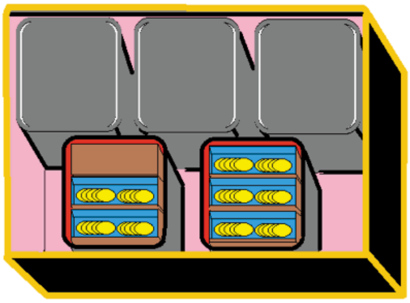
# Lösningar problem 1



Svar: Minst 8 lås
Här har vi en lösning med bild: (Många skickade fina bilder på skattkistor.)



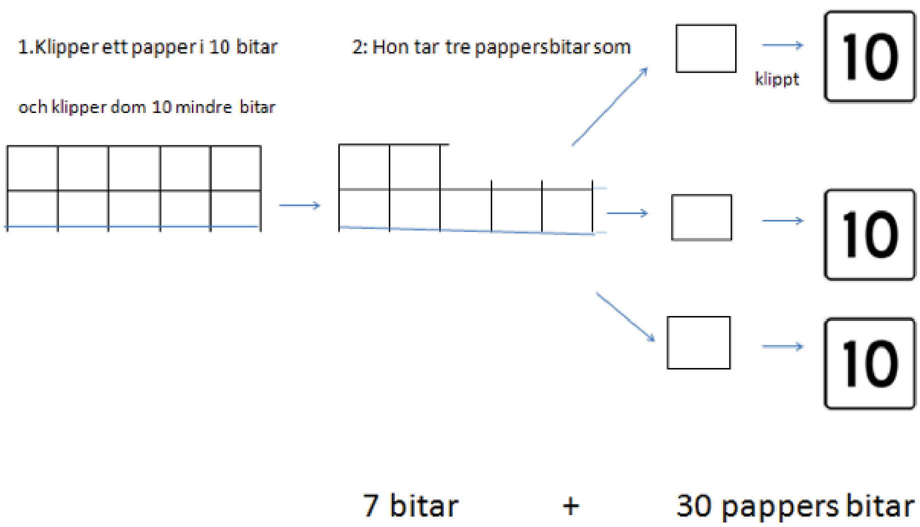
Vi ser att om vi öppnar skattkistan, två skrin och fem askar, så kan vi fylla våra fickor med 50 guldmynt. Vi behöver inte öppna fler än åtta lås men om vi låter bli att öppna skattekistan eller öppnar bara ett skrin eller bara 4 askar så kommer vi inte åt 50 guldmynt. Vi måste öppna minst åtta lås för att få fram våra 50 guldmynt.

# Lösningar problem 2

Svar: 37

Det har kommit flera sorters lösningar, några beskriver hur de klippte, flera ritar figurer, många visar uträkningar, några skriver formler och en argumenterar.
Jessica skriver: Eleverna har följt anvisningarna genom att själva klippa pappersbitar på samma sätt som Janka. Svar: Hon hade sedan 37 pappersbitar.

Här en lösning av Pierre med bild och uträkning:
Veras uträkning och formel:




10-3=7, 10-7=3, 3*10=30, 30+7=37.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Antal klippningar: | 1 | 2 | 3 | 4 | n |
| Antal pappersbitar: | 10 | 19 | 28 | 37 | 9n+1 |

Johan visar att det behövs 9 snitt för att dela en pappersbit i 10 och att Janka efter varje klipp hade en fler pappersbitar än antal klipp som hon gjort. Johan avslutar:
”Janka utförde därför 9 + 9 + 9 + 9 = 36 snitt, vilket ger w(36) = 37 pappersbitar.”

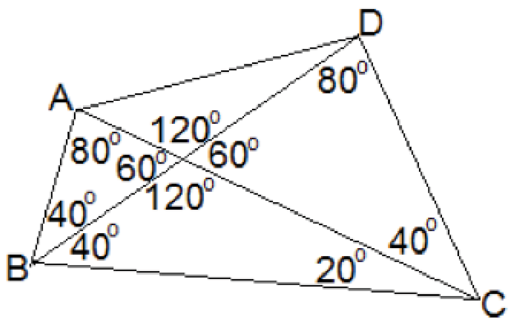
Det är viktigt för yngre elever att kunna arbeta med konkret material och en regel vid inlärning av nya begrepp är att vara så konkret som möjligt.

De som har mera vana av matematik tenderar att tänka mera allment (”generellt”) och abstrakt. Förmågan till det är nödvändig för att klara svårare utmaningar inom matematiken. Problem 2 är på gränsen till att kräva en sådan förmåga. Observera att Janka, när hon skulle för tredje gången klippa en bit i tio, kunde välja mellan en bit som blev till i den första klippningen eller i den andra, inför den sista klippningen hade hon tre valmöjligheter. En noggrann lösning skulle därför kräva att undersöka 6 olika fall. Men man kan undvika det om man kan se det från en aning högre perspektiv.

När man tar en pappersbit och klipper den i tio så har man nio bitar fler än man haft innan, oavsett vilken bit det var. Janka hade en pappersbit från början och fyra gånger ökade hon antalet pappersbitar med nio, så till slut hade hon $1+4*9= 37$ bitar.

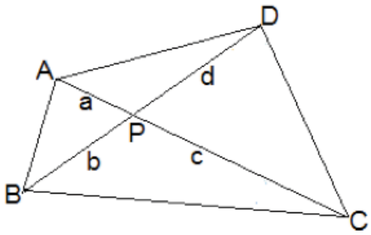
# Lösningar problem 3

Svar: 120°
För att klara detta problem måste man kunna en hel del om vinklar: att en bisektris delar en vinkel i två lika stora vinklar, att en rak vinkel är 180°, att vinkelsumman i en triangel är 180°, att basvinklarna i en likbent triangel är lika stora samt att vertikalvinklar är lika stora. Vet man allt detta så bestämmer man enkelt de flesta vinklar i figuren.



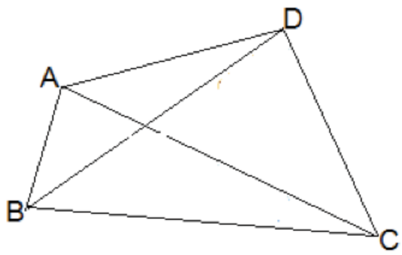

Återstår vinklarna ∠ADB och ∠CAD. Deras summa är 60° men för att bestämma dem var för sig krävs högre kunskaper.
Nu har vi två vägar att välja emellan, vet man allt om likformiga trianglar, så väljer man den första, vet man allt om vinklar i en cirkel, så väljer man den andra.

LIKFORMIGA TRIANGLAR:
Låt P vara skärningspunkten mellan AC och BD. Trianglar ABP och DCP har lika vinklar, alltså är likformiga, APB ~ DPC. Beteckna a=|AP|, b=|BP|, c=|CP| och d=|DP|.

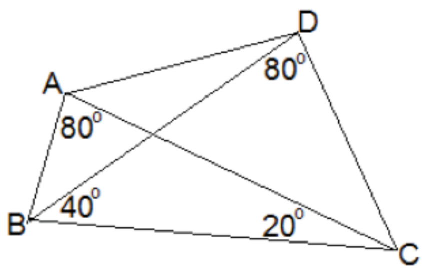



APB ~ DPC ger a/b= d/c som är ekvivalent med a·c=b·d och med a/d=b/c vilket när vinklar ∠APD och ∠BPC är lika ger att trianglarna APD och BPC är likformiga och då har de lika stora vinklar: 40°, 120° och 20°. Då är ∠BAD= ∠BAC+∠CAD= 80°+40°=120°

VINKLAR I EN CIRKEL:
Här ska vi skriva mycket konkret om några geometriska termer och satser. För allmänna, fullständiga och korrekta formuleringar se i en geometrilärobok eller uppslagsverk som t.ex. ”Matematiktermer för skolan” av c. Kiselman och Lars Mouwitz eller fråga din lärare.
Fyrhörning ABCD är cyklisk om A,B,C och D ligger alla på en cirkel.
Den mest kända och använda satsen om vinklar i en cirkel är kanske randvinkelsatsen.

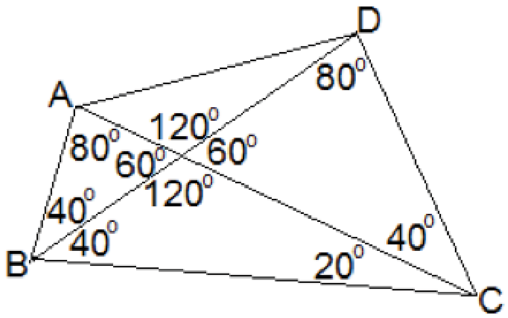



Den säger bl.a. att om ABCD är cyklisk så vinklarna ∠BAC och ∠BDC är lika stora.
En följdsats till randvinkelsatsen säger att om ABCD är cyklisk så är trianglarna APB och DPC likformiga, (man skriver APB ~ DPC). En annan följdsats till randvinkelsatsen säger att om ABCD är cyklisk så är vinkelsumman ∠ABC+∠CDA lika med 180°. Dessa tre satser har sina omvändningar:
Om vinklarna ∠BAC och ∠BDC är lika stora så är ABCD cyklisk.
Om trianglarna APB och DPC likformiga så är ABCD cyklisk
Om vinkelsumman ∠ABC+∠CDA är 180° så är ABCD cyklisk.
Nu kan vi bestämma vinkeln ∠BAD.



$\angle BAC = \angle BDC$ alltså ABCD är cyklisk enligt omvändningen till randvinkelsatsen, alltså $\angle CAD = \angle CBD$ enligt randvinkelsatsen alltså $CAD = 40°$, $BAD = 80° + 40° = 120°$.

Johan använder i sin lösning omvändningen till den första följdsatsen (som han, något felaktigt, kallar kordasatsen) samt den andra följdsatsen. Vi hoppar över den lätta delen och börjar i detta läge:



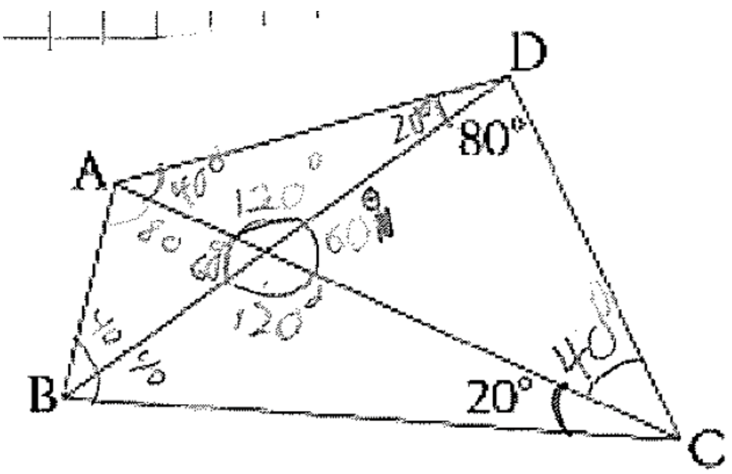

Låt skärningspunkten mellan AC och BC vara P.

$ABP \sim DCP$ ty de har lika vinklar.

...

Eftersom $ABP \sim DCP$ ger omvändningen till kordasatsen att fyrhörningen är cyklisk, varför
$\angle BAD + \angle BCD = 180°$
$\angle BCD = \angle ACB + \angle ACD = 20° + 40° = 60°$
$\angle BAD = 120°$

Carl S. har skickat till oss följande figur:




Svårt att veta hur han kom till detta resultat, med någon av metoder ovan eller genom en gissning eller med hjälp av en gradskiva eller med en ytterligare annorlunda metod.
Hur som helst är det starkt för en i klass fem att komma så långt.
Anna W. gav endast ett rätt svar utan motivering.