nivåer. Man behöver då inte söka efter situationer som ger upphov till problem med naturligt ökande grad av komplexitet. Man kan nöja sig med att finna exempel på olika nivåer, men kanske på samma tema. Det viktiga är att eleven själv ser på vilken nivå han/hon befinner sig. Han/hon ska helst vara medveten om strukturen i testet och i stället för att tänka *Jag hade 15 poäng – ett mer än Kalle!* så ska hon kunna t ex inse att hon har god förståelse för geometri, men bara klarat av de uppgifter på statistik som innebär rena utantillkunskaper.

Projekt

Ett projekt ska ge eleven ett antal minimål, som han känner sig starkt motiverad att sträva mot. I stället för att läraren säger *Nu räknar ni alla uppgifterna 213 – 218* uppkommer då en situation som gör att eleven säger *I mitt projekt om tågluffning har jag fastnat på valuta-nyckeln. Hur räknar man?* Han kan då bli hänvisad till ex 213 osv, som handlar om valutaomräkningar och kanske till kapitlet om överslagsberäkning. Eleven använder sig då av bokens material på ett medvetet och motiverat sätt, med sitt individuella minimål framför sig och kan direkt själv bedöma om förståelse uppnåtts.

Om det är möjligt ska projektets innehåll vara sådant att eleven verkligen känner intresse och är motiverad att söka kunskaper i anslutning till det. Innehållet ska gärna väljas så att det anknyter till "trevliga" saker. Eleven kan mycket väl inse nyttan av att räkna på skatter och familjebudget. Men det kanske är roligare och troligen lättare att planera en utlandsresa med bil eller hur man ska finansiera köp av motorcykel (banklån, avbetalning, sparande, ... Jfr Rosén 1994).

Samarbete med andra ämnen, speciellt samhällskunskap, kan ge idéer till lämpliga projekt. Man kan samla statistiskt material, t ex hur många kvinno- respektive mansnamn det finns på kultur- respektive sportnyhetssidorna, och presentera materialet i lämplig form och dra slutsatser av det. Se även kapitel 6.

Ett exempel på ett lyckat projekt var en flicka som gärna ville köpa sin favorithyrhäst. Hon räknade på utgifter för stallhyra, transporter, utrustning, mat och på olika möjligheter att finansiera köpet. Jämförelser mellan olika försäkringsbolags villkor gav anledning till mycket matematik (olika premier och självrisakens grundbelopp, med tillägg av viss procent på belopp över grundbeloppet och med hänsyn taget till hästens ålder). Beräkningarna måste sedan modifieras när hon fann att hon inte hade råd att ensam köpa hästen, utan måste räkna med att dela den med en eller flera andra. Hon kom också på att hon måste ha en buffertsumma kvar om hästen blev sjuk. Projektet pre-

senterades i ett föredrag för klassen och gav då upphov till diskussioner med bra matematiskt innehåll.

I *Measuring What Counts* rapporteras om försök i Nederländerna, där man delar upp projektarbetet i två delar. Eleverna, som gick 11:e skolåret, fick först göra ett 45 minuter långt test i klassrummet. Detta rättades av läraren, och eleverna fick tillbaka testet med de grövsta felen eller missuppfattningarna rättade. Sedan arbetade de vidare under en längre period, hemma eller i skolan. Slutligen lämnade de in sitt projektarbete för förnyad bedömning. Det visade sig att speciellt flickorna klarade sig bättre när de kunde arbeta utan tidspress och fick sträva efter att visa upp så mycket kunskaper som möjligt.

Det är bra om eleven själv kan finna ett ämne för sitt projekt. Det får inte vara så att sökandet efter material upptar för lång tid inom projektet, utan det gäller att visa upp så mycket bra matematik som möjligt (Jfr Stephens 1994).

Ett exempel på en mall för ansökan om projekt är följande:

<i>Projektets namn:</i>	
<i>Innehåll:</i>	
<i>Arbetsordning:</i>	
<i>Förväntat utbyte och resultat i matematik:</i>	
<i>Beräknad tidpunkt för redovisning:</i>	

Detta med "Förväntat utbyte ..." är en viktig del av projektets uppläggning och genomförande. Eleven ska söka efter exempel från olika områden av matematiken, ju fler dess bättre. När projektet redovisas kan en elev, som med hjälp av sin kunskapsmatris eller på annat sätt identifierat målen för sina studier, också precisera vilka delar av kursen han/hon övat på. I bästa fall kan detta ge riktad motivation till kamraterna.

Skillnaden i engagemang för ett fiktivt projektproblem och ett hämtat ur verkliga livet kan illustreras med ett exempel som handlade om en lärares altantrappa. Uppgiften var först att konstruera minst tre olika förslag till 1,0 m höga och 1,2 m breda altantrappor. Alla elever i en invandrarklass fick uppgiften och kom tillbaka utan att ha någon lösning. De sa att det var svårt, tråkigt och obegripligt. Läraren berättade

tade då att det var fråga om hennes egen trappa och att hon hade hoppats få hjälp med beräkningar och jämförelser för trappor av trä, betong, osv. *Problemet måste lösas.*

Projektet engagerade nu alla och man bildade grupper som tävlade med varandra och som räknade på volymer, virkesspill, hela säckar betong, antal resor med bilen etc. – Ingen elev drev sitt kritiska tänkande dithän att man föreslog läraren, att i stället för att räkna, skulle fråga olika firmor efter kostnaden för gör-det-själv material!

Problemlösning i grupp

Det har skrivits mycket om grupparbeten i matematikundervisningen, se även kapitel 5. Ett exempel är att de ger läraren tillfälle att iaktta elevens förmåga att muntligt förklara sina tankar utan att för den skull känna sig så utsatt som man kan göra då man står ensam vid tavlan eller intervjuas av läraren.

För att kunna exemplifiera hur man kan arbeta med grupparbete utgår vi från problemet *Att beräkna det antal flyglinjer som behövs för att alla större städer i ett land ska få förbindelse direkt med varandra.* Eleverna kan nå olika nivåer genom att:

- pröva med enkla sifferexempel
- formulera en teori och undersöka om den gäller för sifferexempel
- generalisera och formulera en teori och undersöka om den gäller i specialfall
- generalisera, formulera en teori och argumentera för den
- ställa upp en formel och argumentera för dess generella giltighet.

När grupper kommit fram till lösningar på olika sätt, kan man låta två elever byta grupp och diskutera med de nya grupperna. De måste då kunna förklara den egna gruppens resultat.

I exemplet med flyglinjerna finner man elever som löst problemet genom att säga att tre orter måste ha tre flyglinjer. Varje nyttillkommande ort ökar antalet med sitt eget ordningsnummer minus ett. Andra har löst problemet genom att säga att av n orter har varje ort $n - 1$ flygförbindelser. Då har n orter $n(n - 1)/2$ stycken. Räkneexempel visar att båda resonemangen ger samma resultat. Man har då att undersöka om man kan sammanföra de båda resultaten till ett och generalisera genom att ställa upp en formel.

Det är lätt att säga tulipanmaros ... När eleven ska redovisa resultat i dagboken eller portföljen känner han/hon ett tryck på sig att aktivt delta i grupparbetet. Han/hon vill kunna skriva ner något för att kun-

na svara för sina anteckningar senare. Grupparbetet blir inte enbart en stunds trevlig samvaro. Det blir en del av den mängd resultat som tillsammans visar elevens prestationer under kursen.

Vid grupparbete kan nya grupper arbeta i andra utrymmen än klassrummet. Grupperna besöks sedan dels med den uttalade avsikten att bedöma arbetet, dels för att sporra till ökade ansträngningar genom att tala om vilka stora eller små framsteg de andra grupperna gjort. Homogena grupper har fördelen att medlemmarna ligger på ungefär samma prestationsnivå. Det blir lättare att kunna aktivera elever som annars inte tycker det är värt att ens börja tänka.

Redovisningen kan göras av en panel bestående av en elev ur varje grupp.

Föredrag och uppsatser

Det är lätt att finna ämnen för föredrag som kombinerar goda matematikövningar med strävan att ge eleven "förståelse för att matematiken har sitt ursprung i många äldre kulturer". Den elev som skriver ett föredrag om stambråksberäkning med hieroglyfer lär klart kunna visa vilka kunskaper han har om bråkräkning.

"Vem uppfann nollan? Ett matematikhistoriskt föredrag som underlättar förståelsen för positionssystemet" är ett annat uppslag. Samarbete med andra ämnen ger också idéer. "Den hemiska skuldfällan – ett föredrag om privat ekonomi och exponentialfunktioner".

Det är en tillräckligt svår uppgift i sig att ha ett föredrag i matematik. Eleverna bör därför få tydliga anvisningar om var de kan finna material och litteratur till sitt arbete.

För att understryka att föredraget är ett tillfälle att visa det man kan eller vill visa upp bör man ge en maximigräns för tiden, men inte ange någon minimigräns. Den som vill kan få försöka förklara på en minut vad som menas med effektiv ränta. Kravet på att kamraterna ska kunna förstå innehållet och på att föredragshållaren ska kunna svara på deras frågor gör att den egna förståelsen tydligt kommer fram.

Att skriva en uppsats kan vara en lämplig uppgift för en elev med hög studietakt. Hon kan fördjupa sig inom något område och samtidigt redovisa sitt arbete. Ett uppslag till uppsatsämne är t ex att beskriva hur en matematisk modell kan beskriva flera olika situationer. Naturvetaren kan skriva om proportionella funktioner i fysikkursen. Samhällseleven kan beskriva hur exponentialfunktioner kan användas i olika sammanhang eller matematikens betydelse i t ex företags-ekonomi.

Individuella samtal – intervjuer

Som nämnts ovan är det vanligt att en osäker elev först försöker dölja sina, som den misstänker dåliga kunskaper, för läraren. Det kan då vara bra att göra en intervju. Det är inte lätt att vara elev och bli intervjuad. Lärarens hållning till eleven är känslig. Intervjusituationen förutsätter bl a att det redan finns ett gott förtroende mellan lärare och elev.

En stunds inledande småprat gör att eleven slappnar av och vågar försöka berätta om sina tankar. Därefter kan man lösa några lämpliga uppgifter medan eleven *tänker högt*. Var noga med att visa en neutral attityd både vad gäller kroppsspråk och kommentarer. *Framför allt är det viktigt att inte försöka använda intervjutillfället till att undervisa eller korrigera och på det viset gripa in i elevens tankar*. Det ska vara helt klart att avsikten är att klarlägga elevens tankemönster. Det är därför olämpligt att avsluta med att visa hur *man egentligen skall göra* och därmed indikera att man är mera intresserad av det rätta svaret. Risken är då att nästa intervju blir mindre givande.

Både individuella samtal och utvärdering bygger på att det finns ett gott samarbete mellan elev och lärare. Det är naturligtvis bra om alla lärare på en skola har samma referensramar men klassernas sammansättning och lärares olika uppfattningar gör att fullständig enhetlighet är svår att nå.

- Låt dina elever skriva ett "brev till en sjuk kamrat". Det kan vara lämpligt att låta dem välja mellan några olika moment. Diskutera bedömningen av utfallet med dina kollegor.
- Diskutera hur de skriftliga proven kan se ut för att anpassas till den nya kursplanen. Jämför med exemplet på nationellt prov.
- Sammanställ en lista över tänkbara projektarbeten.
- Gör ett test som kan vara lämpligt att genomföra i grupp.
- Hur lägger man upp utvärdering som innehåller grupparbeten, projekt och laborationer?
- Diskutera lämpliga områden/titlar för föredrag och uppsatser. Hur skaffar man lämplig litteratur?
- Vad är de största skillnaderna mellan matematiken i Lpf 94 och vår förra läroplan? Hur påverkar dessa våra metoder för utvärdering?

Litteratur

- Beskow, A. (1993). Vad ska räknas? *Nämnamnaren* 20(3), 35-40.
- Dahl, B. (1994). Betygskriterier i matematik. *Nämnamnaren* 21(3), 4-7.
- Johansson, B. (1993). Kunskapsrelaterat betygsbeslut? *Nämnamnaren* 20(4), 2-5.
- Johansson, B. & Emanuelsson, J. (1995). Början till slutet för betyg? *Nämnamnaren* 22(2), 12-14.
- Kilborn, W. (1984). Diagnostik och utvärdering. *Nämnamnaren* 10(4), 40-45.
- Kjellström, K. & Pettersson, A. (1995). Den nationella provverksamheten. *Nämnamnaren* 22(2), 4-7.
- Kjellström, K. (1995). Det första nationella kursprovet. *Nämnamnaren* 22(3), 5-9.
- Ljung, B-O. (1986). Något om begrepps- och terminologibildning för utvärderare. *Nämnamnaren* 13(2-3), 92-94.
- Ljung, B-O. (1991). Prov i matematik. *Nämnamnaren* 18(3/4), 31-37.
- Nämnamnaren, Tema Diagnos och utvärdering. (1984). *Nämnamnaren* 10(4).
- Reys, B. m fl (1995). Vad är god taluppfattning? *Nämnamnaren* 22(2), 23-25, UPPSLAGET, 25-29 och Problemaavdelningen, 51.
- Reys, B. m fl (1995). Svenska elevers taluppfattning. *Nämnamnaren* 22(3), 34-40.
- Runeson, U. (1991). Utvärdering i Standards. *Nämnamnaren* 18(3/4), 43-46.
- Stephens, M. (1994). Undersökande arbete som utvärdering. *Nämnamnaren* 21(4), 16-25.
- Ulin, B. (1993). Hur skall proven se ut? *Nämnamnaren* 20(2), 24-27.
- Wahlund, B. (1990). Skriva i matte. *Nämnamnaren* 17(1), 41-43.
- Wyndhamn, J. & Claesson, P. (1984). Samtalet som utvärderingsinstrument. *Nämnamnaren* 10(4), 35-39.
- Davidsson, L., Sjögren, B. & Werner, L. (1995). *Betyg. Grundskola, gymnasieskola, komvux*. Stockholm: Publica.
- Ds 1995:56. *Gymnasieskolan – en bred grund för högskolan!* Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Henriksson, S-E. (1987). *Skolöverstyrelsens provverksamhet – en översikt 1965-1985*. (Rapport R 87:3). Stockholm: Skolöverstyrelsen.
- Henrysson, S. & Wedman, I. (1995). Betygen och antagningen: En historik. I *RUT – 93, Urvalsmetoder*. Stockholm: Utbildningsdepartementet, 7-46.
- Lindblad, T. (Red) (1991). *"Allt är relativt". Centralt utarbetade prov i svenska, matematik, engelska, franska, tyska, fysik och kemi – beskrivning, analys, förslag*. (Rapport nr 1991:03). Göteborgs universitet, Institutionen för pedagogik.
- Ljung, G. (1991). *Centrala prov i matematik på NT-linjerna 1985-1989*. Stockholm: PRIM-gruppen, HLS.
- Ljung, B-O., Oscarsson, E. & Rosén, B. (1991). *Översiktsdiagnos i matematik inför skolstarten på treåriga gymnasielinjer*. Stockholm: PRIM-gruppen, HLS.
- Oscarsson, E., Rosén, B. & Ljung, B-O. (1990). *Översiktsdiagnos i matematik inför skolstarten på tvååriga gymnasielinjer*. Stockholm: PRIM-gruppen, HLS.
- Pettersson, A. (Red) (1994). *Centrala prov i matematik på SE-linjerna 1989-1993*. Stockholm: PRIM-gruppen, HLS.
- Skolverket (1994). *Betygsboken*. Stockholm: Liber distribution.
- Skolverket (1995). *Betygsboken 2*. Stockholm: Liber distribution.
- Westin, H. (1995). *Matematiken i nationell utvärdering. Analys av gruppuppgifter genomförda av elevgrupper i åk 9, 1992*. Rapport från PRIM-gruppen, nr 9. HLS.
- Wigforss, F. (1939). *Kunskapsprövningar*. (Pedagogiska skrifter, häfte 165). Lund: Sveriges allmänna folkskolläraförbundets litteratursällskap.
- Board of Studies. (1995). *Mathematics: Assessment activities using number tools & procedures*. Carlton, Victoria: Author.
- GAIM. *Graded Assessment in Mathematics*. (1992). London: Thomas Nelson and Sons Ltd.
- Johnsen Høines, M. (1995). Hva skjer med matematikkipedagogiske samhandlinger når tester tas i bruk? *NOMAD* 3(3), 27-44.
- Kilpatrick, J. & Johansson, B. (1994). Standardized mathematics testing in Sweden: The legacy of Frits Wigforss. *NOMAD* 2(1), 6-30.
- Measuring What Counts. (1993). *Mathematical Sciences Educational Board*. Washington, DC: National Academy Press.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1995). *Assessment Standards for school mathematics*. Reston, VA.: Author.

- Niss, M. (Ed.) (1993). *Assessment in Mathematics Education and its Effects*. Dordrecht: Kluwer.
- Niss, M. (Ed.) (1993). *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.
- Paasonen, J. (1994). What on earth is a straight line? *NOMAD* 2(3/4), 47-56.
- Stenmark, J. K. (Ed.) (1992). *Mathematics assessment – myths, models, good questions and practical suggestions*. Reston, VA.: NCTM.
- Webb, N. I. (1992). Assessment of students knowledge of mathematics: Step toward a theory. In D.A.Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan Publishing Company.
- William, D. (1994). Assessing authentic tasks: alternatives to mark-schemes. *NOMAD* 2(1), 48-68.
- von Essen, E. & Winther Petersen, A. (1994). *Utraditionelle matematikopgaver*. København: Matematiklærerforeningen.
- Wyndhamn, J. (1994). Om kalenderräkning. Aritmetiken, almanackan och fingrarna som beräkningsverktyg. *NOMAD* 2(3/4), 57-74.

5

Undersökande aktiviteter

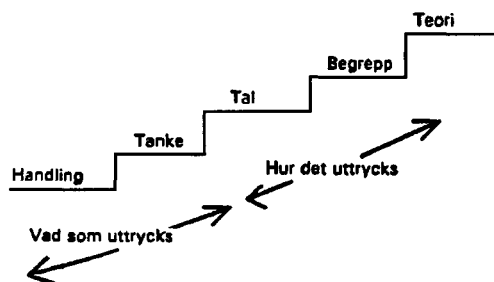
Laborationer är självklara inslag vid undervisning i naturvetenskapliga ämnen. Men hur är det i matematik? Laborativa uppgifter och undersökande aktiviteter betyder inte bara "mäta och väga" utan kan också innebära att eleverna söker efter data, mönster och samband i någon lämplig källa – allt från uppslagsböcker till databaser, och utnyttjar detta i sina undersökningar.

Elever, som på högstadiet har upplevt matematiken som ett virrvarr av regler och symbolmanipulationer, kan ha sådan motvilja mot ämnet att de har svårt att acceptera och ta till sig traditionell undervisning.

På högstadiet och i gymnasiet är matematikundervisningen, av hävd, till stora delar hanterande och manipulerande av tal och symboler. Det är inte sällan så, att eleverna ser en större nytta med att kunna hantera regelsystemet än att komma underfund med matematikens natur och karaktär (Mellin-Olsen, 1984). För de elever som tycker om matematik eller som inser att matematikkunskaper är nödvändiga i vidare studier eller kommande yrkesverksamhet kan det ändå gå ganska bra. De möter senare mera matematik och tillämpningar och har förhållandevis god tid på sig att komma underfund med ämnets struktur och funktion.

Nu är emellertid goda matematikkunskaper en nödvändighet för allt fler elever. Lärarens uppgift är därför att se till att nya elevgrupper får kunskaper som är relevanta och användbara. Förutom programspecifika uppgifter, som kan vara särskilt motivationshöjande, krävs konkreta laborativa arbetsuppgifter, som från många olika utgångspunkter kan leda fram till förståelse för matematiska begrepp, modeller och samband. I undervisningen ska vi sträva efter att det blir tydligt att matematik inte bara är ett effektivt och användbart verktyg för att lösa problem, utan också något i sig spännande och lustbetonat.

Då ett nytt område ska behandlas i en matematikkurs börjar vi lärare ofta med en generell, matematisk teori som vi illustrerar med några exempel. Eleverna löser sedan uppgifter ur läroboken. Det blir övning på algoritmer och formler. Först som avslutning kommer, i



bästa fall, problem och tillämpningsuppgifter. Varför inte göra tvärtom? Börja med konkreta aktiviteter som visar eleverna att helt olika situationer kan beskrivas med samma slags matematik. Det bör vara ett viktigt mål att eleven ska upptäcka att generaliserbarhet är matematikens styrka. Ett område där den här metodiken kan vara lämplig är t ex linjära funktioner.

I den allmänna debatten har det ofta framhållits att matematikämnet bör förändras så att man börjar med konkret verksamhet, där man tänker, diskuterar, upptäcker och erövrar ny kunskap. Det kan gynna elever som vi i skolan kallar ”svaga”, eftersom många av dem ingalunda saknar lust, fantasi och kreativitet. Erfarenheten säger att även matematikbegåvade elever stimuleras av att arbeta konkret. Det är sannolikt så att alla gynnas av att stegvis få gå från handling till teori.

Det är viktigt för en elev att ha konkreta upplevelser av situationer som kan matematiseras. Begreppsbyggnad bygger på strukturella likheter i erfarenheter.

Variation av de kontexter som utnyttjas i undervisningen befrämjar livskraft i föreställningar som uppstår. Upplevelsen att en viss kunskap är allmängiltig baserar sig mer än något annat på att den testas mot en stor mängd sinnesintryck. Brist på variation kan leda till en förstärkning av speciella tankemönster som kan observeras som ett beroende av speciella rutiner. Matematiken stelnar i sådana fall i sin form vid alltför tidig ålder. (Björkqvist, 1993)

Laborativa uppgifter

Det är lätt att finna laborativa uppgifter som handlar om geometri. I vår vardagsmiljö finns mängder av lämpligt material – lådor, burkar, bollar, trattar, leksaker i skala, osv. Bra uppgifter finner man också genom att i given anda förändra läroböckernas standarduppgifter. Jämför uppgifterna:

- Beräkna volymen av en cylinder med radien 18 cm och höjden 35 cm.
- Hur många liter rymmer burken? Gissa först! Mät och beräkna. Kontrollera svaret genom att fylla burken med vatten med hjälp av ett litermått.

Den senare uppgiften väcker mera intresse hos de allra flesta – också hos dem som kanske tycker att man då kan mäta med vatten direkt.

En förutsättning för laborativt arbetssätt är naturligtvis att det finns lämplig materiel på skolans matematikinstitution. Det behövs inte mycket, särskilt inte om eleverna arbetar i grupp och med ”stations-system”. Men en del saker kan vara bra att ha i många exemplar. Man kan välja något som är billigt och lätt att skaffa, t ex ishockeypuckar.

Elevuppgifter

- 1 **Materiel:** En ishockeypuck
 - a) Hur stor volym har en puck? Gissa först! Beräkna sedan volymen.
 - b) Hur många procent är mantelytans area av totala arean?
 - c) Ange en formel att användas vid beräkningen i b)-uppgiften och i andra liknande fall med cylindrar. Gör formeln så enkel som möjligt!
- 2 **Materiel:** Ett kassettband.

Hur lång speltid är det kvar på sidan A?
- 3 **Materiel:** Rundstavar av samma materiel och med samma diameter men olika längd. En digital våg.
 - a) Bestäm stavarnas massa och volym och beskriv resultaten i tabell- och diagramform.
 - b) Upprepa föregående uppgift på fem nya rundstavar med annan tjocklek.
 - c) Jämför tabellerna och diagrammen i a) och b). Beskriv likheter och skillnader med egna ord.
 - d) Ta reda på hur man brukar beskriva denna typ av funktion. Vad kännetecknar sådana samband? Ge flera exempel på funktioner som tillhör samma ”familj”.
- 4 **Materiel:** Stativ med spiralfjäder och linjal. Vikter med olika kända massor. Föremål med okänd massa.
 - a) Bestäm fjäderns längd för några vikter med känd massa. Beskriv resultatet i tabell- och diagramform.
 - b) Bestäm massan hos några föremål med okänd massa. Beskriv med egna ord hur du gick till ”väga”.
 - c) Ta reda på hur man brukar beskriva denna typ av funktion. Vad kännetecknar sådana samband? Ge flera exempel på funktioner som tillhör samma ”familj”.
- 5 Beskriv med egna ord de likheter och skillnader som finns mellan funktionerna i de båda föregående uppgifterna.

Kommentarer till elevuppgifterna 1 – 5

Vissa elever klarar bara a) i uppgift 1. För att lösa hela uppgiften behövs kunskaper i geometri, procent och algebra.

I uppgift 2 ska man ha ett kassettband av genomskinlig plast. Liknande uppgifter finns ofta i läroböckerna med figur och utsatta mått. Men då blir det något helt annat! När boken anger just de värden som behövs för beräkningen lotsas eleven nästan rakt på svaret.

Två linjer med olika lutning som resultat av två konkreta situationer beskrivs i uppgift 3. Rundstavarna kan ha diametern, t ex 16 mm och 22 mm. Fem styck- en av vardera med längder mellan 5 cm och 25 cm. En våg som ger massan i hela gram (utan decimaler) är bäst.

Elever på NV-programmet gör ibland uppgift 4 som fysiklaboration. Men alla matematikelever borde göra något liknande. Den okända massan bestäms först med hjälp av diagrammet och sedan genom att sätta in aktuella värden i formeln. Då dessa värden stämmer överens med resultatet vid en kontrollvägning så brukar eleverna inse att verkligheten ibland kan beskrivas med ett diagram eller en formel och att dessa två uttryckssätt då beskriver samma sak.

Det är viktigt att man som lärare provar uppgifterna själv. Då upptäcker man lättare vilka svårigheter eleverna kan få, men man ser också möjligheterna att utvidga problemet och ställa andra frågor. Vidare får man en bättre beredskap att hjälpa eleverna utan att lösa uppgiften åt dem.

Undersökningar i grupp

Arbete med matematiklaborationer sker lämpligen i en arbetsform då vi låter eleverna arbeta i smågrupper. Vi betonar själva processen, vad som händer under "resans" gång. Resultatet, "svaret", får här komma i andra hand. Att få förklara för en kompis hur man tänker har erfarenhetsmässigt mycket positiva effekter för elevers lärande.

I gruppen kan man utgå från något man känner igen och förstår, en handling eller ett praktiskt förhållande som ger associationer och tankeinnehåll. Idén är att eleven först ska tänka igenom och uttrycka sig med egna ord innan läraren kommer in och stöder processen fram till ett matematiskt begrepps-innehåll, uttryckt i symbolspråk. Först då blir det matematikkunnande som eleven äger. Stoffmässigt i sig finns kanske inget nytt, men man vänder på tågordningen! Detta sätt att arbeta är i sig inget revolutionerande men har praktiserats i liten omfattning på gymnasie- och högskolenivå.

Fas I:

– Eleverna sätter sig in i problemet individuellt. De gör klart för sig vad uppgiften går ut på och de skriver ner sådant som frågor, reflexioner och det de inte förstår.

Fas II:

– Eleverna diskuterar igenom problemet i små grupper. En del frågor besvaras av kamrater.

Fas III:

– Först här "lyssnar läraren in sig" och stödjer framkomliga idéer.

Fas IV:

– Här tas problemet upp i större grupp (klasstorlek) för gemensam genomgång och bearbetning under lärarens ledning. Nu är tiden mogen att diskutera och analysera lösningsstrategier, att generalisera och "göra matematik" av stoffet.

- Enligt vår erfarenhet har man i matematik färre laborationer och undersökande aktiviteter än i naturvetenskapliga ämnen. Vad kan detta bero på?
- Vilka erfarenheter har du av undersökande aktiviteter? Diskutera några konkreta exempel på lyckade och mindre lyckade inslag i matematikundervisningen.
- I vilken ordning bör denna typ av aktiviteter komma i förhållande till andra inslag i elevernas arbete? Skall man börja eller avsluta ett undervisningsavsnitt med laborativt arbete? Diskutera för- och nackdelar
- Gör en översikt över de matematiklaborationer som ni brukar använda på skolan. Hur kan dessa förbättras och kompletteras?
- Kan man vara säker på att "Ramlösa" i burk och flaska (33 cl) innehåller lika mycket? Be eleverna utveckla några olika sätt att bestämma volymen i de båda förpackningarna.
- Vilka erfarenheter har du av grupparbete i matematik? Diskutera för- och nackdelar med några kollegor.
- Har du prövat grupparbete liknande det som beskrivits ovan i fas I – IV? Om inte, formulera en gruppuppgift t ex av det slag vi beskrivit tidigare och pröva i egen klass. Om du prövat tidigare: Hur kan man förbättra effekten av denna arbetsform?

Att söka information

Med undersökande aktiviteter kan man mena alla uppgifter där eleverna aktivt måste ta fram de data som behövs. Även om lärobokens uppgifter kan vara aktuella och omfattande, kan de kompletteras med uppgifter där eleverna får söka information i någon faktabok. Man kan t ex använda SCB:s små häften *Sverige i siffror* och *Miljö Sverige*.

När eleverna arbetar i grupp vid matematiklaborationer behöver inte alla grupper lösa samma uppgift samtidigt. Grupperna kan arbeta med olika uppgifter, som sedan redovisas och diskuteras i "plenum".

Elevuppgift

Materiel: SCB:s häfte Miljö Sverige

6 Ge exempel på vad du anser vara intressanta frågor som man kan ställa och få svar på utifrån tabellen nedan.

Miljöpåverkande faktorer: Trafik

Luftutsläpp och energiåtgång per personkilometer vid långväga transporter.

	Kol- väten g	Kväve- oxider g	Kolmon- oxid g	Energi kWh
Personbil utan katalysator	0,60	1,1	4,6	0,40
Personbil med katalysator	0,04	0,05	0,3	0,40
Buss 1989-års modell	0,05	1,21	0,09	0,23
Persontåg ¹	0	0	0	0,11
Flyg F-28-4000 ²	0,15	0,53	0,55	0,69
Flyg DC-9-412 ²	0,18	0,72	0,58	0,80

1 Avser eldrift från vatten- och kärnkraft, 35% beläggning.

2 Avser 67% beläggning. Källa: IVA-rapport 379, 1990.

Diesel- och bensindrivna motorer ger utsläpp av kväveoxider, kolmonoxid, koldioxid, kolväten, partiklar (sot och damm), svaveldioxid och bly. Utsläppen av kvävedioxider är större från diesel- än från bensinmotorer, räknat per liter bränsle. Bussar och främst lastbilar är dieseldrivna. Från bilar med katalytisk avgasrening är utsläppen av koloxid, kolväten och kväveoxider betydligt mindre än från andra bilar. Koldioxidutsläppen däremot påverkas endast av bränsleförbrukningen. De största mängderna kväveoxider och kolväten bildas då motorer belastas hårt som vid acceleration och retardation.

Källa: MILJÖSVERIGE, ISBN 91-618-0718-4

SCB Publikationstjänsten, 701 89 Örebro, tfn 019-176800

Att finna mönster

Även uppgifter som t ex går ut på att finna mönster kan ingå i undersökande aktiviteter.

Elevuppgift

- 7 Ta reda på antalet kvadrater i nedanstående figurer.
Både små och stora kvadrater räknas.

Fig 1



Fig 2



Fig 3

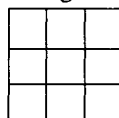


Fig 4

Fig 5

.....

.....

- Hur många kvadrater finns det i figur nr 2 och i figur nr 3?
- Försök finna ett samband mellan figurens nummer och antalet kvadrater.
- I Uppslaget i Nämnaren nr 4, årg 21, finns förslag till en mera omfattande aktivitet, som har utprovats (Emanuelsson & Emanuelsson, 1994). Pröva i din klass och diskutera utfallet
- Konstruera gärna fler elevuppgifter av denna typ.

- Be några lärare, t ex i biologi, fysik, geografi, idrott, kemi, naturkunskap eller samhällskunskap om förslag till nya uppgifter.
- Konstruera några uppgifter som eleverna kan lösa med hjälp av Miljöhäftet. Gör dels några enkla uppgifter, dels några mera komplicerade, där de måste kombinera fakta från flera olika diagram och tabeller.

Att simulera

Många händelser och förlopp i privatekonomi, samhälls- eller naturvetenskap kan simuleras med t ex datorer eller programmerbara räknare. Ett enklare sätt är att använda tärningar eller en kortlek.

Elevuppgift

Materiel: 14 st givna spelkort.

- 8 Du ska göra ett modellförsök. Anta att valören på ett spelkort anger temperaturen i grader Celsius kl 12.00 på en ort. Blanda korten väl och dra sedan ett kort i taget. Anteckna temperaturen.
- a) Visa i ett linjediagram hur temperaturen varierar under en 14-dagars period (= 14 kort).
 - b) Beräkna medeltemperaturen och mediantemperaturen under perioden.
 - c) Hur många dagar var temperaturen över, under respektive lika med medeltemperaturen? Svara i procent.
 - d) Var någonstans i Sverige/världen kan du tänka dig att denna ort ligger? Förklara.

Kommentarer

Spelkorterna kan t ex vara 3 st med valör 2, 1 st med valör 3, 2 st med valör 4, 4 st med valör 6, 3 st med valör 7 och 1 st med valör 8.

Linjediagrammen ser naturligtvis olika ut, men svaren på b- och c-uppgifterna blir alltid desamma. Observera att det inte finns någon dag då temperaturen är lika med medeltemperaturen.

De flesta elever löser den här uppgiften med större nyfikenhet än om temperaturuppgifterna är givna i en tabell.

Att göra uppgifter

Matematik är en levande mänsklig konstruktion och en kreativ och undersökande aktivitet som omfattar skapande, utforskande verksamhet och intuition. Undervisningen i matematik skall ge eleverna möjlighet att utöva och kommunicera matematik i meningsfulla och relevanta situationer i ett aktivt och öppet sökande efter förståelse, nya insikter och lösningar på problem.

Kursplanen i matematik för grundskolan, s 34

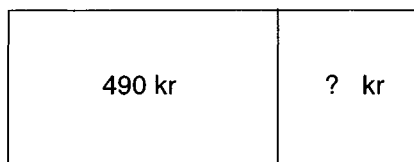
För att inläringssituationen ska bli så meningsfylld som möjligt kan man låta eleverna själv konstruera uppgifter efter vissa, givna betingelser. De kan t ex skriva ut uppgifterna på ordbehandlare och sedan låta kamrater lösa dem. När elever arbetar i par eller i små grupper kommer de på ett naturligt sätt att uppfylla läroplanens mål att göra, berätta, förklara och argumentera. Detta att de måste förstå vad de gör för att själv kunna formulera uppgifter gör att de tycker sig behärska området. Här nedan följer ett exempel på hur en instruktion kan se ut.

Elevuppgifter

9 Beskriv en vardagshändelse där det ingår två procentuella förändringar.
Rita gärna en bild!

10 Beskriv en situation där det ingår en procentuell förändring följt av ökning eller minskning. Formulera en fråga om den totala procentuella förändringen!

11 Uppgiften är att sätta text till nedanstående bild! Sammanhanget ska vara sådant att bilden blir till hjälp för din kompis, när hon ska lösa problemet. Båda rektanglarna tillsammans utgör 100 %.



← 30 % →

Gruppsammansättning

Gruppsammansättningen kan ha större betydelse än man i första hand tror. Det är inte ovanligt att man i gymnasieskolan låter eleverna själva bilda grupper. Det kan då hända att man får grupper av elever som är nära kompisar och umgås mycket på fritiden. Det är inte så underligt om grupprelationerna redan är fastlagda och att det pratas och skojas en hel del som inte har att göra med den uppgift man ska lösa. Det kan ibland vara så att risken för oordning och dålig arbetsdisciplin ökar om eleverna får gruppera sig som de själva vill.

Det är en förutsättning för laborativt arbete att gruppen fungerar, att alla känner att de deltar och tar ansvar för arbetet. Läraren kan styra grupsammansättningen på många sätt.

Vissa menar att smågrupper inte leder till att ”lågstatus elever” blir inblandade i lösandet av uppgifterna. Studier visar att högpresterande elever ofta dominerar arbetet i gruppen, medan lågpresterande är passiva, fastän de tycker om att arbeta i grupp. En orsak till detta kan vara att det finns statuskillnader mellan eleverna, vilka framträder klarare i smågrupper. Eftersom man arbetar tätt ihop kommer olikheter i kunskaper och inlärningsförmåga att framträda mycket tydligare och statuskillnaderna kommer att öka. En annan orsak till högstatus elevernas dominans är att de förväntas vara mer aktiva medan de lågpresterande förhåller sig passiva då de inte anses kunna bidra med något.

Duktiga elever kan ofta förklara uppgifter klart medan lågpresterande elever har svårt att förklara gruppuppgifterna. En förklaring till

varför lågpresterande elever verkar vara mindre aktiva kan vara att de inte förstår uppgifterna. Erfarenheter och studier visar att smågrupper inte genererar en omgivning som är lika stimulerande för *alla* elever. På grund av detta menar en del att denna arbetsform inte kan lyfta dessa elevers kunskapsnivå.

Ett sätt att komma till rätta med detta problem är att sätta ihop grupperna omsorgsfullt. En undersökning visar att heterogena grupper är bra för hög- och lågpresterande elever men inte för mellanpresterande elever. I stället bör hög- och mellan, mellan- och låg eller bara mellanpresterande elever vara i samma grupp. Vad kan då anledningen vara att så många lärare väljer att dela in eleverna i heterogena grupper? Kan anledningen vara att grupperna då blir mer jämbördiga sinsemellan och man kan använda samma uppgifter till alla grupper?

Det visar sig också att de duktiga eleverna, som oftast är de som ger förklaringar till de andra eleverna, blir duktigare eftersom de måste klargöra sina tankegångar för sig själva och sedan kanske förklara på flera olika sätt. Men i de fall de bara talar om rätt svar finns ingen anledning för dem att omorganisera sina tankar. Under vissa betingelser kan alltså arbete i smågrupper få de duktiga eleverna att bli ännu duktigare. Återstår att undersöka om lågpresterande elever blir bättre om de tvingas ge förklaringar för sina klasskamrater oftare.

Det är viktigt att läraren är tydlig och att man diskuterar igenom arbetsformer och arbetssätt med eleverna innan man sätter igång. Man hittar många bra argument genom att dra paralleller med yrkeslivet utanför skolan.

Om man vill ändra på sin undervisning är det också viktigt att man inser svårigheten med att införa något nytt i skolan. Det måste få ta tid och vi lärare måste tillåta oss att misslyckas ibland.

Lärarens arbete är i det inledande skedet ett inre tankearbete. Det handlar mycket om att lyssna på diskussionerna i grupperna och om att försöka kartlägga elevernas tankar och problem, för att senare ta upp relevanta frågeställningar under andra lektioner. Att gå in då eleverna sitter och arbetar med ett problem i en grupp stör ofta mer än det hjälper. Eleverna slutar då tänka själva och inriktar sig på att förstå vad läraren vill och tänker.

- Vilka erfarenheter har du av olika typer av grupp sammansättningar? Vilka erfarenheter har dina kollegor? Prova under ett par månader en typ av gruppering som du inte provat tidigare.
- Välj ut och prova några gruppaktiviteter med hjälp av kapitel 7.

Litteratur

- Alander, S. (1990). Skolgårdsmatematik. *Nämna-
ren* 17(2), 24-25.
- Björkstén C. & Åhman, L. (1984). Laborativ mate-
matik med hjälp av miniräknare. *Nämna-
ren* 10(3), 34-35.
- Bratt, B. & Wyndhamn, J. (1991). Språket vår men-
tala tumme. *Nämna-
ren* 18(3/4), 78-82.
- Dunkels, A. (1985). Ett undersökande arbetssätt.
*Nämna-
ren* 12(2), 32-33.
- Dunkels, A. (1992). Lek med tal på allvar. *Nämna-
ren* 19(4), 26-27.
- Dunkels, A. (1991). Problemlösning på geobräde.
*Nämna-
ren* 18(3-4), 96-100.
- Ekbäck, B. K. & Wahlgren, J. (1993). CD-skiva i stället
för räknerekord? *Nämna-
ren* 20(2), 35-39
- Emanuelsson, G. & Emanuelsson, L. (1994). Kvadra-
ter i kvadrat. *Nämna-
ren* 21(4), 26-27.
- Holmström, G. (1986). Laborativa och undersökande
arbetssätt. *Nämna-
ren* 13(2-3), 67-71.
- Jaworski, B. (1992). Can all pupils be mathema-
ticians? *Nämna-
ren* 19(2), 31-39.
- Johansson, B. (1991). Två spelare – en miniräknare.
*Nämna-
ren* 18(3/4), 94-95.
- Johansson, I. (1995). Spel för kunskapande. *Nämna-
ren* 22(3), 42-45.
- Joki, J. (1990). En dykning i tre dimensioner. *Nämna-
ren* 17(3-4), 85-88.
- Källgården, E.-S. (1988). Laborativt arbetssätt i
matematik. *Nämna-
ren* 15(2), 60-62.
- Larsson, K. (1990). Att arbeta i grupp. *Nämna-
ren* 17(3-4), 93-94.
- Lindberg, L. (1991). Arbetssätt i Vux. *Nämna-
ren* 18(3/4), 142-144.
- McIntosh, A. (1995). Vitalisera huvudräkningen.
*Nämna-
ren* 22(3), 23-25.
- Munther, R. (1984). Trippel. *Nämna-
ren* 11(1), 34-
35.
- Pehkonen, E. (1993). Problem med kvadrater. *Nämna-
ren* 20(3), 28-29.
- Persson, I. O. (1991). Huvudräkningsspelet Plump.
*Nämna-
ren* 18(3/4), 87-87.
- Reys, B., Reys, R. & Emanuelsson, G. (1995). Me-
ningsfulla tal. *Nämna-
ren* 22(4), 8-12.
- Rusek, A. (1994). Matematik och demokrati – när
mötas de två? *Nämna-
ren* 21(2), 41-45.
- Råde, L. (1991). Upptäckter med datorn. *Nämna-
ren* 18(3/4), 135-139.
- Skedinger-Jacobson, M. (1994). Bilda svaret. *Nämna-
ren* 21(1), 24-25.
- Ulin, B. (1991). Den mångsidiga fyrhörningen –
några uppslag till problemlösning i geometri.
*Nämna-
ren* 18(2), 50-53.
- UPPSLAGET i varje nummer av *Nämna-
ren*.
- Ahlberg, A. (1991). Att lösa problem i grupp. I G.
Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red),
Problemlösning. Lund: Studentlitteratur.
- Andersson, G. (1989). *Lögn och sanning i statistik*.
Stockholm: Liber.
- Björkqvist, O. (1993). Social konstruktivism som
grund för matematikundervisning. *NOMAD* 1(1),
8-17.
- Heikne, H. & Larsson, K. (1994). *111 laborativa
matematikuppgifter*. Eget förlag.
- Häggmark, P. (1989). *Laborativ geometri*. Lund:
Studentlitteratur.
- Johnsen-Höines, M. (1990). *Matematik som språk*.
Stockholm: Utbildningsförlaget.
- SCB (1994). *Miljösvetige*.
- SCB (1994). *Sverige i siffror*.
- Unenge, J, Sandahl, A. & Wyndhamn, J. (1994).
Lära matematik. Lund: Studentlitteratur.
- Vännman, K. & Dunkels, A. (1984). *Boken om krea-
tiv statistik med EDA*. Århus: Förlagshuset Go-
thia.
- Alrø, H. & Skovsmose, O. (1993). Det var ikke me-
ningen! – Om kommunikation i matematikunder-
visningen. *NOMAD* 1(2), 6-29.
- Alrø, H. (1993). I forlanger for lidt af jer selv.
NOMAD 3(2), 7-28.
- Christiansen, I. M. (1994). "Informal activity" in
mathematics instruction. *NOMAD* 2(3/4), 7-30.
- Cockcroft, W. H.(Chairman). (1982). *Mathematics
Counts: Report of the Committee of Inquiry into
the Teaching of Mathematics in Schools*. Lon-
don: H.M.S.O.
- Hunting R. P. & Lamon, S. J. (1995). A re-exami-
nation of the rôle of instructional materials in mat-
hematics education. *NOMAD* 3(3), 45-64.
- Lowe, I. (1991). *Mathematics at Work. Volume 1
& 2*. Canberra: Australian Academy of Science.
- Lowe, I. (1991). *Mathematics at Work. Volume 1
& 2. Teachers guide to 1 & 2*. Canberra: Austra-
lian Academy of Science.
- Mellin-Olsen, S. (1984). *Eleven, matematikken og
samfunnet. – En undervisningslære*. Larvik: NKI-
forlaget.

- Paasonen, J. (1994). What on earth is a straight line? *NOMAD* 2(3/4), 47-56.
- Shell Centre for Mathematical Education. (1985). *The Language of Functions and Graphs*. Manchester: University of Nottingham.
- Wyndhamn, J. (1993). Mediating artifacts and interaction in a computer environment. An exploratory study of the acquisition of geometry concepts. *NOMAD* 1(2), 59-85.
- Wyndhamn, J. (1993). *Problem-solving revisited om Mathematics as a situated practice*. Linköping Studies in Art and Science nr 98. Linköping: University of Linköping.

Matematik i samverkan

Här ges exempel på matematik i vardags- och yrkesliv som i olika utformning kan användas i både grund- och gymnasieskola. Uppgifterna kan modifieras så att de blir kortare eller längre, och man kan ägna olika lång tid till dem beroende på elevernas förutsättningar och studieprogram.

Vardagsmatematik har en central roll både i grund- och i gymnasieskolan. Målen är likartade och kurserna överlappar i viss mån varandra.

Lpo 94,

Mål som eleverna skall ha uppnått i slutet av det nionde skolåret:

Eleven skall ha förvärvat sådana kunskaper och färdigheter i matematik som behövs för att kunna hantera situationer och lösa problem som vanligen förekommer i hem och samhälle och som behövs som grund i fortsatt utbildning

Lpf 94,

Matematik A, Mål:

Målet för kursen är att ge de matematiska kunskaper som krävs för att ta ställning i vardagliga situationer i privatliv och samhälle. Dessutom skall kursen ge en grund som svarar mot de krav yrkesliv och fortsatta studier ställer

Eleverna behöver få känna att de kan använda de kunskaper de har, och att matematiken rör kunskaper de behöver.

Ett sätt att möta dessa önskemål kan vara att använda temaarbeten. Arbetsuppgifterna – och även hemuppgifterna – kan skilja sig mellan olika elevgrupper i klassen. När inte alla har räknat samma sak, utan eleverna får redogöra för varandra, är det naturligt att berätta, förklara och argumentera. En del uppgifter kan innehålla enkla beräkningar, men innebära att man sammanställer resultat och illustrerar med tabeller och diagram med hjälp av dator. Andra uppgifter inom samma område kan ligga på genomsnittlig svårighetsgrad eller långt över den. Hur uppgifterna inom ett tema kan utformas så att eleven både känner igen sig och finner något nytt kan vara underlag för en diskussion mellan lärare i samma skola eller mellan lärare i båda skolorna.

Hur används matematik när man löser problem utanför skolan? Många elever anser att man klarar sig bra utan matematik. Öppna samtal om behovet av matematik kan leda både till att man ändrar sin

syn på vad matematikarbetet innebär och att man väljer bra problem och många olika sätt att lösa dem. Det är naturligt att exempel väljs från elevens erfarenhetsvärld. Matematiklärarens roll blir att avgöra problemens relevans samt att visa på generella lösningsmetoder utgående från de speciella problemställningar som elever valt att arbeta med i teman.

Matematik i karaktärsämnen

Varför har många elever så svårt med matematik i karaktärsämnena? Beräkningarna är i många fall komplexa i den meningen att kunskaper från många olika håll skall sammanfogas. Att direkt gå på en svår yrkesuppgift kan kännas övermäktigt. Här måste man först repetera underliggande matematik, och ofta även bygga upp denna. Det kan synas vara en lång väg att gå. Trots det visar det sig ofta vara en snabbare och roligare väg.

Det är viktigt att känna till vilken matematik eleverna behöver i sin yrkesutbildning, dels för att kunna finna relevanta uppgifter och dels för att alltid kunna motivera vad en viss matematik skall användas till. Naturligtvis är det också väsentligt att exemplifiera och motivera matematiken i vardagslivet.

Självklart är det lika viktigt att karaktärsämneslärarna förstår matematikens möjligheter. Om man själv behärskar ett område i yrkesteorin ser man inte alltid den bakomliggande matematiken.

Att som matematiklärare gå in i yrkeslitteraturen för att plocka fram lämpliga uppgifter kan vara svårt. Att som karaktärsämneslärare sätta sig in i den nödvändiga gången i matematiken är tidsödande. Naturligtvis skall man ta tillvara två yrkesgruppers gemensamma kompetens och finna att samarbetet blir både mer givande och roligare. Eleverna känner trygghet när lärarna strävar mot samma mål.

Nedan följer några exempel hämtade från yrkesmatematiken. Innehåll och uppläggning har inspirerats av den nu gällande kursplan A i matematik.

Matematik är ett nödvändigt verktyg såväl för andra ämnen inom den gymnasiala utbildningen som för ett flertal ämnesområden inom eftergymnasiala studier. (s 144)

Kursplanerna ger genom *friutrymmen* ytterligare möjlighet att anpassa kursen till ett visst program och till elevernas förkunskaper, intressen och behov.

Här visas exempel på uppgifter från två yrkesområden: *Restaurang och storhushåll* samt *Verkstadsmekanik*. Anknäytningar till matematik är angivna i höger marginal.

Exempel:

Beräkning av pris för 1 portion "Läcker torsklåda".

Nedanstående ingredienser behövs till 8 portioner.

1,2 kg torskfilé
 2 ägg
 1 1/2 dl ströbröd
 2 tsk salt
 1 krm vitpeppar
 50 g margarin
 4 dl vispgrädde
 1/2 dl klippt dill (ca 30 g dill med stjälk)

Lösningförslag: Prisberäkning för 1 port "Läcker torsklåda".

Beräkna först priset för hela satsen (8 port).

*Att kunna prefix
 underlättar enhetsbytena*

torskfilé 1,2 kg kostar $1,2 \cdot 49,40 \text{ kr} = 59,28 \text{ kr}$

Kunna läsa tabeller

ägg 2 st kostar $2 \cdot 0,96 \text{ kr} = 1,92 \text{ kr}$

*Jämförpriset i st
 beräknat ur 1 kg
 (16 st) kostar 15,30 kr*

ströbröd $1 \frac{1}{2} \text{ dl} = 1,5 \text{ dl}$, $1,5 \cdot 50 \text{ g} = 75 \text{ g} =$
 $= 0,075 \text{ kg}$ och kostar $0,075 \cdot 37,00 \text{ kr} = 2,78 \text{ kr}$

*Övergång bråk – decimalform
 Övergång dl – g – kg
 Jämförpriset i kr/kg
 beräknat ur 250 g
 kostar 9,25 kr*

salt $2 \text{ tsk} = 2 \cdot 6 \text{ g} = 12 \text{ g} = 0,012 \text{ kg}$ kostar
 $0,012 \cdot 1,18 \text{ kr} = 0,01 \text{ kr}$

Övergång tsk – g – kg

vitpeppar $1 \text{ krm} = 0,4 \text{ g} = 0,0004 \text{ kg}$ kostar
 $0,0004 \cdot 66,90 \text{ kr} = 0,03 \text{ kr}$

Övergång krm – g – kg

margarin $50 \text{ g} = 0,050 \text{ kg}$ kostar $0,050 \cdot 17,79 \text{ kr} = 0,89 \text{ kr}$

Övergång g – kg

vispgrädde $4 \text{ dl} = 0,4 \text{ l}$ kostar $0,4 \cdot 25,81 \text{ kr} = 10,32 \text{ kr}$

*Övergång dl – l
 Jämförpriset i kr/l
 beräknat ur 2 l
 kostar 51,61 kr*

dill med stjälk $30 \text{ g} = 0,030 \text{ kg}$ kostar
 $0,030 \cdot 42,30 \text{ kr} = 1,27 \text{ kr}$

Priset exkl. moms för hela satsen (8 port) är 76,50 kr.

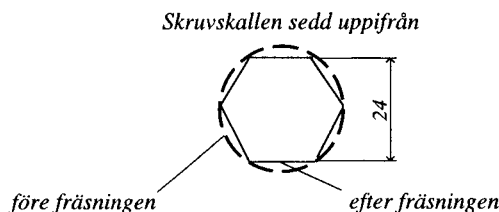
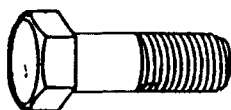
Priset för 1 port blir $76,50/8 \text{ kr} = 9,56 \text{ kr}$.

Moms: $12 \% \text{ av } 9,56 \text{ kr} = 0,12 \cdot 9,56 \text{ kr} = 1,15 \text{ kr}$.

Pris inkl. moms för 1 port: $9,56 \text{ kr} + 1,15 \text{ kr} = 10,71 \text{ kr}$.

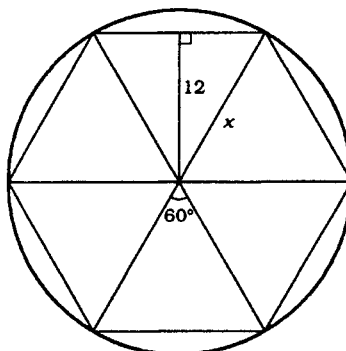
Procenträkning

Exempel: Du skall tillverka en skruv med en 6-kantsskalle. Den skall ha nyckelvidden 24 mm. Vilken diameter skall skruvskallen ha innan du fräser den till sexkant?



Lösningsförslag:

Dela i sex lika trianglar



Vi söker diametern på arbetsstycket.

Vi betecknar arbetsstyckets radie med x .

Samband diameter – radie

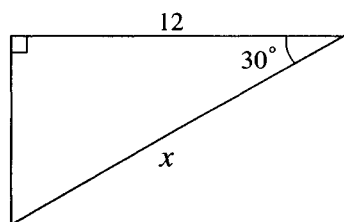
Höjden i varje triangel är $24/2 \text{ mm} = 12 \text{ mm}$

Förstå innebörden av höjd

Medelpunktsvinkeln i varje triangel: $360^\circ/6 = 60^\circ$

Ett varv = 360°

Vi "plockar ut" en rätvinklig triangel.



Vinkeln i spetsen: $60^\circ/2 = 30^\circ$

$$\cos 30^\circ = 12/x$$

Trigonometri

$$x = 12/\cos 30^\circ \approx 13,856$$

Ekvationslösning

Diametern är $2 \cdot 13,856 \text{ mm} \approx 27,7 \text{ mm}$

- Prova och diskutera värdet av exemplen med några kollegor. Hur kan uppgifterna förbättras och utvecklas?
- Formulera ett antal nya lämpliga exempel på samverkansuppgifter från andra karaktärsämnen. Prova, diskutera och förbättra!
- Hur kan man utnyttja friutrymmet för denna typ av aktiviteter?

Matematik i fordonsprogrammet

Vid Malmö latinskola gjordes 1990 – 92 ett försök, som gick ut på stark samordning mellan fordonsteknik och matematik. Det är av intresse av flera skäl. Eleverna såg matematik i en form som angick dem, lärarna fick klart för sig vilka begrepp som behövde byggas upp från början, och elevernas arbete utifrån egna förutsättningar medförde en del okonventionella grepp. Projektet utfördes av Annlis Hake och Marie Skedinger-Jacobsson.

Förutsättningar

Svår kurs i fordonsteknik. Heterogen elevgrupp.

Riktlinjer för arbetet

- Matematiken skall följa kursen i fordonsteknik
- Problemlösningen skall behandla bilens värld
- Vi skall samarbeta med lärarna i fordonsteknik – auskultera hos varandra
- Eleverna skall arbeta utifrån sina egna förutsättningar
- Vi skall ha laborationer
- Vi skall ha nivågruppering ibland

Grupperingar

Två klasser (alldeles i början)

Storklass med två lärare

Uppdelning i tre grupper direkt efter prov

- En grupp repeterade baskunskaper
- En grupp arbetade med andra uppgifter
- En grupp studerade nya valfria moment i stort sett på egen hand

Som huvudbok användes Brogård-Kristersson: Förberedande yrkesmatematik, Fordonsmekanik. Här följer några exempel på hur vi gjorde sedan.

Arbetsorder

En grundidé var att eleverna skulle motiveras att studera matematik genom att först se den matematik som förekommer i fordonsteknik. Inledningsvis skulle eleverna t ex fylla i en arbetsorder vid reparation av en Mercedes 230. De kunde själva välja vilka reparationer de tänkte sig att de hade gjort. Man måste då förstå sig på tidsangivelser och kunna räkna ut 5% resp 25% av en summa. Underlaget som gavs av lärare i fordonsteknik såg ut så här:

Arbetsblad till övningar i matematik			
Mercedes 230			
Arbetsoperation	Tid (h)	Varuslag	Pris (kr)
Batteriladdning	0.40		
Demontering av batteri	0.40		
Byte av generator	0.80	Generator	1 235
Byte av startmotor	1.30	Startmotor	1 635
Demontering av hastighetsmätare	0.5	Glödlampa till instrumentbelysning	2
Demontering av cylinderlock	7.40	Topplockspackning	843
		Grenrörspackning	
Byte av vattenpump	0.85	Vattenpump inkl. packning	1 450
Byte av nedre kylarslang	0.45	Nedre kylarslang	98
Byte av fläktrem	0.40	Fläktrem	73
Byte av motorfäste	1.50	Motorfäste (vän)	129
		Motorfäste (hög)	235
Räkna med ett timarvode på 250 kr/h			
På arbetet tillkommer maskinkostnad 5%			
På summan av kostnaderna tillkommer moms på 25%			

En matematiklärare kan fråga sig varför tiden inte anges i minuter? Ingen tittar väl på klockan och avläser 0,40 timmar? Det visar sig att man inte skall titta på klockan. Man skall ta betalt för den tid som anges på arbetsbladet, oberoende av hur lång tid man själv använt för jobbet. På arbetsbladet anges tider enligt exemplet ovan.

Det fanns nu elever som inte förstod sig på tidsangivelserna. De visste inte vad 0.40 h kunde betyda. Inte heller kunde de räkna med procent. Här kunde man nu "lärt dem hur de skulle göra", t ex på räknare multiplicera 0,40 med timkostnaden 250, och likaså på räknare utföra procentberäkningen. Men det ansågs, att man då trots förklaringar kunde riskera "blind" räkning utan trygghetsgivande begreppsförståelse. Eleverna räknade därför för hand. Då fick man ibland räkna annorlunda än lärarna tänkt sig. Här är några exempel:

Arbetsbeskrivning:

0,1 h svarar mot 25 kr

0,4 h à 250 kr = $4 \cdot 25 \text{ kr} = 100 \text{ kr}$

1,3 h à 250 kr = $250 \text{ kr} + 75 \text{ kr} = 325 \text{ kr}$

Maskinkostnad:

10% svarar mot 42,50 kr

5% av 425 kr = $42,50/2 \text{ kr} = 21,50 \text{ kr}$

Moms:

Vi skall beräkna 25% av 2154,25 kr. Många förstår inte att det leder till beräkningen $0,25 \cdot 2154,25 \text{ kr}$. Andra vet att $25\% = 1/4$ men finner det svårt att utföra divisionen $2154,25/4$ för hand. Nu kan räknare och överslagsräkning vara bra för att kontrollera. Vill man förstå hur man kan räkna för hand kan man istället tänka och göra så här:

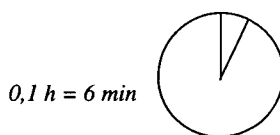
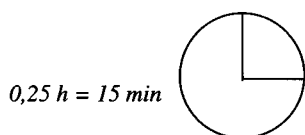
$$25\% = 10\% + 10\% + 5\%$$

$$\begin{array}{r} 215,42 \\ 215,42 \\ + 107,21 \\ \hline 538,05 \end{array}$$

Sedan eleverna sett matematiken i ett för dem verkligt sammanhang var de mera villiga att arbeta med de moment som berörts. Vid övningarna användes ofta uppgifter från en grundskolebok. Övningar i kort division kunde t.ex. ge eleverna en aha-upplevelse jämfört med de divisionsalgoritmer de tidigare stött på. En sådan upplevelse av att "man kan förstå" skall inte underskattas.

Tid

Enheter för tid illustrerades som:



En kommentar: 6 minuter är alltså 0,1 timmar, 12 minuter är 0,2 timmar osv. Det går således att skriva vissa tidsangivelser i exakt decimalform. Detta är anledningen till att man på en del arbetsplatser börjar arbeta 6 minuter i sju och har en kafferast som är 12 minuter. 6 minuter kallas en period.

Här är ett exempel på vardagsmatematik:

GÖTEBORG – OSLO						
km						
0		Göteborgs C	4.10	8.20	14.25	17.20
73	t	Trollhättan	5.00	9.13	15.22	18.12
73	fr	Trollhättan	5.00	9.13	15.22	18.12
82	t	Öxnered		9.23	15.32	18.22
82	fr	Öxnered		9.25	15.34	18.24
168		Ed		10.24	16.37	19.18
188	t	Kornsjö	6.26	10.42	16.53	19.37
188	fr	Kornsjö	6.29	10.45	16.56	19.40
220		Halden	6.59	11.15	17.25	20.08
248		Sarpsborg	7.22	11.38	17.47	20.30
263		Fredrikstad	7.39	11.55	18.05	20.46
297		Moss	8.10	12.25	18.37	21.14
357		Oslo sentral	9.04	13.19	19.30	22.05

Kurt åker från Trollhättan kl 15.22.

Hur länge dröjer det innan han kommer till Fredriksstad?

Det behövdes många enkla, korta övningar på tidsberäkningar och enhetsbyten. Men på temat "Tid" kunde man också ha stimulerande problemlösning. Här är tre exempel från problemavdelningen:

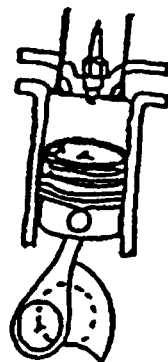
- En bils körriktningsvisare är tänd under 2,0 s och släckt under 1,1 s.
Hur många gånger lyser denna blinkers under en minut?
- *Detektiven:* När hörde ni skottet?
Vittnet: Klockan 2.13
Detektiven: Vad är er klocka nu?
Vittnet: 8.35
Detektiven: Den går fel. Klockan är 9.27
Kan man dra någon slutsats om när skottet skall?
- Fyra dagar före i morgon är det torsdag.
Vilken veckodag är det tre dagar efter igår?

Area och tryck

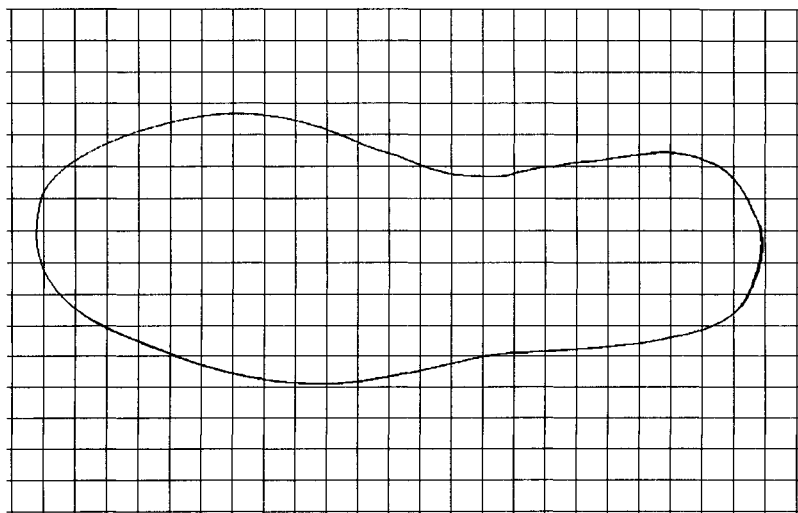
Det visade sig vara nödvändigt att bygga upp areabegreppet med hjälp av bl a rutnät.

Ett exempel som sedan valdes var att beräkna kolvhuvudets area.

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$$



För att illustrera tryck noterade eleverna sin egen vikt och ritade där-
efter av sin skosula på rutat A4 papper, så att han kunde uppskatta
dess area. Konkretionen var påtaglig. De kunde också jämföra med
trycket i cylindern.



Årskursplaner

Försökets uppläggning kan beskrivas med hjälp av en lista på basbe-
grepp såsom längd, tid, hastighet, area, volym etc. Efter inlednings-
exempel från fordonsteknik behandlades dessa basbegrepp ett i sän-
der. Räkning med tal i decimalform, potenser, skala, formler etc. fick
vi in i anslutning till basbegreppen. En planering för Fo 1 och Fo 2 får
illustrera tankegången. Vi tar med även andra årskursens moment för
att visa vilken matematik som då blev behandlad.

Årskurs 1

Arbetsorder, reservdelsräkning	<i>Addition, multiplikation, kort division, decimalform, enkel procenträkning</i>
Tid	<i>Tio- respektive hundra delar</i>
Längd	<i>Decimalform, bråk, prefix (metersystem och tumskala), potenser Skjutmått och mikrometerskruv används</i>
Huvudräkning	<i>Fyra räknesätt med tonvikt på division</i>
Hastighet	<i>Enkel problemlösning</i>
Area	<i>Begrepp, enheter, formler, kvadratrötter, skala</i>
Tryck	<i>Laboration, skosula</i>
Volym	<i>Formler, ekvationer</i>
Blandade formler	<i>Ekvationer, problemlösning</i>
Kraftöverföring	<i>Ekvationer, bråk, formler</i>
Hastighet	<i>Svårare problem</i>
Rörelseöverföring Acceleration och retardation	
Procent	<i>Problemlösning med hjälp av tidningsklipp. Även promille och ppm</i>

Årskurs 2

Ellära	<i>Formler, enheter, prefix</i>
Energi	<i>Potenser, laborationer</i>
Procent	<i>Förändringsfaktor, räntor, exponentiella förändringar, index</i>
Räta linjen	<i>Biluthyrning, körkort, proportionalitet, linjens ekvation</i>
Beskrivande statistik	<i>Diagram, lägesmått, datorer</i>
Fritt val	<i>Beror på vilken gren man valt</i>

Problemlösning

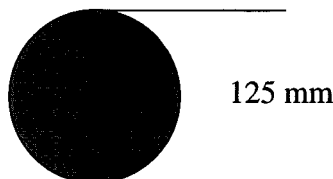
Till varje avsnitt hörde lösning av blandade problem. Eleverna fick också själva konstruera uppgifter. De hade faktablad till förfogande. Här är några uppgifter som eleverna gjort. Man ser av deras förslag – t ex ”Svara i tum! Svara i mm²!” – att de tagit till sig problemlösningens olika sidor: Att öva tanken och att öva önskvärda färdigheter, och kanske också matematikuppgifters underfundighet eller starka tradition.

- Vänerns area är 5 585 km² och Storsjöns 456 km². Hur mycket större är Vänerns area jämfört med Storsjöns? Svara i mm²!
- Kebnekajse är 2 111 m högt och Heglandsfjället är 1 796 m. Hur mycket högre är Kebnekajse än Heglandsfjället? Svara i tum!

a) Gör om 50 m/s till km/h

b) Gör om 90 km/h till m/s

- Räkna ut hur mycket klotet väger. Det är gjort av bly. Densiteten för bly är 11,3 kg/dm³.



- Om vi säger att avståndet mellan Strömstad och Falun är x km gånger avståndet mellan Kiruna och Karlskrona som är $\sqrt{22\,489 + 18,0357}$ (avrundat). Hur långt är det mellan Strömstad och Falun om $16x = 4$?

Olika typer av prov

Det ansågs viktigt att eleverna, särskilt den första terminen, fick känna ”det här kan jag nu” när de hade prov. Vi använde därför dels korta prov t ex med huvudräkningsuppgifter, dels prov med många poäng för kortuppgifter vid längre prov.

Ett huvudräkningstest kunde se ut så här:

$$4 \cdot 210 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$820 - 790 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$6.7 - 6.69 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$0.23 + 0.8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$0,3 \cdot 0,12 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4^0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Hur många procent är 2 av 5? $\underline{\hspace{2cm}}$

Hur mycket är 30% av 400? $\underline{\hspace{2cm}}$

4% motsvarar 80. Det hela? $\underline{\hspace{2cm}}$

En sträcka ökar med 20% till 24 mil.
Sträckan före ökningen? $\underline{\hspace{2cm}}$

Ett belopp minskar med 50% till 350 kr.
Beloppet före minskningen? $\underline{\hspace{2cm}}$

Vad ansåg elever och lärare?

Fordonslärarna tyckte att anpassningen till det egna ämnet var bra och uppskattade samarbetet.

En del gemensamma elevuppfattningar kom fram vid en utvärdering i slutet av läsåret:

- Matematikuppgifterna är ofta anpassade till fordonsteknik
- Det är bra att ibland nivågruppera klasserna
- Det är bra att samma moment tas upp i matematik och fordons-teknik
- Det är bra med två lärare
- Matematikämnet känns viktigt därför att man lättare förstår fordonsteknik
- Ibland har genomgångarna varit för långa
- Matematiken har varit lagom svår och ganska rolig

Matematiklärarna sammanfattade sin syn så här:

Projektet har utvecklat oss som lärare, eftersom vi fått ta del av varandras arbetssätt. Det har varit stimulerande att formulera matematikproblem utifrån fordonsteknik och allt som rör sig kring bilen och de miljöproblem den skapar. Det har känts tryggt att arbeta i "storklass". En lärare kan då i lugn och ro hjälpa svaga elever tillrätta medan en annan finns till hands för de övriga. Man vänder ingen ryggen.

- Diskutera avsnittet med lärare i fordonsteknik. Pröva gärna någon eller några av idéerna i samverkan. Finns det andra och kanske bättre områden som ni tillsammans kan utveckla och pröva?
- Hur kan matematiken organiseras på din skola för att passa ett arbetssätt liknande det som beskrivs.
Hur går det här arbetet ihop med betygssättningen?
Hur kan fler kärnämnen integreras?
- Hur kan arbetet på högstadiet läggas upp för att eleverna skall finna arbetssättet naturligt?

Linjära funktioner i matematik och företagsekonomi

Materialet har utprovats i en HP 2-klass på Vaggaskolan Karlshamn. I matematik användes ca 12 timmar, därav 4 i datasal. Vid första genomgången av kalkylprogrammet deltog även läraren i företagsekonomi. I detta ämne ägnades ca 10 timmar åt arbetsområdet med uppgifter från läroböcker i karaktärsämnet. Eleverna har således ägnat ca 22 timmar åt arbetsområdet.

Svar till övningarna produceras vid behov av deltagarna själva.

Bakgrund

Studiematerialets innehåll och uppläggning har delvis inspirerats av den nu gällande kursplanen i matematik, sidan 15x.

Ur: Syfte

Väsentligt är att eleverna lär sig förstå och föra matematiska resonemang, skapa och använda matematiska modeller och kritiskt granska deras förutsättningar, möjligheter och begränsningar samt lära sig redovisa tankegångar muntligt och skriftligt.

... lära sig att med förtrogenhet och omdöme använda sig av miniräknare och datorer som matematiska verktyg.

Ur: Karaktär och struktur

Tillgången till nya tekniska hjälpmedel förändrar delvis matematikens innehåll och metoder. Många rutinoperationer främst av numerisk och grafisk karaktär, kan nu utföras av miniräknare och datorer. Inriktning mot förståelse, analys av hela lösningsprocedurer och kritisk granskning av resultat samt att dra slutsatser blir viktigare än isolerad färdighetsträning. I en kreativ matematisk problemlösningsprocess berikar olika metoder varandra. Inom matematikämnet utnyttjas algebraiska, numeriska och grafiska metoder – de senare både utan och med hjälp av miniräknare och datorer.

i algebra

kunna teckna, tolka och använda enkla algebraiska uttryck och formler samt kunna tillämpa dessa vid praktisk problemlösning

kunna lösa linjära ekvationer med för problemsituationen lämplig metod – numerisk, grafisk eller algebraisk.

i funktionslära

kunna ställa upp, använda och grafiskt åskådliggöra linjära funktioner som modeller för verkliga förlopp

kunna utnyttja grafritande hjälpmedel.

Ett inledande exempel

Hyr släpkärra billigt!

4 timmar kostar nu endast 110 kr
och heldag (10 timmar) 200 kr.

Ring *Släpspecialisten* tel 32 479.

Ovanstående prissättning bygger på en grundavgift på 50 kr samt en kostnad på 15 kr per timme.

Grundavgift är exempel på en fast kostnad, FK. Timkostnad är exempel på en rörlig kostnad, RK. Den totala kostnaden förkortas TK.

Samband: $TK = FK + RK$

Att hyra släpet

1 h kostar $50 \text{ kr} + 15 \cdot 1 \text{ kr} = 65 \text{ kr}$

2 h kostar $50 \text{ kr} + 15 \cdot 2 \text{ kr} = 80 \text{ kr}$

10 h kostar $50 \text{ kr} + 15 \cdot 10 \text{ kr} = 200 \text{ kr}$

TK, i detta fall hyran, kan representeras på olika sätt:

a) i tabellform

Tid h	Totalkostnad kr
0	50
1	65
2	80
3	95
4	110
5	125
6	140
7	155
8	170
9	185
10	200

b) med hjälp av en *formel*

$TK = FK + RK$

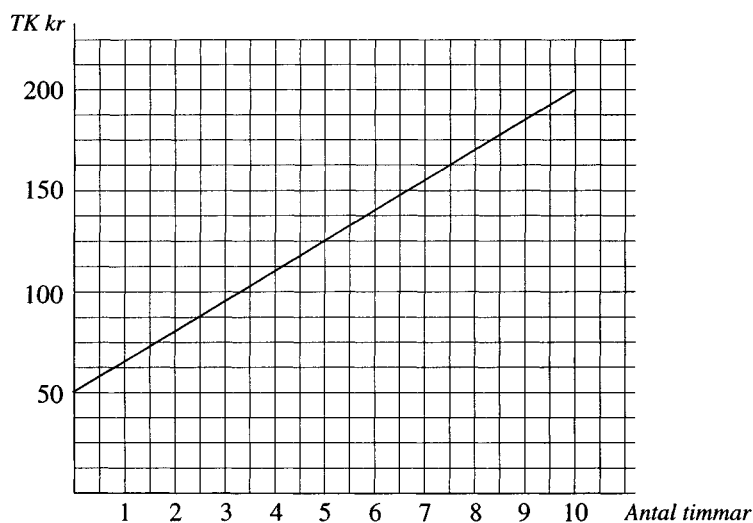
$TK = 50 + 15 \cdot t$, där t är antalet timmar från 0 till 10.

c) som en *graf* i ett koordinatsystem

På den vågräta axeln (x -axeln) markeras tiden i timmar. På den lodräta axeln (y -axeln) markeras hyreskostnaden i kronor. Observera att endast de positiva delarna av axlarna ingår, eftersom varken hyrtiden eller kostnaden kan vara negativ.

Grafen kan även ritas med hjälp av

- a) kalkylprogram
- b) matematikverkstad
- c) grafitande räknare



Elevuppgifter

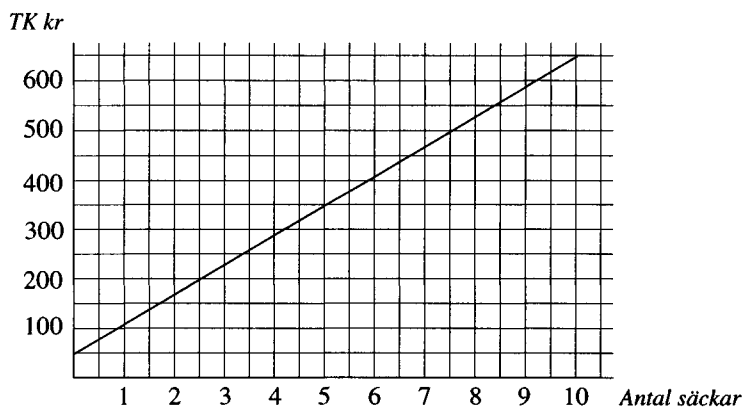
1 Att åka TAXI med DIREKTTAXI kostar 21 kr i framkörningskostnad samt 6 kr/km.

- a) Gör en tabell över totala kostnaden för att åka 0, 1, ..., 10 km.
- b) Ange en formel för TK där n betecknar antalet kilometer.
- c) Rita en graf över sambandet i ett koordinatsystem.

TAXI har ingen framkörningsavgift men kilometerpriset är 9 kr.

- d) Ange formeln för TK i detta fall.
- e) Rita motsvarande graf i samma koordinatsystem.

- f) Utred vilket alternativ, DIREKTTAXI eller TAXIN $\mathcal{U}$, som är billigast.
- g) Rita graferna med hjälp av kalkylprogram.
- 2 Grundavgiften för vatten till en villa är 120 kr för ett kvartal. Till detta kommer en förbrukningsavgift på 14 kr/m³.
- a) Vad blir totalkostnaden för ett kvartal med förbrukningen 16 m³?
- b) Kalla antalet kubikmeter vatten för n . Ange en formel för TK.
- c) Gör en tabell som visar totalkostnaden för ett kvartal då förbrukningen är 0, 10, 20, 30, 40, 50 resp 60 m³.
- d) Åskådliggör sambandet i ett koordinatsystem.
- e) Gör motsvarande figur med kalkylprogram, matematikverkstad eller grafitande räknare.
- 3 Firma **KRAVPOTATIS** leverar beställt antal säckar med potatis till kvartersbutiker. Kostnaden för detta framgår av diagrammet.



- a) Hur stor är grundavgiften för att köra till butiken?
- b) Ange totalkostnaden för 8 säckar.
- c) En butik betalade 290 kr. Hur många säckar levererades?
- d) Vad kostar 1 säck potatis (utan grundavgift)?
- e) Ange en formel för TK

Intäkter, kostnader och resultat

Firma **Holken** tillverkar och försäljer en enda produkt – fågelholkar. De fasta kostnaderna, FK, består av lokalhyra, löner och annonser. De är oberoende av hur många holkar som tillverkas på ett visst år. De rörliga kostnaderna, RK, består av materialkostnader för trä, spik och färg mm. De beror på antalet tillverkade holkar. Den totala intäkten, TI, beror på hur många holkar man säljer. Med *resultat* menas differensen mellan TI och TK:

$$\text{Resultat: } TI - TK = TI - (FK + RK)$$

Om TI är större än TK blir det vinst (positivt resultat).

Om TI är mindre än TK blir det förlust (negativt resultat).

Exempel

För ett visst år har Firma Holken fasta kostnader på 400 000 kr.

Materialkostnaden för en holk är 12 kr och de säljs för 30 kr/st.

Det betyder att

$$FK = 400\,000 \text{ kr} = 400 \text{ kkr}$$

$$RK = 12 \cdot n, \text{ där } n \text{ är antalet tillverkade holkar}$$

$$TK = 400\,000 + 12 \cdot n$$

$$TI = 30 \cdot n$$

Anta att man ett år tillverkar 15 000 holkar.

$$\text{Då blir } RK = 12 \cdot 15\,000 \text{ kr} = 180\,000 \text{ kr} = 180 \text{ kkr.}$$

$$TK = 400 \text{ kkr} + 180 \text{ kkr} = 580 \text{ kkr.}$$

$$TI = 30 \cdot 15\,000 \text{ kr} = 450\,000 \text{ kr} = 450 \text{ kkr.}$$

$$\text{Resultat: } 450 \text{ kkr} - 580 \text{ kkr} = -130 \text{ kkr,}$$

dvs en förlust på 130 000 kr.

Om produktionen detta år istället var 25 000 holkar blir

$$RK = 300 \text{ kkr, } TK = 700 \text{ kkr och } TI = 750 \text{ kkr.}$$

Resultat blir 50 kkr, dvs en vinst på 50 000 kr.

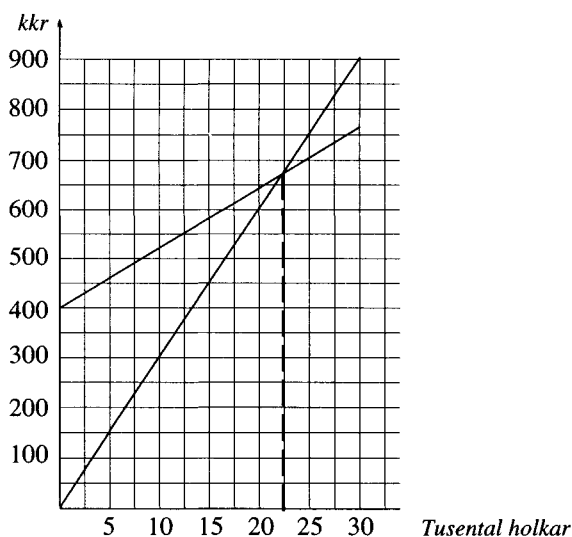
Elevuppgift

- 4 Firma **Holken** har kapacitet att tillverka 30 000 holkar/år. Beräkna resultatet om 30 000 holkar tillverkas och säljs.

Sambandet mellan kostnader, intäkter och antalet tillverkade enheter kan presenteras i ett resultatdiagram.

För Firma **Holken** gäller följande tabell:

n	$TK = 400\,000 + 12 \cdot n$	$TI = 30 \cdot n$
0	400 000	0
5000	460 000	150 000
10 000	520 000	300 000
20 000	640 000	600 000
25 000	700 000	750 000
30 000	760 000	900 000



- Diskutera avsnittet med lärare i företagsekonomi. Pröva gärna någon eller några av idéerna i samverkan. Finns det andra och kanske bättre områden som ni tillsammans kan utveckla och pröva?

Kritisk punkt

Skärningspunkten mellan linjerna i elevuppgift 4 kallas kritisk punkt. Om man går rakt ner från kritiska punkten ("break even") till vågräta axeln hamnar man på kritiska volymen. Vid detta antal tillverkade produkter blir det varken vinst eller förlust, det blir nollresultat. Värden till höger om kritiska volymen motsvarar vinst. Värden till vänster om kritiska volymen motsvarar förlust.

Bestämning av kritiska volymen:

Det framgår också av tabellen på föregående sida att nollresultat föreligger någonstans mellan 20 000 och 25 000 tillverkade holkar.

Ett tredje sätt är att beräkna den kritiska volymen med hjälp av en ekvation, som bygger på att vid denna tillverkningsvolym är TI och FK lika stora:

$$30 \cdot n = 400\,000 + 12 \cdot n$$

$$18 \cdot n = 400\,000$$

$$n = 400\,000/18 \approx 22\,200$$

Elevuppgifter

- 5 Firma *Holkens* fasta kostnader steg ett år till 440 000 kr. Man lyckades dock sänka materialkostnaderna till 10 kr/st och sålde samtliga holkar för 32 kr/st.

Ange formler för TK och TI

Hur stor är RK då 15 000 holkar tillverkas?

Vid vilken tillverkningsvolym blir TI = 512 kkr?

Gör ett resultatdiagram för produktion upp till 30 000 st.

Bestäm kritiska volymen.

Hur stor blir intäkten vid kritiska punkten?

- 6 A factory produces 400 items per week and sells them at 15 kr each. To do this it has fixed costs (rent etc.) of 3000 kr. The variable costs depending of the number of items produced are 4000 kr for 400 items.

Does it make a profit or a loss?

Draw graphs of money vs quantity (0 – 1000 items) for both income and costs.

Find the point at which costs = income, the break even point.

Gruppuppgifter

1. En verkstad tillverkar 5000 cykelpumpar per vecka och säljer dem för 20 kr/st. De fasta kostnaderna är 30 000 kr och de rörliga kostnaderna (materialkostnader) 15 kr per pump. Blir det vinst eller förlust.

Målsättningen är att verkstaden skall gå med en vinst på 20 000 kr per vecka. Detta kan ske på olika sätt:

- ökad produktion
- höjt försäljningspris
- sänkta kostnader.

2. Ökad produktion

- a) Gör tabell/resultatdiagram för 0 – 12 000 tillverkade pumpar.
- b) Bestäm kritiska volymen.
- c) Vid vilket antal tillverkade pumpar blir vinsten 20 000 kr ?
- ### 3. Höjt försäljningspris

- a) Produktionen antas ligga kvar på 5000 pumpar och kostnaderna är också oförändrade. Till vilket belopp måste försäljningspriset öka för att vinsten skall bli 20 000 kr?
- b) Bestäm den nya kritiska volymen.

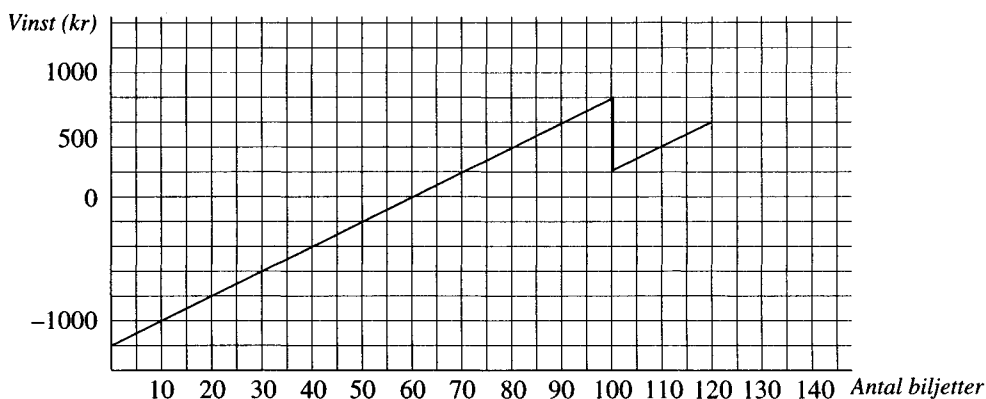
4. Sänkta kostnader

Produktion 5 000 pumpar, försäljningspris 20 kr.

- a) Rörliga kostnader 15 kr/st. Till vilket belopp måste man sänka de fasta kostnaderna för att vinsten skall bli 20 000 kr?
- b) Bestäm break even i detta fall.
- c) Fasta kostnader 30 000 kr. Till vilket belopp per pump skall man sänka de rörliga kostnaderna för att vinsten skall bli 20 000 kr?
- d) Bestäm kritiska volymen.
- ### 5. Realistisk lösning

De fyra föreslagna lösningarna är var för sig ganska orealistiska. Gör en lämplig kombination av dessa som ger en vinst på 20 000 kr.

- ### 6. Diagrammet nedan visar den kalkyl man gör inför ett planerat Skoldisco. Arrangörerna disponerar en samlingssal på skolan gratis, men har utgifter för discjockeyn.
- a) Hur stor blir förlusten om endast 40 biljetter säljs?
- b) Var ligger break even?
- c) Vad händer om försäljningen blir 100 biljetter?
- ### 7. a) Konstruera ca 10 uppgifter som kan besvaras med hjälp av figuren. Samt ge förslag på lösning till dessa.



Några förslag till temaområden

Exemplen här är hämtade ur Areskoug, *Miljöräkneboken*, Skedinger-Jacobsson, *Räkna för Farao*, Vejde, *Praktisk matematik*, Paulos, *Förstå siffror m fl.* Se *Litteratur* för fler källor.

Droppande kran

- Hur mycket varmvatten slösas bort med en droppande kran? Prova genom att låta kranen droppa en droppe i sekunden.
- Vad kostar vattnet från den droppande kranen på ett år?
- En kubikmeter varmvatten kräver ca 60 kWh energi. Hur mycket energi slösar den droppande kranen bort på ett år?
- Antag att det finns en miljon droppande varmvattenkranar i Sverige. Hur mycket energi slösas bort på ett år?

Jämför med att uppvärmningen av en lägenhet kräver ca 10 000 kWh under ett år.

Välj något exempel ur varje temaområde. Arbeta igenom det tillsammans med någon eller några kollegor. Sätt er in i elevens situation och försök besvara t ex följande frågor:

- Vilka svårigheter/möjligheter har eleven att förstå och lösa den aktuella uppgiften?
- Hur kan man utforma arbetsuppgifterna så att eleven känner igen sig, har glädje av egna erfarenheter och samtidigt utvecklar sitt matematiska kunnande?
- Vilka arbetssätt kan vi använda? Hur kan eleverna skaffa faktauppgifter själva?
- Hur kan man fördela hemuppgifter? Alla behöver kanske inte göra samma sak.
- Hur kan uppgiften med följdfrågor utvecklas till en större uppgift, eller ett projekt, som redovisas skriftligt, t ex med hjälp av ordbehandlare?
- Prova gärna några av de bästa idéerna i samverkan med lärare i lämpligt karaktärsämne.

Sänk temperaturen

För att värma en villa eller en stor lägenhet behövs ca 1800 l eldningsolja per år. Sänker man temperaturen $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ minskar oljeförbrukningen med ca 5 %. Räkna ut hur mycket man sparar per år.

En liter eldningsolja avger 5 g svaveldioxid, som bidrar till försurningen och 2 kg koldioxid, som bidrar till växthuseffekten.

Energiprognos

Tabellen visar hur användningen av fossila bränslen har ökat i världen. Energienheten är terawattår (TWy). $1\text{ TWy} = 8\,670\text{ TWh}$.

Kan du förklara talet 8670?

Energianvändning E (kol, olja, naturgas)

År	E (TWy)
1900	0,70
1920	1,30
1940	1,86
1960	4,06
1979	8,81
1988	9,35

- Rita ett diagram över energianvändningen E som funktion av tiden. Drag en jämn kurva genom punkterna.
- Antag att kurvan kan approximeras av exponentialfunktionen $E = E_0 2^{t/T}$ där t är tiden räknat från år 1900. Bestäm konstanterna E_0 och T .
- Rita funktionen i samma diagram som den faktiska energianvändningen och bedöm hur väl modellen stämmer.

Använd modellen för att ta reda på följande:

- Hur lång tid tar det för energianvändningen att fördubblas?
- Hur stor är den årliga procentuella tillväxten?
- Hur stor är energianvändningen enligt modellen när du fyller 50 år?

Spara

Samma år som du föddes vann din mormor på lotteri. Hon satte in 10000 kr på ett konto för din räkning. Sedan rörde hon inte kontot utan tänkte sig att du skulle få pengarna när du slutade skolan.

Försök uppskatta vad som nu finns på ditt konto. Gör ett diagram som visar hur pengarna vuxit om de inte beskattats.

Låna

Så här berättar Pelle, som köpt video på kredit:

”I går köpte jag en video för 6 400 kr. Ingen kontantinsats, och jag behöver bara betala 190 kr i månaden.

Finemang, tyckte jag då. I dag känner jag mig inte lika uppåt. En kompis har sagt att jag får hålla på och betala i flera år. Räntekostnaden blir flera tusen, sa han. Det är ju inte klokt.”

Tittar man närmare på Pelles lånevillkor ser man att av de 190 kr han skall betala i månaden är 5 kr en faktureringsavgift, och räntan är 2,05% per månad. Räkna ut räntan den första månaden? Den blir 131 kr.

När Pelle betalar 190 kr har han alltså minskat sin skuld med $190 \text{ kr} - 5 \text{ kr} - 131 \text{ kr} = 54 \text{ kr}$. Det är inte mycket. Inte att undra på att dröjer innan han blir skuldfri!

Hur mycket minskar skulden nästa månad? Då beräknas räntan på $6\,400 \text{ kr} - 54 \text{ kr} = 6\,346 \text{ kr}$. Räntan blir alltså lite mindre, och skulden minskar med lite mera, men skillnaden är inte stor.

Räkna med datorn

Beräkna hur lång tid det tar innan Pelle är skuldfri? Det verkar tråkigt och tröttsamt. (Enklare att fråga i affären.) Men ett datorprogram kan hjälpa dig. Då går det fort! Du kan dessutom se ”lånekostnaden”. Lånekostnaden är summan av all ränta och alla aviseringsavgifter Pelle betalat. (Det visar sig att det tar 5 år och 1 månad för Pelle att bli skuldfri, och då har han betalat mer än 5 000 kr i lånekostnader.)

Med datorns hjälp kan du också studera vad som händer om Pelle betalar mer eller mindre per månad. Gör det! Till exempel ser du att 250 kr /mån gör honom skuldfri efter 3 år och 2 månader, och då har han bara betalat ca 3 000 kr i lånekostnader.

Bättre lån

Om Pelle har fast inkomst kan han låna i bank. Det brukar vara bättre. Gå till en bank och ta reda på vad villkoren är för att få låna 6 400 kr! Beräkna räntan och sammanlagda lånekostnaden!

Den som tillhör ett fackförbund kan få medlemslån i banken. Då är räntan ännu lägre, och det finns också andra fördelar. Man brukar avbetala fyra gånger om året på sådana lån. Gå till banken och ta reda på villkoren för ett medlemslån! Beräkna sammanlagda lånekostnaden!

Köpa dator

En datoraffär erbjuder en fin begagnad datorutrustning (dator, skrivare, programvara, modem och scanner) för 30 000 kr. Du har inte så mycket utan måste låna 25 000 kr. Vilken låneform skall du välja, och vad kommer lånet att kosta dig? Skaffa dig de upplysningar du behöver.

Är det dyrt att ha djur?

Många tycker om djur. Den som tycker mycket om sin hund tänker inte precis på vad den kostar. Men den som skulle vilja ha en hund kan behöva veta vilka kostnaderna är, t ex för att övertyga familjen om att man har råd.

Vad kostar det att köpa och äga en hund? Gör en översikt – det finns ju stora och små hundar och ”grannvalpar” som man kan få nästan gratis. Översikten skall vara lätt att läsa och förstå.

Många tycker också om hästar och kan rida. Andra vill gärna lära sig. Tänk på utrustning och på ridlektioner. När det gäller ridning brukar man vara tvungen att tänka på kostnaderna. Det är dyrare att rida än det är t ex att spela fotboll eller ishockey. Varför tror du att det är så?

Någon drömmer kanske om att ha en egen häst. Vad kostar en häst? Hur skulle man kunna finansiera ett köp? Vad kostar det sedan att ha hästen med foder, stall, försäkring o s v? Gör en översikt som är lätt för en kamrat att förstå.

Körkort och bil

Du kan välja mellan att gå i körskola eller köra privat. Försök beräkna vad det kommer att kosta på det ena och det andra sättet. Tänk på att familjens bil kostar ca 13 kr/mil i driftskostnader.

När du har körkort drömmer du kanske om att småningom köpa en bil. Vad kostar det att köpa och äga en bil?

Gör en översikt av kostnaderna? Tänk på att den som ”kan bilar” kommer mycket billigare undan. Låt beskrivningen innehålla exempel på dyrare och billigare varianter.

Vad tycker du att lånet till bilköpet får kosta per månad? Varför?

Att köpa bil kan bli mycket dyrare än man tänkt sig. Här nedan finns ett autentiskt exempel från kronofogdemyndigheten i Göteborg (Rosén, 1994).

Bilköpet

Per är 22 år och skall köpa bil. I tidningen har han hittat en annons på en begagnad bil, en BMW. En liten röd BMW har alltid varit en dröm för Per och nu kanske den infrias.

Bilen kostar 80 000 kr. Det är betydligt mer än Per tänkt sig från början, men bilen ser bra ut och det gör den kvinnliga försäljaren också. Dessutom är färgen den rätta. Per slår till.

Handpenningen på 24 000 kr betalar han kontant av sparade pengar. Resten av pengarna lånar Per av bilfirman. Han skall under två år betala tillbaka dessa 56 000 kr med en ränta på 20%. Det blir en månadskostnad på 2 800 kr.

Försäljaren går igenom kontraktet och talar också om att det i kontraktet finns ett äganderättsförbehåll. Det förbehållet finns alltid med i bilköp på avbetalning.

Per borde kanske fundera mera på månadskostnaden med tanke på att han också har andra skulder att betala, men nu har han bara hästkrafter i huvudet och pengarna skall nog inte bli något problem. Kontraktet skrivs under och bilen levereras efter några timmar. På vägen hem åker Per in till en biltillbehörsfirma och köper en träratt och en växelspaksknopp i ädelträ för resten av sina sparpengar. Per åker till arbetet dagen därpå, stolt som en tupp, i sin nya bil.

Efter en tid blir Per uppsagd. Han får A-kassa och det är mycket mindre än den gamla lönen. Eftersom Per inte längre har några sparade pengar, och dessutom fasta utgifter (bl a en bilförsäkring på 12 800 kr/år) växer problemen snabbt.

Per tar kontakt med bilfirman och försöker få uppskov med betalningen. Detta går bilfirman inte med på men kan tänka sig att köpa tillbaka bilen för 45 000 kr. Det vill inte Per. Då säljer han den hellre på egen hand. (Detta får man inte göra när varan är köpt på avbetalning med äganderättsförbehåll.) Eftersom Per inte kan så mycket mer än färger på bilar har han inte servat den tillräckligt under tiden. Han har dessutom fått plåtskador som han inte haft råd att åtgärda. Värdet har sjunkit markant och Per får inte bilen såld till det pris han begär.

Per kommer nu efter med betalningarna till bilfirman. Firman går direkt till kronofogdemyndigheten och begär återtagning av bilen enligt avbetalningskontraktet.

Per förlorar sin bil. Det enda han har kvar är den krossade drömmen, en träratt och en växelspaksknopp i ädelträ.

Hur hade Per kunnat undvika att hamna i denna besvärliga situation? Före bilköpet skulle han ha analyserat sin ekonomiska förmåga. Han kanske inte skulle använt alla de sparade pengarna. Det är bra att ha en buffert.

Resa i Egypten – något för humanister?

Tre smakprov på hur det kan se ut.

Du startar från Kastrup kl 9.55 och är framme i Kairo kl 14.30 (lokal tid). Det går åt 52,9 liter flygbensin per minut och tankarna på planet rymmer 26 500 liter.

- Använd en karta för att beräkna planets genomsnittsfart.
- Hur mycket kostar flygbränslet för hela resan?
- Vad väger bensinen när planet är fulltankat?
- När du kommer till Kairo får planet inte landningstillstånd. Hur länge kan planet ligga kvar i luften innan bränslet är slut, om tankarna innehöll 18 000 liter när resan började?
- Medan du är kvar i luften tar du en kapsel hälsokostmedicin för att slippa magsjukan "Faraos hämnd". Du fortsätter sedan att ta en kapsel dagligen. Hur mycket billigare är varje kapsel om man köper den större förpackningen?

Art. nr.	Antal	Pris
Ventrux 399	50 st	61 kr
Ventrux 354	150 st	136 kr

- Hur många procent dyrare blir varje kapsel om man köper en liten förpackning i stället för en stor?
- En kapsel innehåller 75 miljoner mjölksyrabakterier som bygger upp motståndskraften. Vi antar att dessa ökar med 30% per timme. Efter x timmar finns y bakterier.

Ange ett uttryck som anger sambandet mellan x och y .

Beräkna antalet bakterier efter 3.5 timmar.

Med hur många procent har bakterieantalet ökat under den första kvarten?

Pyramiderna

Nästa dag åker du till pyramiderna i Giza i utkanten av Kairo. De tre kända faraonerna Cheop, Chefren och Mykerinos lät uppföra dessa omkring 1500 f.Kr.

Cheopspyramiden är den största pyramiden i Egypten och räknas som ett av världens sju underverk. När den byggdes var den 146,5 m hög och varje sida var 230,36 m lång.

Pyramiden bestod av 6,2 miljoner ton sten, och det tog 100 000 människor 21 år att bygga pyramiden. Man byggde dygnet runt under de tre månader då Nilen var översvämmad.

- För hur många år sedan byggdes pyramiderna?
- Hur stor markyta täcker pyramiden?
- Cheopspyramidens sidoyta är en likbent triangel. Hur lång är den kortaste vägen på utsidan från markplanet till pyramidens topp?
- När Napoleon besökte pyramiderna 1799 blev han imponerad av deras storlek. Han beräknade då att stenarna från Cheopspyramiden skulle räcka till en tre meter hög mur runt hela Frankrike. Hur bred skulle muren bli?

Matematikens historia

Så här skrev egyptierna tal

$$| = 1, ||| = 3, \bigcirc = 10, || \bigcirc = 12$$

$$\begin{array}{l} |||| \bigcirc \bigcirc \\ |||| \bigcirc \bigcirc \end{array} = 48, \bigodot = 100 \text{ o s v.}$$

Tal i bråkform skrev man som en summa av bråk som vart och ett hade täljaren 1. (Undantag $2/3$)

$5/8$ skrevs som $1/2 + 1/8$. Man skrev bråken, som kallades stambråk, så att man bara skrev nämnaren och satte en oval figur, symbolen för invertering, ovanför. Exempel = $1/12$.

- Skriv talet 31 och din egen ålder med egyptiernas siffror
- Vilket tal är $|| \bigcirc \bigcirc$?
- Skriv följande summor av stambråk som ett bråk med täljaren 2:
a) $1/3 + 1/15$ b) $1/6 + 1/66$
- Egyptiernas matematikkunskaper går att läsa på de s k Rhindpapyren från ca 1700 f.Kr. Där hittar man bl a de första exemplen på ekvationstänkande. Kan du lösa problemet som lyder så här: "Finn ett tal som om man adderar det till sin sjundedel blir 19"?
- Ett annat exempel lyder: "En mängd och en fjärdedel av den ger tillsammans 15". Ta reda på vilken mängd det är.

Spel

Tipset

Du och två kompisar har satsat 50 kr var i ett tipsbolag. Skall ni spela på stryktips, måltips eller oddset för att få så stor chans som möjligt till vinst? Redogör för era diskussioner och motivera ert val. Ni får själva ta reda på vad stryktips, måltips och oddset är, om ni inte redan vet det.

Lotto

Du och din lilla syster skall sätta ihop en lottorad. Din syster envisas med att välja raden 1, 2, 3, 4, 5, 6 och 7. Kan du gå med på det? I så fall varför eller varför inte?

Tärningsspel

Ett tärningsspel består av fyra sexsidiga tärningar med följande utseende:

Svart tärning:	0 på två sidor 4 på fyra sidor
Röd tärning:	3 på alla sidor
Vit tärning:	2 på fyra sidor 6 på två sidor
Blå tärning:	1 på tre sidor 5 på tre sidor

Spelet spelas av två spelare. Spelarna väljer i tur och ordning var sin tärning. Tärningarna kastas, och den vars tärning visar högst tal vinner.

Du väljer tärning först. Vilken skall du välja för att vinna så ofta som möjligt?

Motspelaren väljer tärning först. Hur skall du då välja tärning för att vinna så ofta som möjligt?

Är detta ett rättvist spel eller inte?

Litteratur

- Andersson, G. (1984). Litet statistiskt lexikon. *Nämna-
ren* 11(1), 48-51.
- Andersson, G. (1991). Nämnaren och statistiken. *Nämna-
ren* 18(3/4), 140-141.
- Areskoug, M. (1991). Miljömatematik. *Nämna-
ren* 18(1), 32-34.
- Bengtzelius, A. (1983). Matematik i yrkesutbild-
ningen. *Nämna-
ren* 9(4), s 38-41.
- Bergstén, P. (1995). Drakar, vatten, eld och väder-
kvarnar. *Nämna-
ren* 22(3), 46-48.
- Blomgren, E-S. (1988). En vagn kommer lastad. *Nämna-
ren* 15(4), 31-33.
- Borg, K. (1995). Modeller. *Nämna-
ren* 22(4), 38-41.
- Carlsson, C. (1989). Problemlösning med hjälp av
dagstidning. *Nämna-
ren* 16(4), 40-41.
- Dahl, K. (1995). Ger matematiken men eller me-
ning? *Nämna-
ren* 22(2), 15-22.
- Ekström Holm, W. (1990). Samarbete – Självkän-
sla – Ansvar. *Nämna-
ren* 17(2), 18-21.
- Fransén, J. & Gustavsson, H. (1980). Ett rikare före-
ningsliv. *Nämna-
ren* 7(2), 49-54.
- Fransén, J. (1981). Matematik för kapitalister. *Nämna-
ren* 7 (3), 39-43.
- Friberg, J. (1992). Mesopotamisk matematik – del 2. *Nämna-
ren* 20(1), 12-17.
- Friberg, J. (1992). Mesopotamisk matematik. *Nämna-
ren* 19(4), 9-16.
- Fritzén, L. (1993). Matte i miljöundervisningen. *Nämna-
ren* 20(1), 32-35.
- Gerdes, P. (1986). Matematik för frigörelse. *Nämna-
ren* 12(3), 18-23.
- Gerdes, P. (1989). Mathematics education and culture
in third world countries. *Nämna-
ren* 16(4), 24-27.
- Gårding, L. (1985). Modeller och verklighet. *Nämna-
ren* 11(4), 7-10.
- Kvammen, P.I. (1986). Matematikk, natur og sam-
funn. *Nämna-
ren* 12(3), 14-17.
- Lundberg, B. (1989). Var dags matematik. *Nämna-
ren* 16(4), 34-35.
- Nordell, B. (1994). Att uppskatta myggor. *Nämna-
ren* 21(1), 30-31.
- Orstadius, P-A. (1984). Till en mattelärare om
blockeringar och kursinnehåll. *Nämna-
ren* 10(4), 24-26.
- Rosén, I. (1994). Problem med pengar. *Nämna-
ren* 21(1), 14-17.
- Rusek, A. (1993). Matematik och samhällskunskap
- Aldrig mötas de två? *Nämna-
ren* 20(4), 24-27.
- Selander, T. (1981). Resemontörens problem. *Nämna-
ren* 7(4), 53-56.
- Strandenes, B. J. K. (1989). Er undervisningsopp-
legget årsak til at mange elever har matematikk-
vansker? *Nämna-
ren* 16(1), 28-32.
- Sturk, O. (1989). Vi byggede en friggebod. *Nämna-
ren* 16(3), 20-22.
- Thompson, J. (1984). Vad kan vi lära av matema-
tikens historia? *Nämna-
ren* 11(1), 42-44, *Nämna-
ren* 11(2), 49-52, *Nämna-
ren*, 11(3), 48-51, *Nämna-
ren* 11(4), 28-31.
- Tvete, K. (1987). Geometri – Jordmåling. *Nämna-
ren* 14(2), 34-39.
- Weibull, T. (1989). Vad är diskret matematik? *Nämna-
ren* 16(4), 28-31.
- Andersson, G. (1989). *Lögn och sanning i statistik*.
Stockholm: Liber.
- Areskoug, M. (1990). *Miljöräkneboken*. Dalby:
Carlsteds förlag AB.
- Brogård, U. & Kristersson, K. (1989). *Förberedande
yrkesmatematik, Fordonsmekanik*. Torshälla:
Ekonomikonsult
- Dahl, K. & Nordquist, S. (1994). *Matte med me-
ning*. Stockholm: ALFABETA.
- Fritzén, L. & Klewborn, E. (1991). *Lilla miljöräkne-
boken – Sopor*. Dalby: Carlstedts förlag.
- Fritzén, L. & Klewborn, E. (1991). *Lilla miljöräkne-
boken – Trafik*. Dalby: Carlstedts förlag.
- Lindberg, D. & Kuijl, B. (1993). *Hur man räknade
förr*. Solna: Almqvist & Wiksell.
- McLeish, J. (1992). *Matematikens kulturhistoria*.
Borås: FORUM.
- Nystedt, L. (1993) *På tal om tal. En läsebok i mate-
matik*. Stockholm: Instant Mathematics.
- Paulos, J. A. (1991). *Förstå siffror*. Stockholm:
Natur & Kultur.
- Schedinger-Jacobsson, M. (1991). *Räkna för Farao*.
Dalby: Carlstedts förlag.
- Sjöström, O. (1993). *Statistik, praxis och bildning
- perspektiv på utbildning*. Ett försök till helhets-
perspektiv där grundutbildning i statistik relate-
ras till statistisk tillämpning i yrkesliv och livet i
övrigt. Uppsala universitet, Filosofiska institu-
tionen.
- Sällström, P. (1991). *Tecken att tänka med*. Om
symbolisk notation inom musik, dans, kartografi,
matematik, fysik, kemi, teknologi, arkitektur,
färglära och bildkonst. Malmö: Carlssons Bok-
förlag.

- Thompson, J. (1991). *Historiens matematik*. Lund: Studentlitteratur.
- Thompson, J. (1991). Tal och räkning - ett historiskt perspektiv. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red). *Tal och räkning 1*. Lund: Studentlitteratur.
- Thompson, J. (1991). Problemlösning - ett historiskt perspektiv. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red). *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur.
- Thompson, J. (1992). Geometri och statistik i ett historiskt perspektiv. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red). *Geometri och statistik*. Lund: Studentlitteratur.
- Vejde, O. (1992). *Praktisk matematik 1 & 2*. Stockholm: Brevskolan.
- Wistedt, I., Brattström, G. & Jacobsson, C. (1992). *Att vardagsanknyta matematikundervisningen. Slutrapport från projektet "Vardagskunskaper och skolmatematik"*. Stockholms universitet. Pedagogiska institutionen.
- Åberg, L. (Red) (1993). *Vetenskapens vackra verktyg. Matematik som arbetsredskap*. Stockholm: Naturvetenskapliga forskningsrådet.
- Blom, W., Niss, M. & Huntley, I. (Eds.) (1989). *Modelling, applications and applied problem solving: Teaching mathematics in a real context*. Chichester: Ellis Horwood.
- Brun, V. (1967). *Alt er tall. Matematikkens historie fra oldtid till renessanse*. Oslo: Universitetsforlaget.
- Christoffersen, T. & Clausen, F. (1993). *Udsagn - en mosaik om matematik*. København: LMFK-salg.
- Cockcroft, W. H. (Chairman) (1982). *Mathematics Counts: Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools*. London: H.M.S.O.
- Frandsen, J. (1992). *De(t) gyldne snit - i kunst, natur og matematik*. Herning: Forlaget Systime.
- Friberg, J. (1984). Numbers and measures in the earliest written records. *Scientific American* 250, 110-118.
- Harris, M. (Ed.) (1991). *School Mathematics at Work*. London: Falmer Press.
- Hoppensteadt, F. C. & Peskin, C. S. (1992). *Mathematics in Medicine and Life Sciences*. Berlin: Springer-Verlag.
- Howson, G. & Kahane, J.-P. (1988). *Mathematics as a Service Subject*. ICMI Study Series. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lowe, I. (1991). *Mathematics at Work. Volume 1 & 2*. Canberra: Australian Academy of Science.
- Lowe, I. (1991). *Mathematics at Work. Volume 1 & 2. Teachers guide to 1 & 2*. Canberra: Australian Academy of Science.
- National Council of Teachers of Mathematics (1979). *Applications in School Mathematics. NCTM Yearbook 1979*. Reston, Va.: Author.
- Niss, M. (1994). Mathematics in society. In R. Biehler et al (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht: Kluwer.
- Nissen, G. & Blomhøj, M. (1994). *Hul i kulturen. Sæt matematik på plads i kultur og samfundsbilledet*. Viborg: Spektrum.
- Swetz, F.J. (1994). *From five fingers to infinity. A journey through the history of mathematics*. Chicago and La Salle: Open Court.
- Swetz, F., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B. & Katz, V. (1995). *Learn from the masters*. Washington D.C.: The Mathematical Association of America, MAA.
- Touborg, J. P. (Red) (1991). *Autentiske matematikanvendelser*. København: Matematiklærerforeningen.

7

Att utgå från problem

Ett av de viktigaste målen för undervisningen i matematik är att eleverna skall kunna lösa problem. De skall också kunna tolka och arbeta med matematiska modeller och tillämpa matematik i vardagsliv, andra ämnen och – i matematik. I detta kapitel behandlas också problem med en annan utgångspunkt – som medel att stimulera elevens intresse och tänkande. I anslutning till detta presenteras en Problemsamling som underlag för diskussion och olika aktiviteter.

Problemlösning som mål

Problemlösning, användning av matematiska modeller, kommunikation och matematikens idéhistoria är fyra viktiga aspekter av ämnet matematik som skall belysas i undervisningen i gymnasieskolan:

Matematikundervisningen syftar till att ge eleverna tilltro till det egna tänkandet samt till den egna förmågan att lära sig matematik och använda matematik i olika situationer. Undervisningen skall utveckla elevernas nyfikenhet, öppenhet, analytiska förmåga, kreativitet och ihärdighet vid matematisk problemlösning samt förmåga att generalisera, abstrahera och estetiskt fullända lösningar och resultat.

Undervisningen skall sträva efter att eleverna skall få uppleva tillfredsställelsen i att behärska matematiska begrepp och metoder, i att upptäcka mönster och samband och i att lösa problem samt lära sig använda och inse värdet av matematikens symboler och uttryckssätt.

(s 146)

Många uppfattar felaktigt matematik som ett statiskt ämne dominerat av isolerade fakta, begränsande regler och formler. I själva verket är matematik ett skapande ämne som ständigt utvecklas. Att formulera, diskutera och lösa problem har varit en av de viktigaste drivkrafterna bakom denna utveckling. Tyvärr är de problem som sysselsätter dagens forskare inom disciplinen matematik med få undantag för svåra eller otillgängliga för att ens kunna diskuteras i skolmatematiken.

För att alla elever skall få chansen till stimulerande upplevelser av matematikens natur och karaktär (och för att vi som lärare skall få glädjen att ägna oss åt problemlösning) är det viktigt att vi löser problem tillsammans med eleverna.

Det är spännande och intressant att fortlöpande studera och analysera undervisning i problemlösning. Vi måste försöka följa forskning om problemlösning i matematik, men samtidigt komma ihåg att vetenskaplig kunskap endast uttalar sig om begränsade delar av skolans vardagsarbete. En lärares yrkesskicklighet kan inte härledas direkt eller uteslutande ur forskningsdiscipliner. Vi bör sträva efter en god balans mellan vetenskaplig grund och beprövad erfarenhet. Att reflektera över, själv utveckla och utbyta erfarenheter med kollegor kring undervisning i problemlösning bör få ökat utrymme. I litteraturlistan finns ett antal förslag på några aktuella artiklar och böcker, se s 114. I Schoenfeld (1992) finns en översikt över internationell forskning kring området.

För att komma i stämning innan du läser vidare...

Vi föreslår nu att du studerar problemsamlingen på s 115 och löser några problem som du finner intressanta. Fundera också över problemlösningens natur och karaktär, vilka typer av problem som finns representerade och vilka kunskaper och strategier elever behöver för att lösa dem.

- Ge exempel på problem i matematik som du
 - a) tycker man måste klara av,
 - b) tycker är roliga att lösa,
 - c) inte tycker om. Motivera dina svar!
- Ge exempel på problem där du haft nytta och glädje av matematikkunskaper eller där arbete med problem gett nytt kunnande. Hur lång tid tog det för dig att lösa problemet om man inkluderar hela processen från det du formulerade problemet till att du använt eller utvärderat resultatet? På vilka delar av "problemlösningssprocessen", (t ex planering, ta fram data, beräkningar, rimlighetskontroll) la du ner mest tid?
- Hur lång tid brukar dina elever få på sig i skolan att lösa de problem som t ex ingår i en diagnos eller ett prov?
- Matematik **är** problemlösning, har någon sagt. Håller du med? Varför eller varför inte?

Olika typer av problem

För att arbetet med problem i matematik skall kunna varieras på ett sätt som passar olika elevers erfarenheter, intressen och förutsättningar är det angeläget att vi som lärare skaffar oss god kännedom om olika typer av problem och problemsituationer. Utan anspråk på att vara fullständiga nämner vi här några viktiga problemtyper

- från andra skolämnen, från vardagsliv och samhälle
- från olika delar av matematikämnet
 - med olika komplexa beräkningar som speglar t ex operationers innebörd och relationer, olika talområden och talmängder
 - med olika storheter som antal, vikt, volym, temperatur, längd, pris, hastighet, tid osv samt olika enheter som g, kg, ton, liter, dm, kr, år osv
- som kan lösas med hjälp av t ex miniräknare, formler eller ekvationer
- som kan lösas med hjälp av olika representationsformer som figurer, tabeller, diagram
- som kan lösas med olika metoder och strategier
- givna med olika språkliga formuleringar, olika lång text, muntligt, med eller utan bilder, autentiska texter med överflödig information eller där information saknas
- som ger mer än ett svar, som saknar svar
- som tar olika lång tid att lösa

Vi behöver reflektera över variationerna och låta eleverna möta olika problemtyper. Ett lämpligt urval från denna mångfald är viktig för att kunna individualisera undervisningen så bra som möjligt.

- Ge exempel på relevanta och intressanta problem av de slag vi försökt beskriva – eller andra. Diskutera elevernas tankar om och vid lösning av problemen.
- Kan vi öka variation, bredd och balans mellan olika typer av problem och problemlösningsaktiviteter som eleverna borde få möta? Hur ska det i så fall ske? Problembank på skolan?
- Hur kan användningen av miniräknare och datorer bäst bidra till att utveckla elevernas problemlösningsförmåga?

Undervisning om och i problemlösning

Alla människor har i alla tider strävat efter att kunna lösa problem. Det ligger i den mänskliga naturen. För att inte bli lurad i vardagsliv och samhälle, för att kunna förstå och påverka som fullvärdig medlem i demokratiska processer behöver man kunna kontrollera andras lösningar, formulera och lösa problem.

En del elever har tyvärr fått dåligt självförtroende och negativa erfarenheter genom misslyckanden. Därför är det viktigt att i början ta upp enkla problem, visa på olika strategier och olika sätt att lösa samma problem och lära oss värdera arbetet mer. Man kan behöva motverka fixeringen på facitsvar som läroboksräknande ofta leder till, och visa att det är processen och tänkandet som är det viktiga. Det får ta tid att lösa problem och man kan gärna arbeta i grupp.

Ett och samma problem kan användas i flera syften. De kan utformas och presenteras på olika sätt, beroende på situation och sammanhang. Ett övergripande syfte är att stimulera, intressera och ge upplevelser. Tänk om all matematik kunde uppfattas som om den handlade om intressanta problem!

Att sätta sig in i och lösa problem tar tid. Ett problem som är tänkt att ta 10 minuter i en klass kan ge upphov till nya problem och generaliseringar som motiverar att hela lektionen eller fler lektioner används.

Eleverna har olika erfarenheter av och kunskaper i problemlösning. Dessa är väsentliga att känna till för att kunna åstadkomma goda undervisningssituationer. Det gäller kunskaper i termer av rätt, fel, lösningsfrekvenser och i att lösa problem av olika svårighetsgrad. Men framförallt gäller det elevernas kvalitativa uppfattningar och sätt att tänka, när de arbetar med olika typer av problem och problemmiljöer – också utanför läroboken och klassrummet.

Som professionell lärare söker man hela tiden fördjupa sina kunskaper om hur eleverna tänker och reagerar och hur deras uppfattningar utvecklas. Sådana kunskaper är grundläggande för att kunna förstå och utveckla elevernas problemlösningsförmåga i matematik.

I klassrummet strävar vi efter olika mönster av aktiviteter för våra elever som leder till att vi kan

- skapa ett positivt klassrumsklimat och ge eleverna självförtroende
- individualisera problemlösningen och stimulera eleverna genom val eller konstruktion av lämpliga problem och problemmiljöer i olika matematikmoment och i andra ämnen. Detta kan ske i samarbete med eleverna och utifrån deras intresse, förutsättningar, mögnad, språk, räknefärdigheter och i relation till olika lösningsmetoder och hjälpmedel.

- planera och organisera arbetsformer och aktiviteter som visat sig framgångsrika vid undervisning i problemlösning i matematik. Det gäller t ex grupparbete kring problem och problemmiljöer, användning av olika strategier som att
 - rita en bild eller figur,
 - gissa och pröva,
 - lösa ett enklare problem först,
 - göra upp en tabell eller diagram,
 - använda laborativa materiel eller modeller
 - arbeta baklänges,
 - ställa upp en ekvation eller ett uttryck.

Det gäller att finna övningar i problemformulering och samarbete med t ex lärare i andra ämnen för att öka elevernas kunskaper om och erfarenheter av olika problemmiljöer (jfr kapitel 6).

Vi behöver känna till olika metoder när vi skall hjälpa eleverna att få tilltro till sin förmåga, att kontrollera det egna tänkandet, diskutera fördelar och nackdelar med olika lösningar och strategier, studera problems struktur samt stimulera till generaliseringar (Lester, 1988).

- Diskutera olika sätt att skapa ett bra klassrumsklimat som kan ge eleverna ökat självförtroende.
- Hur fördelar sig elevernas arbetstid på olika arbetsformer när det gäller problemlösning i matematik? Hur skulle du vilja ha det? Möjligheter och hinder?
- Hur kan man arbeta med att utveckla elevernas kunskaper och känsla för de strategier som nämns i texten nedan?
- Vilka fördelar och nackdelar har den läroboksserie du använder med tanke på de typer av uppgifter, det kunnande och lärande om och i problemlösning, som vi berör i detta avsnitt?
- Hur kan vi stimulera till problemlösning utanför matematiklektioner? Vilka typer av aktiviteter kan man tänka sig?

Att utgå från problem

Problemlösning som medel

Problemlösning kan användas som medel för att nå olika mål i matematikundervisningen. Det gemensamma är då att vi vill intressera och stimulera elevers tänkande. I *Problemsamling* (s 115) har vi samlat ett antal problem i det syftet. De är uppdelade på aritmetik, aritmetik-algebra, algebra, geometri, statistik och funktioner. En del av problemen berör flera moment. Till problemen finns det kommentarer om hur de kan användas och vad man kan vänta sig om de används. Uppgifterna är ofta valda från kända texter, som vi hänvisar till och där man kan fortsätta leta efter bra problem.

Rika problem

Samma problem kan ibland användas i olika syften. De är på ett eller annat sätt "rika" och speglar matematikens natur och karaktär. Reflektionen kring problemet och lösningsprocessen frilägger då viktiga relationer och samband. En del sådana "rika" problem använder vi för att de kan lösas på olika sätt och därmed kan bidra till individualisering, att de ibland ger upphov till nya frågor och problem och att de kanske kan utvidgas eller till och med generaliseras.

Undervisningsmetodik

Det kan vara så att vi i vår undervisning syftar till att *repetera eller stärka grundläggande begrepp*. I stället för att ställa frågor om definitioner, metoder och regler kan vi ge ett problem som för lösningen kräver att man har grundbegreppen klara för sig. Eller att man med problem på ett mer stimulerande sätt kan *belysa och befästa rutinfärdigheter*.

Vi kanske vill *förbereda tankegångar* inför ett nytt avsnitt, ge en *gemensam erfarenhetsbakgrund* av upplevelser och intryck. För att kunna ta till sig ett nytt begrepp måste de flesta kunna anknyta det till något de "vet" eller kan bli påmind om. "Det var det där vi gjorde en gång" ger en annan startpunkt än "Vad är det här nu för nytt?". Ibland vill vi ha en *introduktionsuppgift* för att fånga intresset, för att fokusera på betydelsefulla poänger i ett nytt avsnitt.

Det finns problem som med enkla medel ger tillfälle till *matematiska resonemang* och till att dra slutsatser. Det kan gälla problem som ger *matematisk allmänbildning* och problem som kan ge *kunskap om sakinnehåll och idéhistoria*. Det kan t o m vara så att vi ibland tar till *annorlunda problem* för omväxlings skull.

Elever gör problem

Elever kan själva bidra med problem, formulera problem från karaktärsämnen eller från situationer och upplevelser de haft på fritiden. Det har vi tidigare visat på i kapitel 2. I samband med elevarbete i grupper har det betonats att det är bra om eleverna gör problem åt varandra (kapitel 5). De kan också studera och söka förbättra och förklara varandras formuleringar och lösningar. Matematiken är ju ett kommunikationsämne.

Låt t ex uppdraget att ta fram ett ”*Dagens problem*” eller ”*Veckans problem*” cirkulera bland eleverna! Låt det gärna ske i elevgrupper så att eleverna kan tala med varandra och säga ”vi föreslår” eller ”vi har det här problemet”. De skall veta att de kan göra korta ”Kommer du ihåg?” eller andra problem som tar längre tid och kanske kan lämnas till andra att fundera på. Varför inte använda Nämnarens teknik här också: Vi visar problemet i dag och ni visar lösningar nästa vecka?

Att presentera problem

Det finns många kreativa och produktiva sätt att presentera problem. Ett exempel är VDM, *Vår Dagliga Manipulation*, som Andrejs Dunkels utarbetat och beskrivit i olika sammanhang (se t ex Dunkels, 1985). En VDM-uppgift läggs utan kommentar på arbetsprojektorn. Eleverna får fundera några minuter och sedan diskuteras uppgiften och dess lösning – ett effektivt sätt att starta lektionen och komma in på aktuella problemställningar.

Ett sätt är att varje vecka anslå ”*Veckans problem*”. Det får inte vara överdrivet svåra eller knepiga problem. Problemens art kan anpassas till studieprogram och elevgrupp. Om uppgiften är för svår (eller t o m för lätt) så uppstår inte intresset. Men lämplig svårighetsgrad – och de flesta fångas av sin problemlösningslust. Det behöver inte vara så att alla elever skall fundera på problemen till en början. Det är tillräckligt om några gör det och om verksamheten ökar intresset bland potentiellt matematikintresserade. I litteraturlistan efter Problemsamling ges ytterligare förslag till lämpliga problem.

- Bläddra igenom Problemsamlingen (s 115) igen. Välj ut några problem och fundera över hur de kan användas i anslutning till de aktiviteter som beskrivs i texten. Fördelar, nackdelar jämfört med läroboken? Hur kan olika presentationssätt öka elevernas intresse och få dem att ägna mer tid till matematikstudier? När?

Tävlingsproblem kan ha en plats i sådana sammanhang. (Matematik-tävlingar associeras ibland med Svenska Dagbladets tävlingar eller Olympiadproblem, som endast är till för en handfull gymnasister.) Det behöver inte vara fråga om elittävlingar. Både i schack och idrott tävlas det ju på olika nivåer – varför inte i matematik? Den som anser att individuellt tävlande inte behöver något ytterligare understöd – snarare tvärtom – kan använda problemen utan tävlingsinslag. Danderyds gymnasium har t ex initierat tävlingar för högstadiet och problemen i dem är ofta bra som ”Veckans problem” i gymnasiets första årskurs. ”Dagens problem” ger ett ypperligt tillfälle till problemlösning för eleverna. Nästan alla kursmoment och nästan alla ovan beskrivna aspekter kan belysas utifrån elevförslag.

Elever är duktiga på att göra både ekvationer och problem som leder till ekvationssystem, bara de kommer i gång. Var inte rädd för att det blir för enkelt! Det brukar snarare bli tvärtom.

Litteratur

- Allwood, C. M. (1991). Rätt som det är blir det fel. *Nämnnaren* 18(3/4), 38-40.
- Dunkels, A. (1985). VDM – Vår Dagliga Manipulation. *Nämnnaren* 12(1), 32-35.
- Firsov, V. (1993). Schools for gifted children. *Nämnnaren* 20(2), *Nämnnaren*, 40-43.
- Laksov, D. (1993). Problemlösning eller matematiska idéer i undervisningen? *Nämnnaren* 20(4), 43-47
- Lennerstad H. (1995). Om problemlösning och människans osynlighet. *Nämnnaren* 22(1) 42-45.
- Lester, F. (1988). Teaching mathematical problem solving. *Nämnnaren* 15(3), 32-43.
- Mouwitz, L. (1995). Lokal kurs i problemlösning. *Nämnnaren* 22(2), 38-43.
- Munther, R. (1983). Veckans problem. *Nämnnaren* 9(4), 36-37.
- Nämnnaren*. (1983). Tema Problemlösning. 9(3).
- Silvén, S. (1995). Hur blev den intelligenta en ”dum” elev. *Nämnnaren* (22)3, s 16-19.
- Silvén, S. (1995). Problemlösning för alla – eller för redan duktiga? *Nämnnaren* (22)4, s 35-37.
- Solvang, R. (1985). Problemlösning eller problemorienterte undervisningsopplegg. *Nämnnaren* 11(4), 14-17.
- Ulin, B. (1983). Problemlösning och tänkande. *Nämnnaren* 9(3), Tema Problemlösning, 34-38.
- Ulin, B. (1994). Problemlösning och teori i skolan. *Nämnnaren* 21(1), 38-41.
- Ulin, B. (1995). Generalisering är en dygd. *Nämnnaren* 22(1), 37-40.
- Dahl, K. (1991). *Den fantastiska matematiken*. Stockholm: Fischer&Co.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (red), (1991). *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur.
- Pettersson, A. (1995). *Hur löser elever uppgifter i matematik?* Skolverkets rapport 61. Stockholm: Liber Publikationstjänst.
- Ulin, B. (1988). *Att finna ett spår*. Stockholm: Liber Utbildning.
- Ulin, B. (1991). Att upptäcka samband i matematik. I Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (red.) (1991). *Problemlösning*. Lund Studentlitteratur.
- Ulin, B. (1993). *Liten guide för matematiska problemlösare*. Stockholm: Liber Utbildning.
- Wistedt, I. (1993). Elevers svårigheter att formulera matematiska problem. *NOMAD* 1(1), 40-54.
- Blomhøj, M. (1993). Modellerings betydning for tilegnelsen af matematiske begreber. *NOMAD* 1(1), 18-39.
- Borgersen, H. E. (1994). Open ended problem solving in geometry. *NOMAD* 2(2), 6-35.
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. New York: Doubleday & Company Inc.
- Schoenfeld, A. H. (1990). *A source book for college mathematics teaching*. The Mathematical Association of America.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In Grouws, D.A. (Ed.). (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. A project of the National Council of teachers of Mathematics, NCTM. New York: MacMillan.
- Wilson, P.S. (1993). *Research ideas for the Classroom: High school Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.

Problemsamling

Här finns ett antal problem fördelade på grundläggande matematikmoment i kurs A. I följande kommentarer ges upplysningar om varifrån de är hämtade med förslag till hur de kan användas eller med erfarenheter från hur de använts.

Tal och räkning

Lös följande uppgifter enskilt i huvudet. Bilda sedan grupper och berätta för varandra hur ni löst dem.

- 1 a) $6 \cdot 425$ b) $612 / 3$
c) Vilket tal är störst $5/6$ eller $7/8$?
- 2 Hur mycket kostar fyra CD-skivor om en skiva kostar 149 kr?
- 3 Vid en realisation sänks priset med 40 %. Vad kostar en jacka som kostat 950 kr?
- 4 Hur mycket är $56/0,9$ på ett ungefär? Hur mycket är $56/0,09$ på ett ungefär?
- 5 Här är fem siffror: 2, 9, 3, 5, 1. Gör ett tal av dessa som ligger så nära 20 000 som möjligt.
- 6 Hur hög är en flaggstång? Hur kan man bestämma höjden? (jfr Ek, 1988).)
- 7 Hur lång tid tar det att räkna till 1 miljon om man uttalar alla räkneorden?

Kommentar

Det är bra att kunna utföra beräkningar i huvudet både i skolan och livet. Det ger bättre taluppfattning och förenklar val av strategier vid problemlösning. Beroende på talens storlek och inbördes relationer använder man olika beräkningssätt. Ofta kan man vid gruppdiskussion lära sig nya sätt och byta upp sig till bättre lösningar än den man först använde (Claesson, 1991; Persson, 1991; MacIntosh, 1995).

Kommentar

I vardagsliv och karaktärsämnen är det viktigt med uppskattning och överslagsräkning. Man behöver skaffa sig referenspunkter för att jämföra och t ex avgöra "mindre än", "litet större än", "nära 1", "hälften så stor", "tio gånger mindre", "dubbelt så stor", (Reys m fl, 1995a, 1995b, 1995c).

- Claesson (1991), Persson (1991) och MacIntosh (1995) innehåller exempel på undervisning med uppgifter och strategier i huvudräkning. Diskutera metodik och uppgifter, välj ut eller konstruera egna för att använda i egen klass.
- I Reys m fl (1995a) ges förslag på taluppfattningsuppgifter för åk 8, med resultatredovisning (Reys m fl, 1995b). Fundera över vilka uppgifter som skulle vara lämpliga för dina elever och komplettera med lämpligare uppgifter till ett test med 40-50 uppgifter och pröva i din klass.

- 8 Bisar, 30 år, ser i en tidning att en löneförhöjning kan ge antingen 15% eller 530 kr, beroende på vilket som är mest. Han vill veta var brytpunkten ligger och vad den nya lönen blir. Den gamla lönen är 3 530 kr. Han gör anteckningar på en lapp. Förklara beräkningarna och hur han tänker.

Kommentar

Det kan vara intressant och givande att se hur olika personer räknar. Matematik är ju ett kommunikationsämne och ska användas för att redovisa resonemang. På komvux och i skolor med många invandrare kan man se stora variationer. Ovanstående är ett sådant exempel.

1% (kr)	15% (kr)	Kvar (kr)
10	150	
30	450	80
5	75	5
0,30	4,50	0,50
35,30		
Gammal lön:	3530 kr	
Ökning:	530 kr	
	3000 kr	
	1000 kr	
	60 kr	
	4060 kr	

- 9 Den 15 september 1989 fanns i gymnasieskolan sammanlagt 10 733 elever på humanistisk linje och 22 391 på naturvetenskaplig linje. Av det sammanlagda antalet elever på de två linjerna var 63 procent kvinnor. Hur många kvinnor fanns på den humanistiska linjen?

- (1) Andelen kvinnor på den naturvetenskapliga linjen var 51 procent.
 (2) Sammanlagt fanns 12 256 män på de två linjerna.

Tillräcklig information för lösning erhålls

- A i (1) men ej i (2)
 B i (2) men ej i (1)
 C i (1) tillsammans med (2)
 D i (1) och (2) var för sig
 E ej genom de båda påståendena

10 Att dela lön

Du har fått ett arbete som ska vara färdigt inom två veckor. Du ska utföra arbetet hemma och arbetet består i att packa små tvålar i askar som ska användas på olika hotell i landet. Du kommer att få 4 000 kr för arbetet, men du måste stå för transportkostnaden själv.

Du hämtar materialet måndagen den 4 juli. Du tar först buss till "tvålfirman" och sedan taxi hem med tvålar och askar. Bussresan kostar 20 kr och taxiresan

kostar 180 kr. Efter en vecka förstår du att du inte kommer att hinna bli klar till fredagen den 15 juli. Du ringer till Anna och ber henne hjälpa dig. Hon kan arbeta tisdag, onsdag och torsdag sammanlagt ungefär i 30 timmar.

När ni arbetar märker du att Anna arbetar fortare än du. Anna packar i genomsnitt 150 tvålar per timme och du 100 tvålar per timme.

Sent på torsdag kväll är ni klara och du och Anna tar en taxi på fredag morgon och lämnar de paketerade tvålarna. Taxiresan kostar 200 kr. Ni åker buss hem och det kostar 20 kr/person.

Efter två veckor får du lönen 4 000 kr. Hur ska den delas upp mellan er?

Gör två olika kalkyler, som visar hur pengarna kan fördelas. Motivera varför du har fördelat pengarna som du gjort.

- 11 Av siffrorna 1, 2, 3, 4, 5, och 6 (var och en använd exakt en gång) ska man bilda två naturliga tal, som skiljer sig från varandra med mindre än 50. Det räcker att hitta ett sätt att göra det på.

Kommentar

Problem nr 9 är hämtat från ett högskoleprov och testar om man vet vilka uppgifter som behövs för att kunna svara på frågan. 10 är första uppgiften ur breddningsdelen i kurs A-

provet vt 95. 11 är problem 1913 ur Nämnaren 19(3), s 42. Det gavs vid en tävling i Lettland 1992. Lösning i 20(1), s 41.

Inledande algebra

- 12 Känner du till hur man i huvudet kan beräkna kvadraten på tal som slutar på 5?

$$35^2 = 3 \cdot 4 \cdot 100 + 25 = 1\,225$$

$$65^2 = 6 \cdot 7 \cdot 100 + 25 = 4\,225$$

Ser du någon regel eller något mönster? Pröva din förmodan med ett annat tal. Stämmer det? Kontrollera gärna med miniräknaren. Formulera regeln i ord. Kan du förklara varför den är riktig eller bevisa att den stämmer?

- 13 Hur är det med produkten av två tal som ligger symmetriskt kring ett tal som slutar på 5?

$$87 \cdot 83 = 8 \cdot 9 \cdot 100 + 7 \cdot 3 = 7\,221$$

Ser du någon likhet med förra uppgiften? Kan du hitta en regel och bevisa att den gäller?

Kommentar

"Kan du förklara (bevisa)?" leder ofta till räkning med bokstäver. Det är kanske lätt för några men absolut inte för alla. Man kan se 13 som en fortsättning på 12.

- 14 En person "förkortar" $16/64 = 1/4$ genom att stryka sexorna. Stämmer det?

Finns det andra tal där denna säregna metod också ger rätt svar? Jfr $56/64 \neq 5/4$! Öka på antalet sexor och förkorta $166/664$, $1666/6664$... Kontrollera om det stämmer. Vad kan det i så fall bero på?

- 15 Talen ovan kan skrivas

$$(15a + 1)/(60a + 4)$$

för olika val av a . Förklara hur.

Hur kan uttrycket $(15a + 1)/(60a + 4)$ förkortas till $1/4$ oberoende av värdet på a ?

- 16 Det tar tre timmar för Kalle att måla en vägg. För Lisa skulle det ta 6 timmar att måla samma vägg. Hur lång tid tar det om de målar väggen tillsammans, samtidigt?

Kommentar

Uppgift 16 visar hur eleverna kan tänka på flera olika sätt. Genom att ordna deras arbete så att alla lösningar blir redovisade, når man också att lösningarna så småningom generaliseras.

Detta problem passar särskilt bra att ge när det är fem minuter kvar av lektionen. Då säger någon elev innan det hunnit ringa "fyra och en halv timme". Men från annat håll hörs "Det kan det inte bli, för då kan Kalle göra det själv i stället".

Nästa gång har nästan alla elever löst uppgiften och fått svaret 2 timmar. De tycker att svaret är rimligt, men flera av dem säger att de inte kan skriva ner sin lösning. En av dem säger att han förstår hur kompisens tänkt, när kompisens beskriver sin lösning. Han kan ändå inte beskriva sin egen lösning.

Eleverna kan först bilda par för att hjälpas åt att beskriva sina lösningar. Sedan vänder de sig parvis så att naturliga fyra-grupper bildas. Eftersom grupperna arbetar i olika takt finns andra uppgifter med samma struktur men andra siffror (och annan svårighetsgrad) i beredskap. Eleverna i grupperna får nu välja om de vill arbeta tillsammans alla fyra, två och två eller enskilt. När alla fyra i gruppen är färdiga visar de "diskussionen" och lösningarna för läraren. I uppgifterna som finns i beredskap ändras Kalles och Lisas tider:

16a Kalle 2 timmar, Lisa 4 timmar

16b Kalle 2 timmar, Lisa 6 timmar

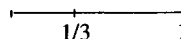
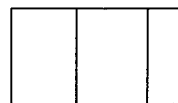
16c Kalle 1 timme, Lisa 4 timmar

16d Kalle 45 minuter, Lisa 1 timme

Det är intressant att följa diskussionen i grupperna. Eleverna tänker på olika sätt.

En del vill helst rita en rektangel (väggen) och med ett streck ange hur långt målaren hinner på en timme. Den andra målar från andra hållet. Från denna konkreta modell för tankandet till att beskriva den i symboler är det en lång väg. Att sedan tänka i symboler när lösningen skrivs ner är ytterligare ett steg.

Några elever har svårt för att "tänka i bit". De vill hellre se pro-



blemet som ett hastighetsproblem. De ritar ofta en tidslinje, egentligen en sträcka, där de markerar t ex att den ena målaren målar dubbelt så fort som den andra. Det betyder att om båda målar $1/3$ av den tid det skulle ta för den långsammare Lisa, så stämmer det – Lisa får ju hjälp av en som på samma tid målar dubbelt så mycket. (På motsvarande sätt kan man finna den gemensamma tiden som $2/3$ av den tid den snabbare Kalle skulle behövt ensam). I de andra uppgifterna tänker eleverna på samma sätt. Här kan det vara lika svårt – eller svårare – att beskriva hur man tänkt. Sannolikt har eleverna i tanken snabbt växlat mellan hastighet och målad yta. Inga elever använde vid försöket ekvationslösning som metod att lösa uppgiften.

De elever som har börjat "tänka i bit" har svårigheter att förstå de lösningar som bygger på förhållande (hastighet). Av intresse är också att se om eleverna byter metod när de får andra siffror att räkna med. Att byta siffror kan ju sägas vara att ta några steg på generaliseringens väg – blir det "likadant" eller inte? Så är vi framme vid att generalisera.

Ordet "generalisera" innebär här helt enkelt att från enskilda uppgifter med tal komma fram till att det inte spelar någon roll vilka talen är, man har en "struktur" på problemet och kan behandla det med bokstavssymboler för tal.

- 17 Det tar T_1 timmar för Kalle att måla en vägg. För Lisa skulle det ta T_2 timmar att måla samma vägg. Hur lång tid tar det om de samtidigt målar väggen tillsammans?

Kommentar forts

Elever som tänker i bit får $1/T_1 + 1/T_2 = 1/T$ medan de andra får $T_1 T_2 / (T_1 + T_2) = T$. På båda sätten kan eleverna se att det uttryck de funnit täcker alla de fall de tidigare räknat på. Om de kan beskriva lösningen förstår de sannolikt också att sambanden gäller vilka tider T_1 och T_2 än representerar. I sammanfattning ser olika lösningar ut så här:

Uppg	Tänka i bit	I förhållande	Tid
16	$1/3 + 1/6 = 1/2$	$(1/3) \cdot 6 = 2$	2
16a	$1/2 + 1/4 = 3/4$	$(1/3) \cdot 4 = 4/3$	4/3
16b	$1/2 + 1/6 = 2/3$	$(1/4) \cdot 6 = 3/2$	3/2
16c	$1 + 1/4 = 5/4$	$(1/5) \cdot 4 = 4/5$	4/5
16d	$4/3 + 1 = 7/3$	$(3/7) \cdot 1 = 3/7$	3/7
	$1/T_1 + 1/T_2 = 1/T$	$T_1 T_2 / (T_1 + T_2) = T$	T

En "abstraktion" som eleverna inte gjorde, men som en ekvationsvan lärare kan finna naturlig, är att kalla den gemensamma, sökta tiden T eller x (timmar) när de "tänkte i bit". I den första uppgiften får man då ekvationen $x(1/3) + x(1/6) = 1$. Men ekvationstänkandet mognar för många elever först senare under gymnasietiden.

Många gånger generaliserar elever utan att tänka på det. Den som t ex i ett sifferexempel sett hur man multiplicerar eller dividerar bråk tänker utan vidare att så kan hon/han räkna med alla bråk.

Algebra

- 18 Ge exempel på en formel du använt sedan grundskolan. Varför gäller den?

- 19 Stämmer det att man får

$$(mv)^2/m^2v = m$$

om man förenklar uttrycket? Förklara varför det är rätt eller – varför det är fel!

- 20 Förenkla uttrycket $(x/3 - 1/3)/(1 - x)$. Förklara hur du tänker.

- 21 Vi vill beräkna h då $V = a^2 h/3$

Kan man göra som beskrivs nedan? Vilket sätt är bäst? Varför?

- a) Lös ut h och sätt in siffervärden.
b) Sätt in siffervärden och lös ekvationen.

- 22 Ta två på varandra följande udda tal. Lägg ihop dem och dela summan med 2. Prova med olika startvärden. Vad upptäcker du?

- 23 Be en elev tänka på två tal – t ex positiva heltal – och nämna ett samband mellan dem. Be de andra ta reda på vilka tal hon tänker på. Det kommer fram många förslag som stämmer. Vilket är det rätta? Den första eleven får nämna ett samband till, osv.

Kommentar

Uppgifter av typ 18 kan komma upp naturligt och ofta.

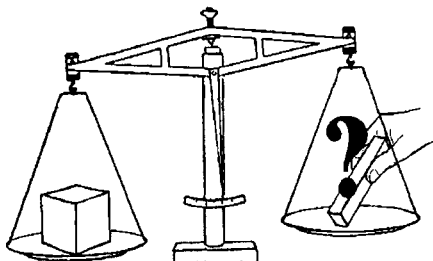
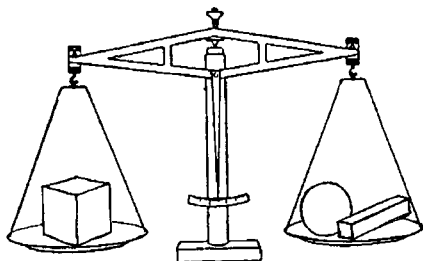
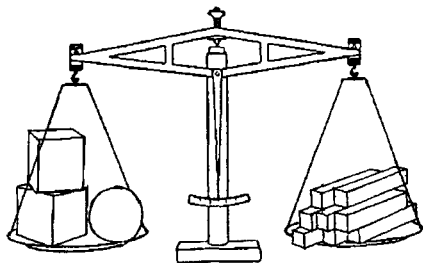
Fler problem liknande 19 och 20 för reflektion kring grundläggande algebra finns i Ekenstam, 1991.

21 kan göras enklare genom att också ange värden på ingående storheter – utom på h .

22 kan följas upp genom att man tittar på det allmänna fallet med talen $2n - 1$ och $2n + 1$. Halva summan blir $2n$, som alltid är ett jämnt tal. Följdfrågor som kan dyka upp är "Hur blir det om man har två på varandra följande jämna?" eller "Om man har tre på varandra följande udda tal?"

Om man gör som i 23, då och då, har man ganska trevligt i elevgrupper med dåliga förkunskaper även i grundskolan. Man kan räkna med att många elever har flera minnen av hur man gör än av vad det gäller. Några problem av denna typ – de behöver inte ta mer än 10 minuter per gång – gör att "söka två tal" blir naturligt.

23 Tolka följande figur och lös problemet.



24 Hildur i telefon till Sven: "Du Svenne jag har tröttnat på dig. Nu tar jag en cykeltur till Sune."

Svenne: "Men Hildur då, så kan du inte göra". Sven tar bilen för att köra ikapp Hildur innan hon kommer fram till Sune. När och var träffas Svenne och Hildur, eller är det Hildur och Sune som träffas?

Kommentar

Det avbildade problemet i 23 är lätt att uppfatta och kan leda till ekvationssystem. Problemet presenteras i Nämnaren 3, 1984/85, och där ges inte mindre än tio lösningsmetoder.

24 kan användas för introduktion till ekvationssystem. Vilka uppgifter behövs? Efter några fantasifulla förslag kom eleverna fram till att avståndet mellan Sventorp och Hildeberg är 10 km. Hildur cyklar 20 km/h. Sven kör 50 km/h. Sune bor i Sunne, 2 mil från Hildeberg.

	10 km	20 km
Sventorp		
Hildeberg		
Sunne		

Eleverna kan sätta sig i grupper och lösa problemet på så många olika sätt som möjligt. De har tidigare löst problem genom att

Gissa och pröva, Göra tabell, Hitta mönster, Utföra problemet, Resonera logiskt, Använda grafisk lösning, Använda ekvationer

Lösningarna som kommer fram i grupperna är skiftande från det konkreta att göra ett mönster, gissa och pröva till det logiska resonemanget om relativ tid. En flicka som "tjuvläst" i förväg klarade den traditionella lösningen med ekvationssystem.

När eleverna uppmanades att hitta en algebraisk lösning med hjälp av $s = vt$, som de använt förr, kom de fram till uppställningen:

	Hildur	Sven
Sträcka	?	?
Hastighet	20 km/h	50 km/h
Tid	?	?

Därefter var det dags för introduktionen av ekvationssystem (Widell, 1991). Lärobokens metod att på en halv sida beskriva hur man löser ekvationssystem skulle vara snabbare och effektivare? Men är det lika roligt och ger det samma kunskande på lång sikt?

- 25 Undersök med hjälp av miniräknare om det finns tal x så att

$$5 = 10^x \quad 50 = 10^x$$

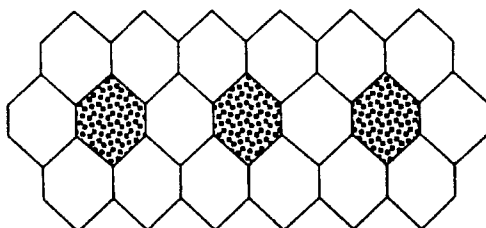
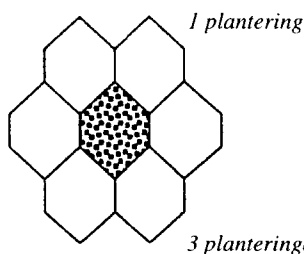
$$500 = 10^x \quad 5000 = 10^x$$

Ser du något mönster? Hur fortsätter det? Kan du förklara varför det blir så?

- 26 Man vill ha blomplanteringar i en dekorativ rad. Varje plantering har formen av en sexhörning och omges av kantstenar som har samma form. I figurerna är de mörka områdena planteringar, de ljusa kantstenar.

a) Ange ett uttryck för hur många kantstenar som behövs om man har n planteringar i en rad.

b) Hur många planteringar får man om man använder 166 st kantstenar?



Kommentar

25 är väl ett klassiskt sätt att förbereda introduktionen av logaritmer. En sådan förberedelse kan ju självfallet också göras omedelbart innan man inleder avsnittet. Men det är bra om upplevelsen fått tid att smälta in i erfarenhetsmassan.

26 är hämtat från kurs A-provet maj 1995.

Geometri

- 27 Ta två ståltrådar som båda är 24 cm. Låt dem bilda två olika rektanglar. Har de samma area?

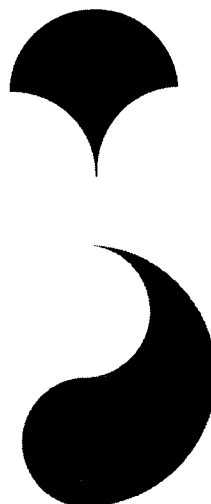
- 28 Vilken av alla rektanglar som kan bildas av en tråd som är 24 cm lång har störst area? Finns det något område som har tråden till omkrets och ännu större area?

Kommentar

Alltid finns det några som säger: "Javisst, det är ju samma tråd" – när det gäller 27.

Då är det inte så bra att direkt ta fram ett motexempel – eller att genast låta någon annan elev göra det. Låt vara att elevens förmodan inte bottnar i någon grundlig tanke eller i någon tanke alls. Eleven har gjort en fråga om hans synpunkt rimlig förmodan och den förtjänar att bemötas väl. "Är du säker ... kan du förklara... Hur ska du övertyga Maria, som inte tror..." Nu kommer extremfallet "ingen area" sannolikt fram, kanske som argument från Maria, och reaktionen "Ja det kunde jag ju förstått" uppstår förvisso. Det finns goda skäl att ta allt i positiv anda.

- 29 Hur beräknar man enklast areorna av figurerna nedan? (Se även Grevholm, 1991.)



- 30 Av ett A-4 papper kan man göra två olika cylindrar. Kommer de att ha samma volym?

Kommentar

När det gäller omkrets och area, respektive area och volym kan det vara givande att fråga om en för eleverna välkänd "sats" kan utvidgas från två till tre dimensioner.

Jämför uppgift 30 med 27. Uppgift 30 provas i åk 1 på en tvåårig gymnasielinje med "måttligt intresserade elever". Nästan alla elever tänker sig att cylindrarna har samma volym. "Det är ju samma papper". Här är frestelsen att genast avvisa denna tanke inte så stor som vid omkrets och area. Undersökningar görs, nästan alla får olika resultat. De flesta blir överraskade, (se vidare Larsson, 1992).

Men en av eleverna är övertygad om att volymerna är olika därför att cylindrarna saknar botten och lock. Lärarstudenten gör ett nytt problem:

- 31 Låt oss tänka oss botten och lock och att begränsningareorna är lika stora. Får vi då lika stora volymer?

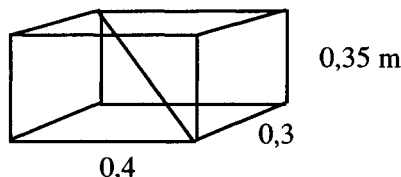
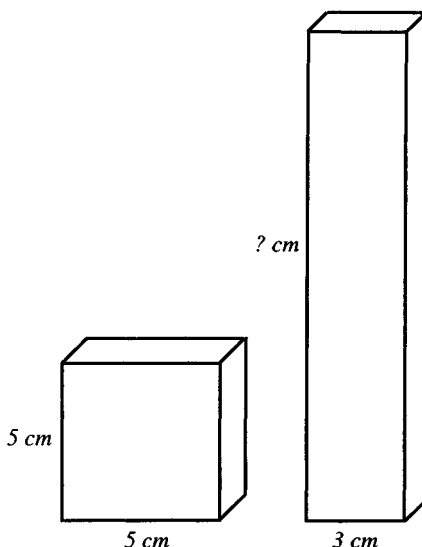
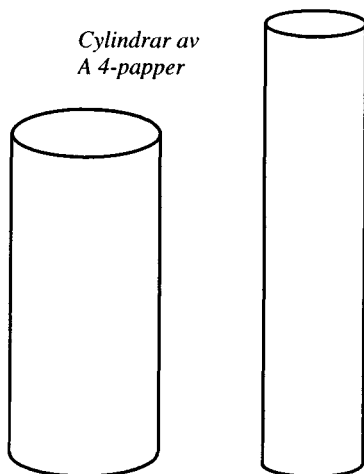
Kommentar forts

Lektionen är slut, och eleverna får som hemuppgift att fundera på saken. Nästa lektion övergår man klokt nog till rätblock. Man jämför en kub och ett rätblock med kvadratisk botten som anges i figuren. Pappmodeller används.

Klassen har besvär med att beräkna rätblockets höjd. Men så småningom går det, och volymerna kan beräknas. De flesta blir överraskade igen. Dels kan man förkasta tanken att botten och lock spelar någon roll. Men framför allt – samma area, och tänk att det kan bli så stor volymskillnad!

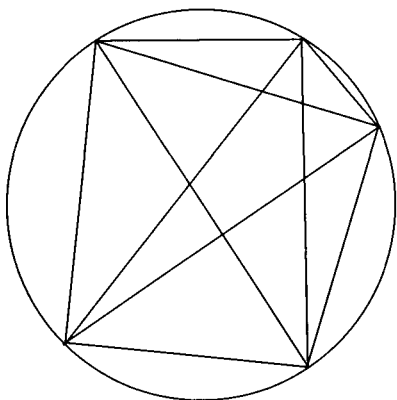
Någon säger, att tanken "samma begränsningarea, samma volym" förefaller lite rimligare än "samma omkrets, samma area". Det är lättare att tänka i två dimensioner än i tre. Men antag nu att man ställt cylinder-rätblocksproblemet i en klass med "matematikvana" elever. Då hade man efteråt kunnat säga: Tänk om vi "förenklat" och tagit motsvarande problem i två dimensioner först! Tanken "det blir samma volym" hade inte framstått riktigt i samma ljus och överraskningen hade inte blivit riktigt lika stor. En undersökning hade förstås varit nödvändig – det kanske inte är likadant i tre dimensioner som i två. Men man kan lära av att förenkla

Cylindrar av
A 4-papper



- 32 I figuren är en låda avbildad.

Får en 0,6 m lång stång plats i lådan? Formulera en regel eller sats som ger längden av rymddiagonalen i ett rätblock. (Pythagoras' sats i rymden).



- 33 Välj 2, 3, 4, 5 osv punkter på en cirkels omkrets och sammanbind varje punkt med alla andra. I hur många områden delas cirkelområdet? Ser du hur antalet områden ökar?

34 Trianglar

Din uppgift är att undersöka trianglar. Alla trianglar som du undersöker ska ha en sida som är 6,0 cm och höjden mot denna ska vara 4,0 cm.

- Rita en spetsvinklig, en rätvinklig och en trubbvinklig triangel med dessa mått.
- Mät sidorna och beräkna dina trianglars omkrets och area. Vilka slutsatser drar du utifrån dina beräkningar?
- Rita och bestäm sidornas längd i den triangel som har minsta möjliga omkrets. Hur lång är denna omkrets? Motivera också varför du valt denna triangel.
- Finns det ett största möjliga värde på omkretsen av en triangel med ovanstående mått? Hur ser i så fall en sådan triangel ut?

Vid bedömningen av ditt arbete tar läraren hänsyn till följande:

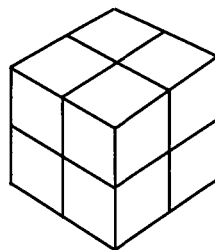
Hur korrekt och tydligt du ritar dina figurer. Om du gör korrekta mätningar och beräkningar. Hur väl du redovisar dina beräkningar och metoder. Hur väl du motiverar dina slutsatser.

Kommentar

Vanligen är problem valda så att det mönster, den regel eller det samband man funnit kan utvidgas och håller i t ex flera dimensioner. Eleverna kan också behöva se exempel på att det inte går som de tänkt. Mången elev som fått fram sviten 2, 4, 8, 16... i uppgift 33 hörs, om de fortsätter, stöna: "Jag har räknat fel...det måste bli 32..." Ges inte sambandet mellan antalet punkter p och antalet områden N av formeln $N = 2^{p-1}$? Det är "en rimlig förmodan" att det går bra. Men 6 punkter på periferin som sammanbinds på angivet sätt delar cirkelområdet i 31 delar... Antalet delområden tycks man få ur Pascals triangel, om man i var rad adderar de första fem talen (och struntar i övriga om det finns fler, och nöjer sig med färre än fem i rader där det finns mindre än fem tal). Varför är det så?

Uppgift 34 är hämtad från breddningsdelen på kurs A-provet i maj, 1995 och lämpar sig väl för grupparbete.

- 35 Skaffa dig eller tänk dig en målad kub med kantlängden 2 cm, där sidoytorna är indelade i kvadrater med sidan 1 cm. Tänk dig att den sågas i småkuber med kantlängden 1 cm. Hur många småkuber blir det och hur kommer de att vara målade?



Tänk dig sedan kuber med kantlängden 3, 4, 5, 6, 7, ... cm som sågas isär på liknande sätt. Hur många småkuber blir det och hur kommer de att vara målade? Hur många småkuber har 0, 1, 2, 3, ... målade sidoytor? Ser du något mönster?

Hur ser det ut om vi sågar itu en kub med kantlängden n cm?

Kommentar

Uppgift 35 utvecklar rumsuppfattning, att se mönster, att konstruera och kontrollera en formel och är lämpad för grupparbete. Några elevkommentarer: "Vi lärde oss mycket och upptäckte en del som vi aldrig tänkt på. Roligare ju svårare det blev. Bra, man lärde sig tänka tredimensionellt. Skitroligt, man fick använda hjärnan. Bra som omväxling till boken, som inte är rolig".

Eleverna kan få ledtråden att sätta upp en tabell för att systematisera arbetet. Om man anser att man behöver leda / styra arbetet mera, så kan man visa tabellen härintill.

Statistik

36 Sjukt om könsskillnader

Tabellen härintill visar antal anställda män och kvinnor samt sjukfrånvaron 1995 för en stor koncern.

Uppgifterna ovan baseras på totalundersökning och vi kan i det följande även utgå ifrån att inga mät- eller bearbetningsfel föreligger. Graviditetsfrånvaro är frånräknad (planerad frånvaro såsom tjänstledighet för graviditet - och militärtjänst - anses inte medföra några större produktionsstörningar).

Chefen för koncernen gjorde med anledning av frånvarouppgifterna i tabellen ungefär följande uttalande:

Att man i offentlig förvaltning inte gör någon åtskillnad mellan män och kvinnor vid tjänstetillsättningar är en sund och riktig princip, som man bör värna om. Inom näringslivet ställer sig dock saken något annorlunda. Som företagsledare har man ansvar för de anställda och aktieägarna och för företagets fortbestånd. Särskilt i kärva tider måste därför den ansvarsfulle företagsledaren vara ytterst noga med vilken personal han anlitar. Frånvarosiffrorna i tabellen visar klart att, om det finns manlig arbetskraft att tillgå, så bör man i första hand anställa män. Det går ju inte att folk är borta från jobbet hur som helst om man

Kubens kantlängd	Antal målade sidoytor					Antal småkuber
	0	1	2	3	4	
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
20						
<i>n</i>						

	Män	Kvinnor	Samtliga
Antal anställda	11 000	9 000	20 000
Antal sjukdgr genomsnitt	17,0	20,8	18,7

vill uppnå och bibehålla den höga produktionsnivå, som är nödvändig för företagets fortbestånd i nuvarande ytterst hårda konkurrensläge.

Vad anser du om uttalandet? Kan det vara så att skillnaden i medelvärden beror på annat än skillnad i kön?

Kommentar

Uppgifterna förefaller kanske bestickande men det är faktiskt inte alls klart att antalet sjukdagar skulle minska om man enbart anställde män. Det som skiljer de 11 000 i vänstra kolumnen från de 9 000 i mittenkolumnen behöver inte enbart vara faktorn kön. Det kan föreligga skillnader också beträffande andra faktorer som man tror har betydelse för sjukfrånvaron, t ex åldern och typ av arbete. Låt oss studera sjukfrånvaron för de 20 000 i koncernen efter en grovuppdelning av arbetena i tre grupper:

	Män sjkdgr	Kvinnor sjkdgr
Chefsbefattningar	4,5	5,0
Övr. "intressanta" befattningar	6,3	6,8
Löpande band o dyl	23,3	22,6

Kan uppgifterna i den senare tabellen verkligen överensstämma med de uppgivna totalmedelvärdena 17,0 och 20,8? Kan det vara så att differensen mellan totalmedelvärdena kan uppstå även om könsfaktorn inte alls har någon betydelse för sjukfrånvaron? (För vidare referenser och liknande problem se Andersson, 1991, s 140.)

37 Statistik om utbildning

Skoltidningen har fått nedanstående tabell från SCB och behöver några diagram till en artikel om framtidsutsikterna för olika utbildningsgrupper. Rita diagram som klart visar vad som kommer att hända med de olika utbildningsgrupperna. Rita gärna olika typer av diagram. Beskriv vad du vill visa med varje diagram. Vilka slutsatser kan man dra av tabellen och dina diagram.

Beräknad tillgång och efterfrågan av arbetskraft per utbildningsgrupp, 1995-2015. 1 000 tal.

Utbildningsgrupp	Tillgång			Efterfrågan		
	1995	2005	2015	1995	2005	2015
Industri och hantverks- utbildning (t. ex industri, bygg- och anläggning)	572	664	748	556	648	698
Naturbruk (t ex lantbruk, fiske)	64	77	90	60	65	64
Teknik	144	228	298	140	228	327
Vård t ex läkare, tand- läkare, sjuksköterskor)	195	230	232	192	226	248
Undervisning (t ex förskollärare, lärare)	262	292	281	268	297	297

Källa: SCB, Naturmiljön i siffror. 1990.

Funktionslära

38 Ali håller choklad med temperaturen 87°C i en termos. Han ställer sedan termosen utomhus där temperaturen är noll grader. För att beskriva hur temperaturen $y^{\circ}\text{C}$ hos chokladen förändras med tiden x timmar undersöker han två olika modeller.

Modell A: $y = 87 - 5x$

Modell B: $y = 87 \cdot 0,95^x$

- Beräkna chokladens temperatur efter 5 timmar enligt de båda modellerna A och B.
- Skriv med egna ord vad modell A respektive modell B innebär.
- Kommentera det resultat du får om du beräknar chokladens temperatur efter 20 timmar enligt de båda modellerna.

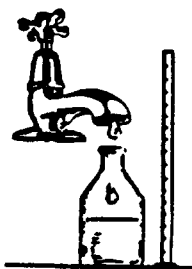
Kommentar

Uppgift 37 är hämtad från breddningsdelen i det nationella kurs A-provet, maj 1995. Problem 38 är ännu en uppgift från det första nationella kurs A-provet.

39 Filling Bottles

In order to calibrate a bottle so that it may be used to measure liquids, it is necessary to know how the height of the liquid in the bottle depends upon the volume in the bottle.

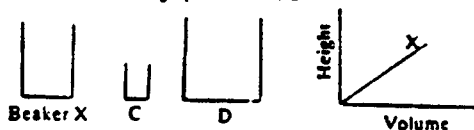
The graph (to the right) shows how the height of liquid in beaker X varies as water is steadily dripped into it. Copy the graph, and on the same diagram, show the height-volume relationship for beakers A and B.



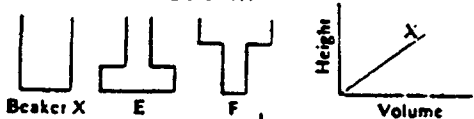
Figur till problem 39



Sketch two more graphs for C and D...



And two more for E and F...



40 Bottles and graphs

Here are 6 bottles and 9 graphs. Choose the correct graph for each bottle among the graphs to the right.

Explain your reasoning clearly. For the remaining 3 graphs, sketch what the bottles should look like.



Ink bottle



Conical flask



Evaporating flask



Bucket

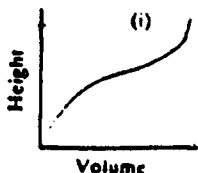
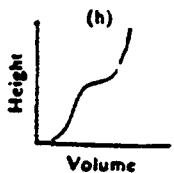
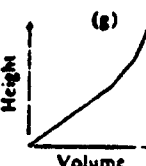
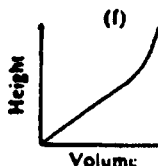
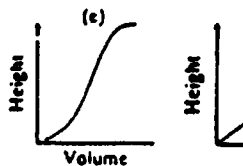
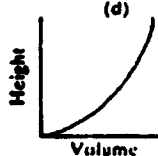
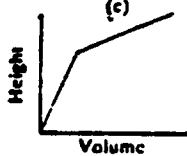
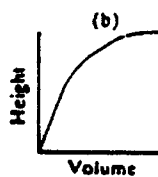
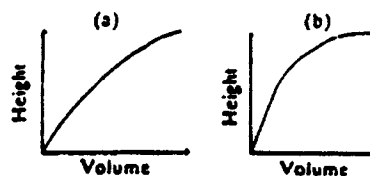


Vase



Plugged funnel

Figur med 9 grafer till problem 40



41 Det är lätt att skriva 100 och 1000 som potenser, 10^2 och 10^3 . Kan man skriva 500 som en tiopotens? För vilket tal är

$500 = 10^{(?)}$? Prova!

Hur kan 50 skrivas? $50 = 10^{(?)}$?

Går det med 5? $5 = 10^{(?)}$?

Rita linjen $y = 10x$.

Hur kan $y = 10^x$ se ut?

42 Folkmängden i ett område i Afrika växer med 3,5 % per år. Hur lång tid tar det tills folkmängden fördubblats? Rita en kurva som beskriver tillväxten med hjälp av din räknare.

Kommentar

Det är viktigt att träna förmågan att förstå och avläsa grafer. Många behöver erfarenheter för att undvika missförstånd. Att tolka och konstruera grafer är också stimulerande och be-
greppsstärkande.

Problem 39 och 40 kommer från Shell Centre of Mathematical Education i Nottingham. I

"The red Box" från samma ställe finns många fler exempel, (se Shell centre ..., 1985). Jämför uppgift 42 med uppgift 25. Uppgift 42 kan lösas på olika sätt. Jämför med beskrivningen i kapitel 2. Intressant kan också vara att prova med olika tillväxtprocent: 1%, 2% och 3% per år. Hur långa blir fördubblingstiderna?

Många olika problem som rör exponentiell tillväxt eller exponentiellt avtagande kan tas upp utan att man behöver nämna ordet logaritm. Att det finns elever som lär sig att man får talet i rutan genom att trycka på lg-knappen är bara bra. Då har man ju också vunnit något. Framför allt tycker eleverna inte att logaritmer är något konstigt när de dyker upp på allvar. Begreppet får tid att mogna.

Litteratur

- Amundsson, J. (1983). Problem genom tiderna. *Nämnan* 9(3), Tema Problemlösning, 65-69.
- Andersson, G. (1991). Nämnan och statistiken. *Nämnan* 18(3-4), 140-141.
- Bergstén, P. (1995). Drakar, vatten, eld och väderkvarnar. *Nämnan* 22(3), 46-48.
- Claesson, P. (1991). Huvudräkningsknep. *Nämnan* 18(3-4), 88-91.
- Dunkels, A. (1991). Problemlösning på geobräde. *Nämnan* 18(3/4), 96-100.
- Dunkels, A. (1992). Olympiadproblem från Lettland. *Nämnan* 19(3), 42-44. Lösningar i 20(1), 41-43.
- Ek, G. (1988). Om en flaggstång. *Nämnan* 15(4), 29-30.
- Emanuelsson, G. (1983). Hur räknar man harar? *Nämnan* 9(4), 51.
- Emanuelsson, G. & Munther, R. (1983). Samma födelsedag. *Nämnan* 9(4), 52-53.
- Fransén, J. & Gustavsson, H. (1980). Ett rikare föreningsliv. *Nämnan* 7(2), 49-54.
- Fransén, J. (1981). Matematik för kapitalister. *Nämnan* 7 (3), 39-43.
- Holm, S. (195). Den vanliga ovanligheten. *Nämnan* 11(3), 45-47.
- Hägglmark, P. (1983). Ett bi-problem. *Nämnan* 9(3), 56-59.
- Hägglmark, P. (1985). Skolmatematik för hundra år sedan. *Nämnan* 11(3), 6-7.
- Hägglmark, P. (1993). Cirkelns kvadratur. *Nämnan* 20(4), 48-49.
- Klefsjö, B. (1985). Lagar Findus Sveriges godaste köttbullar? *Nämnan* 12(2), 40-43.
- Kongsted, J. (1984). 1984 – ett anmärkningsvärt år. *Nämnan* 11(1), 52-54.
- Kvammen, P.I. (1986). Matematikk, natur og samfunn. *Nämnan* 12(3), 14-17.
- Larsson, S. (1992). Man lär så länge man har elever. *Nämnan* 19(3), 34-35.
- McIntosh, A. (1995). Vitalisera huvudräkningen. *Nämnan* 22(3), 23-25.
- Munther, R. (1981). Hur mycket är en miljard? *Nämnan* 8 (1), 48-50.
- Munther, R. (1983). Ofantliga problem. *Nämnan* 9 (3), 54-55.
- Nämnares matematiktävling. Problemmuppgifter i *Nämnan* 20(1), 20(3), 21(1), 21(3), 22(1), 22(3) med lösningar i 20(2), 20(4), 21(2), 21(4), 22(2) resp. 22(4)..
- Persson, I. O. (1991). Huvudräkningsspelet Plump. *Nämnan* 18(3-4), 87
- Problemafdelningen. I varje nummer av *Nämnan* (25-50 problem i varje årgång).
- Reys, B. m fl (1995a). Vad är god taluppfattning? *Nämnan* 22(2), 23-25, UPPSLAGET, 25-29 och Problemafdelningen 51.
- Reys, B.m fl (1995b) Svenska elevers taluppfattning. *Nämnan* 22(3), 34-40.
- Reys, B., Reys, R. & Emanuelsson, G. (1995c). Meningsfulla tal. *Nämnan* 22(4), 8-12.
- Selander, T. (1981). Resemontörens problem. *Nämnan* 7(4), 53-56.

- Stephens, M. (1994). Undersökande arbete som utvärdering. *Nämnan* 21(4), 16-25.
- Tvete, K. (1987). Geometri – Jordmåling. *Nämnan* 14(2), 34-39.
- Widell, E. (1991). Ett problem som introduktion till ekvationssystem. *Nämnan* 18(1), 30-31.
-
- Andersson, G. (1989). *Lögn och sanning i statistik*. Stockholm: Liber.
- Dahl, K. & Nordquist S. (1994). *Matte med mening*. Stockholm: ALFABETA.
- Elementa. Problemhäften. Centrala prov i gymnasieskolan i matematik, fysik och kemi. *Elementa*. Tidskrift för matematik, fysik och kemi.
- Elementas problemavdelning. *Elementa*. Tidskrift för matematik, fysik och kemi.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (red) (1991). *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur.
- Grevholm, B. (1988). *Utmaningen*. Malmö: Liber.
- Grevholm, B. (1989). *Lilla utmaningen*. Malmö: Liber.
- Grevholm, B. (1991). Problem för lärare. I Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (red), (1991). *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur.
- Riesel, H. (1968). *En bok om primtal*. Odense: Studentlitteratur.
- Strandberg, L. (1991). *Problemboken*. Malmö: Liber.
- Ulin, B. (1993). *Liten guide för matematiska problemlösare*. Stockholm: Liber Utbildning.
- Vaderlind, P. (1989). *Matematiska tankenötter*. Stockholm: Svenska Dagbladet.
-
- NCTM. Calender problems. *Mathematics Teacher*. Reston, Va..Author. (I varje nummer av denna tidskrift presenteras en kalender med ett problem för var och en av månadens dagar. Lösningar i samma nummer.)
- Lowe, I. (1991). *Mathematics at Work*. Volume 1 & Volume 2. Australian Academy of Science. Canberra.
- Lowe, I. (1991). *Mathematics at Work*. Volume 1 & 2. Teachers guide to volume 1 & volume 2. Australian Academy of Science. Canberra.
- Shell Centre for Mathematical Education. (1985). *The Language of Functions and Graphs*. Manchester; University of Nottingham.
- von Essen, E. & Winther Petersen, A. (red) (1994). *Utraditionelle matematikoppgaver*. København: Matematiklærerforeningen.

8

Att organisera för lärande

Stor spridning bland eleverna i en gymnasieklass i intresse och förmåga är något som unga lärare snabbt brukar märka och äldre ibland tycker sig ha diskuterat till leda. Några elever verkar ha förstått "procent" sedan många år och är kanske uttråkade. Andra tycks varken kunna eller vilja lära. Hur hanterar man denna komplexa undervisningssituation? Gymnasieskolans mer eller mindre givna ramar: läroplanen, kursplanen, timplanen, gymnasieförordningen, antal lärare och elever, lokaler, läromedel osv ger förutsättningar och sätter gränser för vad som är möjligt. Hur kan undervisningen organiseras så att den inom givna ramar på bästa sätt stimulerar alla elevers arbete mot uppställda mål?

En skola för alla

Frågan hur vi skall individualisera med hjälp av differentiering har fått ny aktualitet när gymnasieskolan blivit kursutformad och matematik ett obligatoriskt kärnämne för alla. Vad innebär differentiering och vad är egentligen syftet? Vilka erfarenheter har vi av olika former av differentiering och vilka möjligheter finns idag att variera undervisningens mål, innehåll, ramar och organisation för olika elever och elevgrupper?

Frågan hur man bäst kan individualisera undervisningen är lika gammal som skolan själv. Problemet har tidigare uppfattats mera som en fråga om organisatorisk differentiering än som en inre pedagogisk fråga. Det gamla parallellskolesystemet med folkskola, realskola och flickskola är exempel på hur man tidigare på systemnivå försökte skapa så homogena grupper som möjligt. Underbetyg, kvarsittning och utkuggning hjälpte till att minska spännvidden i klasserna ytterligare.

Idag är situationen en annan. Vi har fått en sammanhållen nioårig grundskola och en sammanhållen kursutformad treårig gymnasieskola för i princip alla elever. Förändringarna ställer mycket större krav på

skolan än tidigare när det gäller att möta elever med olika förutsättningar och behov och anpassa undervisningen efter deras studieresultat och intresse. Gymnasieskolan har förändrats från att ha varit en skola för ett fåtal till en skola för alla.

Individualisering och klasstorlek

På 1930-talet började man mera systematiskt studera spridningen i elevernas matematikkunskaper i vårt land. Wigforss (1943) undersökte situationen i folkskolan och konstaterade att

spridningen bland eleverna rörde sig om två årskurser uppåt och nedåt vid ett standardiserat prov i åk 4

och att varje elev inte kunde få mer av lärarens tid än i genomsnitt 6-7 minuter per vecka vid helt individuell matematikundervisning. Han sammanfattade:

Hänsyn till dessa båda fakta, barnmaterialets heterogenitet och den ringa tiden för helt individuell undervisning, ställer läraren i ett svårt dilemma. Faktum nummer ett ställer klassundervisningen och faktum nummer två den individuella undervisningen i tvivelaktiga dagar. Att praktiskt lotsa sig fram genom dessa svårigheter, kanske genom någon form av gruppundervisning, blir lärarens svåra uppgift i klasser med stort elevantal. Kravet på smärre klassavdelningar torde ej i längden kunna avvisas, om skolan skall kunna fylla sin uppgift.
(Wigforss, 1943)

Wigforss arbeten följdes av flera studier om individuella differenser, bl a som förarbeten till efterkrigstidens stora utbyggnad av grundskolan och gymnasieskolan. Det är nog ingen tvekan om att uppmärksamheten på skillnader mellan elevers förutsättningar och studieresultat bidrog till ökningen av lärartätheten i vårt land.

Det är viktigt att skilja mellan individuell undervisning och individualisering. Det är inte självklart att individuell undervisning är bättre än undervisning i en grupp tillsammans med andra elever. Mindre klasser eller undervisningsgrupper leder inte automatiskt till bättre undervisning. Tvärtom kan det vara så att färre elever i en klass paradoxalt nog kan betyda att elever med t ex behov av särskilt stöd får mindre uppmärksamhet och hjälp än i större klasser (Granström & Einarsson, 1995, s 15).

Klasstorlek är i högsta grad en resursfråga. En generell minskning av klasstorlek är mycket kostsam. Omvänt kan man spara mycket pengar till andra satsningar inom skolan om klass- eller gruppstorleken kan ökas. Dessutom måste det till stora förändringar om det skall

bli en märkbar förändring i undervisningstid sett ur ett elevperspektiv. En generell minskning av klasstorleken från t ex 25 elever till 24 ger inte ens en halvminut extra per elev och vecka i matematikundervisning om man fördelar tiden jämt på alla klassens elever. Därför är det inte särskilt överraskande att den pedagogiska forskningen haft svårt att finna något entydigt positivt samband mellan minskad klasstorlek och förbättrade undervisningsresultat.

Tidigare har resurstilldelningen till skolan detaljreglerats och kopplats till bestämda delningstal (för klasstorlek), timplan och lärares tjänstgöringsskyldighet. Denna reglering har nu upphört. Det finns inte längre några örönmärkta pengar direkt kopplade till storlek och sammansättning av klasser och undervisningsgrupper. Det är rektor som bestämmer och som har ansvaret.

Alternativkurser

När det obligatoriska skolväsendet byggdes ut efter andra världskriget ersattes det gamla parallellskolesystemet med en nioårig sammanhållen grundskola. En av de stora frågorna var hur man skulle klara av undervisningen i sammanhållna klasser i nio år. Matematikämnet ansågs vara ett av de mest kritiska. Som en provisorisk lösning infördes alternativkurser på högstadiet i bl a matematik.

Den nödvändiga differentieringen med hänsyn till elevernas förutsättningar kan ske genom den uppdelning i grundkurs och överkurs som nämns i anvisningarna till varje ämne ... För att ytterligare underlätta anpassningen av undervisningen efter förutsättningarna hos de olika elevgrupperna i en klass, har för vissa ämnen (moderna språk, matematik, fysik och kemi) utarbetats förslag till sk alternativkurser. Dessa är exempel på hur man kan differentiera kurserna, och de har till omfattning och innehåll varierats efter olika elevers studiemål och förutsättningar.

Prop 1950:70, s 20

Ideologiskt sågs alternativkurserna av många som ett avsteg från den sammanhållna grundskolan. Andra menade att alternativkurser var enda sättet att kunna hantera individualiseringsproblemet på högstadiet. Även forskarsamhället var splittrat:

undersökningen om prestationsutvecklingen i olika differentieringsmiljöer ... tyder på att en homogenisering av klasserna för de ur skolans synpunkt svagaste eleverna medför för dem ogynnsamma konsekvenser i fråga om kunskapsinhämtandet samtidigt som homogeniseringen inte har några påtagliga positiva effekter för de bästa eleverna.

SOU 1961:30, s 287

På en avgörande punkt i sin argumentering har t ex 1957 års skolberedning dragit en slutsats, som kan uppfattas och också har tolkats så att en homogenisering genom organisatorisk differentiering missgynnar de sämsta eleverna utan att för den skull ge några positiva effekter för de bästa. Den resultatbild som kan utläsas ur stockholmsundersökningen ger snarare stöd för den motsatta tolkningen.

Dahllöf, 1967

Efter omfattande försöksverksamhet med olika alternativ till alternativkurser, framförallt i matematik blev regleringen av alternativkurserna allt svagare för att helt upphöra i samband med införandet av Lpo 94. Försöksverksamheten visade att det fanns många andra organisationsformer som lokalt fungerade väl så bra som alternativkurssystemet. I det nya styrsystemet för skolan med målstyrning och decentraliserat ansvar anser staten att problemet bäst hanteras lokalt utan central reglering:

Eleverna skall fördelas på klasser och grupper enligt beslut av rektor.
Grundskoleförordningen, 4 kap, 4§

Sett ur elevperspektiv ger naturligtvis två nationellt reglerade alternativkurser en alltför mekanisk uppdelning av matematikinnehållet. Allmän och särskild kurs i grundskolan var en organisatorisk differentiering, som kan jämföras med de olika studieprogrammen i gymnasieskolan. Ett av problemen var att elevernas val inte alltid överensstämde med deras intresse och förmåga. Särskild kurs i grundskolan valdes ofta mera på grund av föräldraambition än av elevintresse. Systemet med en mer eller mindre fast organisatorisk differentiering visar sig också ha negativa effekter på många elevers självuppfattning, intresse, motivation och attityder till matematik och matematikstudier i den känsliga 14-15-årsåldern. Men bilden är splittrad. Därför är det inte särskilt överraskande att staten lämnar över till skolledare och lärare att – inom ramen för läroplan och kursplan – i samråd med elever och föräldrar välja arbets- och organisationsformer som anses bäst utifrån egna och skolans förutsättningar för att målen med utbildningen i matematik skall nås.

Den diskussion som förts i fyra decennier om elevgrupperingar och olika kurser på högstadiet har nu fått förnyad aktualitet på gymnasiet när matematik blivit obligatoriskt kärnämne för alla elever.

- Med Lpf 94 och tillhörande timplaner, kursplaner och betygssystem har vi fått en ny gymnasieskola med många nya uppgifter. Vad betyder dessa förändringar för matematiklärares arbetsuppgifter? Var ligger de största utmaningarna?
- Vad anser du om sambandet mellan klass/gruppstorlek och undervisning i matematik? Är minskat elevantal i klasserna det bästa sättet att använda motsvarande resurser på?
- Vad är det för skillnad mellan differentiering, individualisering och individuell undervisning?
- Vilken är din erfarenhet av grundskolans alternativkurssystem eller av alternativ till alternativkurserna? Vad kan vi lära av högstadiets matematiklärare när det t ex gäller gymnasiets inledande matematikkurs för de elever som kanske inte hade studerat matematik om det inte varit obligatoriskt?

Gemensamma påbyggbara kurser

I den nya gymnasieskolan studeras de olika ämnena inte längre terminsvis utan i form av tidsbestämda kurser med särskilda mål och kunskapskrav inom ramen för olika nationella program. Uppdelningen på program och kurser är en form av övergripande organisatorisk differentiering av gymnasieutbildningen. Matematik är ett kärnämne. Den första kursen är obligatorisk för alla. Endast naturvetenskapsprogrammet omfattar samtliga fem kurser. Programmen består av påbyggbara kurser till skillnad från grundskolans alternativkurssystem och gymnasieskolans tidigare linjer som bestod av parallella matematikkurser med olika svårighetsgrad och inriktning.

Gymnasiets första matematikkurs ingår alltså i samtliga program. Men eftersom kursplanen är underordnad respektive programmål kommer kursens innehåll att kunna variera med eller "färgas av" det program den ingår i. Gymnasieelever på olika program läser samma matematikkurs men med lite olika inriktning. Kvalitetskraven för t ex olika betyg är däremot desamma. Om elever från olika program läser samma matematikkurs i samma undervisningsgrupp måste man naturligtvis försöka hantera detta inom gruppens ram.

Kurstimplaner – en flexibel ram

En av de viktigaste ramarna i matematikutbildning är den tillgängliga tiden. Om en elev har valt ett program där matematikämnet endast omfattar A-kursen är den garanterade undervisningstiden 110 klocktimmar. En elev som har behov av extra stöd under en begränsad tid kan få stödundervisning. Om en elev inte blir godkänd så finns möjligheter att gå om kursen, i vissa fall två gånger även om detta skulle medföra att gymnasieutbildningen blir längre än tre år. Andra sätt att öka den garanterade undervisningstiden för en kurs eller ett ämne kan vara att använda det lokala tillägget. För elever inom individuella programmet finns ytterligare möjligheter att anpassa undervisningstiden till elevers förutsättningar, behov och intresse.

Andra elever kanske behöver kortare tid för en kurs. Det kan bero på att man redan från grundskolan behärskar vissa moment och vill tentera av kursen tidigare än planerat. Det kan också vara så att flera matematikkurser ingår i programmet, att man vill lägga mer tid på de följande kurserna och därför väljer att fördela tiden mellan de ingående kurserna på annat sätt. Här finns möjligheter att integrera och sekvensera de olika kursmomenten på olika sätt (se s 154). Dock måste man hålla isär kurserna när eleverna skall ha sina kursbetyg.

För den särskilt matematikintresserade kan också finnas möjligheter att via utökat program, individuella val, lokala kurser eller specialutformat program få en mera omfattande matematikutbildning än den som ges inom ramen för kurs A – E (se t e x Gode, 1993).

- Hur organiserar man bäst matematikundervisningen i en grupp elever som läser samma matematikkurs men inom olika program? Vilka aktiviteter kan vara gemensamma och vilka bör vara olika?
- Hur utnyttjas den flexibilitet som finns i timplanen så att undervisningstiden bättre passar till elever med större respektive mindre behov? Finns det bättre sätt?

Att gruppera för undervisning

Gruppindelning behöver inte ha med differentiering att göra. Utan tankar på differentiering kan man t e x bilda smågrupper i det vanliga skolarbetet därför att det är bra att eleverna diskuterar med varandra.

Alla grupper kan arbeta med likartade uppgifter – i kapitel 4 och 5 finns flera exempel – men grupperna kan också få olika uppgifter, och medlemmarna i gruppen kan dela upp arbetet mellan sig, t ex i projektarbete eller arbete med ett tema (Kapitel 6 och 7).

Homogena eller heterogena?

Vad menas med att en grupp är homogen respektive heterogen. Vad är det som är homogent respektive heterogent? Begreppen är mycket problematiska. Vid en studie på grundskolans mellanstadium delades eleverna in i tre grupper; ”hög”, ”medel” och ”låg” efter resultat på provräkningar från tidigare terminer (Kilborn, 1979). När man tittade närmare på elevernas förkunskaper inför kortare specifika moment skulle i genomsnitt varannan elev behövt byta grupp om man behållit kravet på homogenitet vad gäller förutsättningar att klara det aktuella kursavsnittet. Grunden för gruppindelningen var således alldeles för ”grov” för att den skulle hålla inför ett konkret undervisningsavsnitt och passa enskilda elever.

Men homogent och heterogent kan gälla andra saker än förkunskaper eller resultat på provräkningar, t ex önskemål om arbetssätt och arbetsformer, möjligheter att få hjälp eller stöd hemma, intresse för olika aspekter av matematikämnet som dess historia, tillämpningar, teori osv. Det är viktigt att man klargör grunderna för och syftet med olika typer av grupperingar och inte ramlar i fällor som att långsamma elever nödvändigtvis är svaga i matematik. Det underlättar när man skall låta eleverna välja och när man skall följa upp och utvärdera resultaten av undervisningen.

Homogena grupper

Många lärare förordar homogena grupper i termer av tidigare studieresultat och förkunskaper i matematik. De framhåller att svaga elever då får sina verkliga behov bättre tillgodosedda, vågar komma fram med sina frågor, får säkrare kunskaper och stärkt självförtroende. Att de svaga eleverna skulle stimuleras i heterogena grupper tror de mindre på. Vad gäller starka elever, tycker de att idealet ”åt var och en efter hans förmåga” borde gälla också de starka eleverna. Starka elever har också behov, som bäst kan tillfredsställas om de bildar en grupp för sig. Slutligen framhåller de som vill ha homogena grupper att en sådan uppdelning används som en självklarhet inom andra områden. Som exempel anges bl a språkkurser utomlands. Där uppdelas eleverna ofta efter test i homogena grupper, utan att någon t ex finner detta ”diskriminerande”. Förespråkarna för homogena grupper kan ofta, men inte alltid, tänka sig en fast, organisatorisk nivågruppering.

Heterogena grupper

De som förordar heterogena grupper eller klasser ser sakerna annorlunda. De vill ha heterogena grupper bl a för samtalets eller samverkans skull. De tänker kanske främst på heterogena grupper inom en klass, men kan i princip också förespråka heterogena grupper av klassstorlek. De anser att även svaga elever vinner på gemensamma diskussioner, vare sig det gäller samtal mellan lärare och klass eller mellan eleverna i en grupp. Vidare anser de – och här ligger ofta den springande punkten – att svaga elever verkligen stimuleras och kan få hjälp. De åstadkommer (presterar) mera än de skulle göra om de bildade en grupp för sig och läraren avlastas. Vad gäller de starka eleverna kan man alltid ta hand om dem. De har ofta bättre självförtroende och därmed egen initiativförmåga. Genom att hjälpa kamrater i gruppen kan de fördjupa sitt eget matematikkunnande. I heterogena grupper utvecklas de i, vad de i alla fall måste kunna, att arbeta tillsammans med personer, som har andra förutsättningar och intressen. Förespråkarna för heterogena grupper vill inte ha någon organisatorisk nivågruppering. Blotta tanken är som ett rött skynke. Skäl som också brukar anges är att barn och ungdomar inte ska placeras i en grupp som kan innebära diskriminering, ”stämpling” eller återvändsgata.

Många ställningstaganden grundas på erfarenhet av klassundervisning. Den som förespråkar homogena grupper tänker på hur svårt eller omöjligt det kan vara i heterogena klasser. Han/hon tror inte mycket på den som säger att en god lärare kan rycka alla med sig, utan tänker att den som säger så antingen själv är ovanligt skicklig eller fäster inte så stor vikt vid de svaga elevernas existens och verkliga resultat.

- Vad anser du att begreppet homogen/heterogen klass står för?
- Vilka fördelar och nackdelar anser du finns med homogena respektive heterogena grupperingar.

Försök med nivågruppering

På grundskolans högstadium har det genomförts flera individualiserings- och differentieringsförsök. För många är den principiella uppbyggnaden ungefär densamma som man har i traditionell klassundervisning – skillnaden är att eleverna, individuellt eller i grupp, får välja nivå. Så här kan det se ut:

Vid vanlig klassundervisning tillämpar man ofta denna modell utan att närmare reflektera över den. Alla börjar samtidigt på ett moment, eleverna övningsräknar på uppgifter av varierande svårighet, så sammanfattar man vid en gemensam diskussion och börjar ett nytt avsnitt, etc. Grovt sett brukar den första nivån svara mot lärobokens första "omarkerade" övningsuppgifter, nästa mot dem som är markerade med en stjärna/pil och den sista mot lärobokens svåraste uppgifter. Principen genomgång – spridning individuellt eller i grupp – sammanfattning med ny start" är välkänd. Den kan tillämpas mer eller mindre explicit och mer eller mindre konsekvent.

Det är självfallet inte nödvändigt att ha tre nivåer. Vid den differentiering inom en klass, som Rödebyprojektet på grundskolans högstadium arbetade med, hade man två, vilket i stort motsvarade vad allmän och särskild kurs var tänkt att bli.

I princip är modellen densamma också om nivågruppering sker i två eller flera "sammanslagna" klasser. Gemensamma diskussioner kan hållas. Den lärare som normalt skulle haft hand om klassen sammanför alla eleverna i den och resonerar om vad som varit och vad som skall komma. Detta förutsätter att alla arbetar i ungefär samma takt och att man finner gemensamma diskussioner över gruppgränserna värdefulla.

Det finns flera högstadieförsök med större ambitioner när det gäller att bilda homogena grupper. Ett gjordes redan 1982-85 vid Lindeborgsskolan i Malmö. På den tiden fanns allmän och särskild kurs. Vi illustrerar idén med några exempel från detta försök, som försöksledarna kallade *Ett försök med fri och rörlig gruppering över kursgränserna i matematik*. Som målsättning angav de att

- öka individualiseringen,
- ge varje elev bättre möjlighet att maximalt utveckla sina färdigheter i matematik,
- ingen elev lämnar åk 9 utan tillfredsställande grundläggande färdigheter,
- visa eleverna hur färdigheter i matematik kan användas vid problemlösning.

Vid försökets början fanns fem klasser i åk 7. Efter ett test, oberoende av elevens kursval (ak eller sk), delades eleverna upp i fem grupper, som (i lite förkortad beskrivning) kom att omfatta

Grupp 1

Elever som valt särskild kurs (20 – 25 elever)

Grupp 2-3

Elever med särskild eller med allmän kurs (30 – 40)

Grupp 4-5

Elever som valt allmän kurs (10 – 12 respektive specialgrupp, 4 – 8)

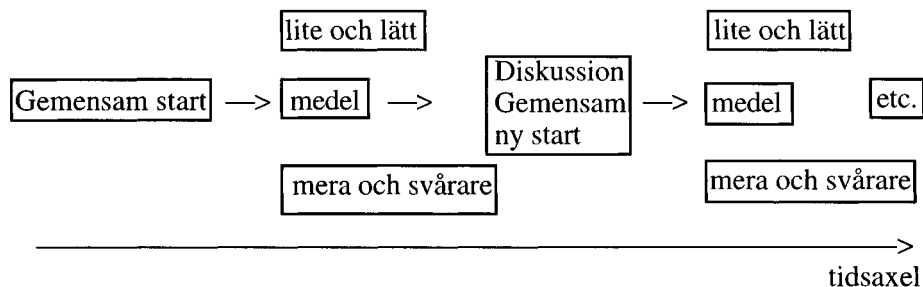
En grupp allmänskursare leddes av en speciallärare. Traditionell uppdelning hade gett 5 sk-grupper och 2 ak-grupper. Speciallärare fungerade också som rörlig resurs.

I försöksrapporten framhålls att homogeniteten inom grupperna gav lärarna större möjligheter att hjälpa eleverna, eftersom hela gruppen arbetade i ungefär samma takt och också stötte på problem samtidigt. Eleverna uttryckte stor tillfredsställelse med att de varit lika duktiga som sina kamrater inom gruppen, vilket i sin tur ledde till att arbetsförhållandena var lugna och positiva.

En grundtanke var att grupperna inte skulle förbli fasta. Omgrupperingar skedde 3 – 4 gånger per läsår efter test. Man diskuterade alltid gruppbyte med eleven och flyttade aldrig en elev mot dennes vilja. Om någon elev ville byta grupp vid något annat tillfälle än de vanliga omgrupperingarna, så fick hon göra det om orsaken var rimlig.

Skälet till återkommande omgrupperingar var att eleverna utvecklas under högstadiet. En del mognar och utvecklas, andra får kanske sociala problem och stannar upp. Varje omflyttning syftade till att ge eleven den mest lämpliga undervisningen. Grupperna kunde hållas homogena.

Under våren i åk 9 gjordes inga omgrupperingar, dels efter önskemål från eleverna, dels för att grupperna då inte längre läste avsnitten



parallellt. Vissa sysslade med fördjupning, andra med vardagsmatematik.

Som resultat fick man färre med betyg 1 än under de närmast föregående åren. Försöksledarna tror att det berodde på att de svagaste eleverna fått mera hjälp, och att framför allt de elevgrupper som leddes av speciallärare fick en för dem anpassad kurs och därigenom kunde förbättra sina resultat. Försöksledarna tyckte vidare att eleverna i grupp 1 (sk) blivit klart mera motiverade för ämnet, och att lärarna i slutet av åk 9 hade större möjligheter att förbereda dessa elever för deras gymnasiestudier.

Mycket arbete lades ner på att informera elever och föräldrar. Två tredjedelar av de föräldrar, som tidigare haft barn på skolan, tyckte att den nya undervisningen var bättre eller mycket bättre. Bland elevkommentarer märks t ex

- *Det är mycket bättre än allmän och särskild kurs.*
- *Jag tycker det är bra att man kan byta grupp till den som passar en bäst.*
- *Det är skönt med en relativt liten grupp.*
- *Eleven ska själv få bestämma om hon passar i en högre grupp. Har hon bra på omgrupperingstesten i högsta gruppen, men inte trivs, tycker jag att hon ska få flytta ner om hon så vill.*
- *Innan tyckte jag det var kul, men nu när jag bytt grupp tycker jag det är jättekul.*

Efter det första försökets slutförande har skolan fortsatt att utforma matematikundervisningen på detta sätt. Nu arbetar man på att minska resurser med fyra grupper.

Val och byte av grupp

Det är naturligtvis viktigt att eleven får bestämma vilken grupp han eller hon vill tillhöra och om eventuellt gruppbyte – så långt det överhuvud taget är praktiskt möjligt. Detta kräver god information om vilka alternativ som finns och möjligheter till diskussion mellan elever och läraren om vad som kan vara bäst för eleven.

En av anledningarna till att låta eleverna själva välja grupp är att det ofta ger trygghet och stabilitet att tillhöra en fast undervisningsgrupp eller klass. I kapitel 5 rekommenderas t ex att även de mindre grupperna inom en klass består under en inte alltför kort tid, förslagsvis 6 – 10 veckor.

Att byte av grupp kan göras behöver inte innebära att det behöver ske ofta. Det kan hända att de flesta kan finna vad som är bra för dem,

med eller utan lärarens hjälp. Så var det vid ett försök med nivågruppering i kurs A (Selander, 1993). Där ville ytterst få elever byta grupp.

Eleverna har en realistisk uppfattning av sin egen förmåga och tycker att de hamnat i grupper där undervisningen sker på en nivå som passar dem.

Det kan också vara så, att elever ger upp och inte försöker nå högre. Det kan också vara så att det efter ett tag i praktiken blivit omöjligt att t ex byta till en "högre grupp" på grund av skillnader i "tempo".

Svensk klassrumsforskning har visat att lärare, inte minst matematiklärare, ofta anpassar sin undervisning till en sk styrgrupp. Gruppen är den näst svagaste i klassen och resultatet visar hur svårt det är för en lärare att individualisera så länge helklassundervisning dominerar (Se t ex Granqvist & Einarsson, 1995). Om man tänker sig att man fortsätter med "helgruppsundervisning" efter en nivågruppering kommer styrgruppen i den svagare gruppen att ligga betydligt lägre och i den duktigare gruppen betydligt högre än styrgruppen i den ursprungliga klassen. Risken är då uppenbar att den bättre gruppen rusar ifrån och den svagare halkar efter så att det i praktiken blir omöjligt att byta grupp.

Betyg och elevinflytande

De nya målinriktade kursplanerna och det nya betygssystemet ger större möjligheter för eleverna att få inflytande över sina studier. I kapitel 3 i denna bok om elevens eget ansvar framhålls att det kan vara lättare för eleven att själv ta ansvar för sina studier om eleven själv får välja vilket betyg hon/han vill inrikta sina studier mot. Fördjupade kunskaper, som man inte är intresserad av tar man inte gärna ansvar för. Man nöjer sig kanske med lägre betyg. Får man å andra sidan själv bestämma att man siktar på högre betyg känns det mer motiverande. Resonemanget förutsätter god information om vad olika ambitionsnivåer innebär i fråga om innehåll och krav och att läraren observerar och stödjer elevens strävan i studierna.

En viktig fråga är här betygens funktion som underlag för behörighet och urval till fortsatta studier. Här är det angeläget att eleverna har tillgång till god information om vad olika program, kurser och betyg ger behörighet till och kan räcka till vid en eventuell fråga om urval bland behöriga. Högskolan har idag stora friheter att själv bestämma på vilka grunder den gör sina urval och därmed ökad makt över ingången till olika postgymnasiala utbildningsvägar – på gymnasieskolans bekostnad. Vi går mot en utveckling med större inslag av andra grunder än betyg för urval bland behöriga.

- Kan Lindebergsskolans idéer omsättas i gymnasieskolan?
- På vilka grunder kan gruppering göras?
- Vad är det viktigaste du skulle vilja säga till elever och föräldrar om ni introducerade ett liknande system som Lindesbergsskolans på er skola?
- En elev sa *Jag tycker inte man ska ha nån bra eller dålighetsindelning. Sänker självförtroendet i andra ämnen också.* Vad anser du om elevens uttalande? Är det många elever som kan känna det så?
- Vilka risker möter elever som p g a ett misslyckat grupperingstest hamnar i fel grupp?
- Vilka styrgrupper har du i dina klasser/grupper? Hur anpassar du dig efter styrgruppen vid t ex genomgångar?
- Bickham (1993) har i studier av grundskollärare identifierat två lärartyper som hon kallar "hönsamma" respektive "handledare". Hönsamman använder traditionell "förmedlingspedagogik" medan handledaren fungerar som en icke-auktoritär katalysator för elevernas lärande. Finns det hönsammor och handledare på gymnasiet? Kan man komma åt en del av problemen med individualisering inom klassens ram med hjälp av en annan lärarroll – och därmed slippa att t ex nivågruppera?
- Vad anser du om att gruppera elever inom respektive matematik-kurs efter "betygsambitioner"? Vilka för och nackdelar kan du se?
- I vilken utsträckning skall eleverna i gymnasieskolan ges möjligheter att förbereda sig för att klara inträdesprov till universiteten? Kan detta bli ytterligare en grund för differentiering? Är det något som gymnasieskolan skall uppmuntra till och stödja?
- Diskutera med elever och kolleger om man skall arbeta i en heterogen klass, men tidvis på olika nivåer. Finns det fördelar med att göra en uppdelning i mera homogena grupper? Jämför t ex med resonemang i Selanders artikel om differentiering av matematik-kurs A (Selander, 1993) och Kilborns artikel om individualisering (Kilborn, 1986).

Litteratur

- Emanuelsson, G. (1989). Standards för 9–12. *Nämna-
ren* 16(4), 16-21.
- Gode, S-E. (1993). Hur många matematiktimm-
ar kan man få på gymnasiet? *Nämna-
ren* 20(2), 5.
- Gudmundsson, G. (1982). Älta-modellen: Samar-
bete genom stadierna. *Nämna-
ren* 8(4), 20-25.
- Kilborn, W. (1986). Att individualisera är inte att
organisera. *Nämna-
ren* 13(2-3), 55-59.
- Nämna-
ren, Tema Individualisering. (1981). *Näm-
na-
ren* 8(2).
- Nämna-
ren, Tema Diagnos och utvärdering. (1984).
*Nämna-
ren* 10(2).
- Runesson, U. (1994). Olikheter i klassen – tillgång
eller problem? *Nämna-
ren* 21(2), 9-12.
- Selander, T. (1993). Differentiering i kurs A. *Näm-
na-
ren* 20(2), 46-48.
- Dahlgren, L-O, Eriksson, R. & Hellström, L. (1985).
*Gruppera mera? Erfarenheter från försök med
olika grupperingar i engelska och matematik på
högstadiet*. Skolöverstyrelsen R 85:35.
- Dahlöf, U. (1967). Skoldifferentiering och under-
visningsförlopp. Göteborg studies in educational
sciences No 2. Göteborgs universitet, Pedagogis-
ka institutionen.
- Emanuelsson, G., Johansson, B. & Lingefjärd, T.
(Red) (1992). *Matematikämnet i skolan i inter-
nationell belysning*. Göteborgs universitet, Insti-
tutionen för ämnesdidaktik.
- Granström, K. & Einarsson, C. (1995). *Forskning
om liv och arbete i svenska klassrum*. Stockholm:
Skolverket.
- Kilborn, W. (1979). *PUMP-projektet. Bakgrund
och erfarenheter*. (FoU-rapport 37). Stockholm:
Liber Utbildningsförlaget.
- Larsson, I. (Red) (1973). *Individualiserad matematik-
undervisning: En bok om IMU-projektet*. Malmö:
Hermods.
- Larsson, C. & Hake, K. B. (1985). *Ett försök med fri
och rörlig gruppering över kursgränserna i mate-
matik (högstadiet)*. Malmö.
- Marklund, S. (1980). *Differentieringsfrågan*. Stock-
holm: Liber Utbildningsförlaget.
- Proposition 1950:70.
- Regler för målstyrning. (1995a, Tredje upplagan).
Grundskolan. Skollagen, Grundskoleförordningen,
Läroplan, Kursplaner. Stockholm: Svensk Fack-
litteratur.
- Regler för målstyrning. (1995b, Tredje upplagan).
Gymnasieskolan. Skollagen, Gymnasieförordningen,
Läroplan, Program mål, Kursplaner. Stockholm:
Svensk Facklitteratur.
- Skolverket. (1994). *Vem bestämmer? En översiktlig
beskrivning av skolans styrning och ansvarsfördel-
ning*. Stockholm: Skolverket.
- SOU 1961:30.
- Wigforss, F. (1943). *Den grundläggande matematik-
undervisningen*. Stockholm: Bergwalls.
- Mellin-Olsen, S. (1991). *Hvordan tenker lærere om
matematikkundervisning*. Bergen lærerhøgskole.
- Askew, M. & Wiliam, D. (1995). *Recent Research
in Mathematics Education 5–16*. London: HMSO.
- Howson, G. et al. (1981). *Curriculum development
in mathematics*. Cambridge: Cambridge Univer-
sity Press.