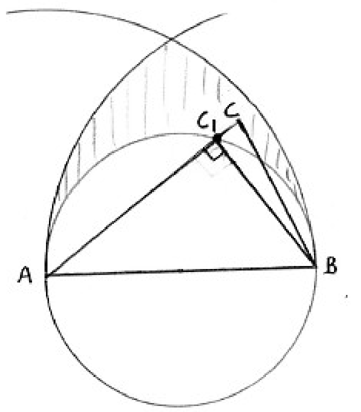
Extraproblem maj 2013. Fiskproblemet

I en spetsvinklig, oliksidig triangel är den största sidan i kvadrat mindre än summan av kvadraterna på dom kortare sidorna.

Bevis:

I ΔABC är ΛC rät. Den får utgöra periferivinkel i en halvcirkel vars diameter utgöres av sidan AB. Två cirkelbågar, båda med radien lika lång som AB, ritas med A respektive B som medelpunkt. Om hörnet C flyttas till en punkt innanför det område som begränsas av dom tre cirkelbågarna så blir triangeln spetsvinklig samtidigt som AB förblir den längsta sidan. (Att triangeln blir likbent om C ligger på linjen mellan storcirklarnas skärningspunkt och den lilla cirkelns centrum saknar betydelse för resonemanget)

Tämligen självklart är det att nu blir $AC^2 + BC^2 > AB^2$:
Välj en punkt C i det aktuella området. Rita triangeln och välj ut en av de två skärningspunkterna som AC och BC har med den lilla cirkeln. Vi kan kalla skärningspunkten C_1 .



Enligt Pythagoras sats:
$AC_1^2 + BC_1^2 = AB^2$

och eftersom
$AC > AC_1$ och $BC > BC_1$

så följer att
$AC^2 + BC^2 > AB^2$

Fiskproblemet: Dom tre fiskarna ligger i en triangelliknande figur med parvis punktkontakt mellan undre käkspets nedre stjärtfena. Dessa tre kontaktpunkter får bilda hörn i en spetsvinklig triangel med sidorna a, b och c. Varje sida i triangeln utgör ett längdmått, käkspets-stjärtfena, på respektive fisk. Eftersom fiskarna är likformiga så förhåller sig fiskarnas längdmått till varandra som sidornas längder, dvs som $a : b : c$.
Motsvarande areaförhållanden blir då $a^2 : b^2 : c^2$, säg att c är störst.
Då är $a^2 + b^2 > c^2$ och om fiskarna tilldelas areorna $k \cdot a^2$, $k \cdot b^2$ och $k \cdot c^2$
så föjer att $k \cdot a^2 + k \cdot b^2 > k \cdot c^2$ dvs

Svar: Dom mindre fiskarnas sammanlagda area är större än den största fiskens.