Arbeta vidare med Student 2010

Känguruproblemen är kanske inte av samma karaktär som de problem eleverna möter i läroboken. De är inga rutinuppgifter utan bygger på förståelse och grundläggande kunskaper. Även om man inte har haft möjlighet att genomföra tävlingen kan problemen komplettera den ordinarie undervisningen.

I all form av problemlösning är det viktigt att diskutera strategier och lösningsmetoder. Låt gärna eleverna i grupp resonera sig fram till en lösning.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:
– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
– Vilken information i problemet är nödvändig och vad kan ändras utan att problemet förändras?
– Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
– Vilka nya frågor kan problemet väcka?
– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraternas lösningar:

– Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar?
– Är de tydliga?
– Är resonemanget korrekt?
– Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem?

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Då kommer ett antal matematiska termer att aktualiseras. Gå igenom dem. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008)

I samband med problemlösning finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. Använd också snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar.

I årets Student behandlar problemen främst tal och geometri.

Tal

Många problem som förkommer i Kängurun och i andra matematiktävlingar bygger på heltalsmatematik. Det naturliga räknandet börjar med de positiva heltalen, som sedan utvidgas till negativa heltal. Egenskaper hos heltal, såsom faktor, multipel av, delbarhet, primtal, primtalsfaktorisering är därför viktiga att arbeta med. De här kunskaperna ligger till grund för arbete med tal i bråkform.

Uppgift 1, 2, 19 och 22.
Resonera om udda och jämna tal. Hur kan man allmänt skriva ett udda tal, $(2k+1)$, ett jämnt tal $(2k)$? Vad betecknar variabeln k här? Resonera om att $1+3+\ldots+(2n+1)$ blir ett kvadrattal. Undersök även summor av de jämna positiva heltalen. Låt eleverna resonera, ställa upp påståenden och bevisa dem. De tal som vi får om vi beräknar summorna $1, 1+2, 1+2+3, \ldots, 1+2+3+\ldots+n$ kallas triangeltal. Låt eleverna resonera om beteckningen, varför kallas de så? Låt dem även försöka bevisa att

$1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ både geometriskt och algebraiskt. Behandla aritmetisk serie och dess summa.

11
Repetera vad som menas med en talföljd. Vad är en geometrisk serie? Hur ser den allmänna termen ut i denna serie? Vilken är seriens första term? Låt eleverna skriva upp flera termer. Resonera om den geometriska seriens summa. Andra Känguruproblem där talföljder förekommer är Junior 2010:23, Student 2004:17, S2006:7, S2008:19,22 samt S2009:24.

4
Diskutera delbarhetsregler. Behandla multiplikationsprincipen, permutationer och kombinationer. Ändra frågan till ”Hur många fyrsiffriga tal bestående av bara jämna siffror är delbara med 5?”

16
Be eleverna bestämma den minsta primtalsfaktorn i talet N. Vilken roll har talen 0 respektive 1 i en addition, i en multiplikation? Visa att en primtalsuppdelning är unik och diskutera vilka möjligheter detta ger vid problemlösning.

Geometri

Flera av problemen i Kängurutävlingen har geometrisk anknytning. I efterarbetet är det viktigt att låta eleverna motivera sina tankegångar och redovisa sina lösningar. Vad är ett bevis? Hur mycket måste man redovisa i ett bevis och hur gör man detta på ett enkelt och tydligt sätt? Hur motiverar man att två vinklar är lika stora? Det räcker inte att hänvisa till att två vinklar ser lika stora ut eller att en vinkel ser rät ut.

3
Vilken volym har kuberna? Diskutera längd-, area- och volymskala. Anknyt även till begreppet dimension, vid beräkning av en volym måste man multiplicera tre längder. Se även Junior 2010:4

6
Repetera förhållandet mellan sidorna i trianglar med vinklarna 30°, 60°, 90° (halv liksidig triangel) respektive 45°, 45°, 90° (halv kvadrat).

Låt eleverna visa att $\angle BMC = 2 \cdot \angle BAC$ där M är mittpunkten på hypotenusan i en rätvinklig triangel. Omskriv den rätvinkliga triangeln med en cirkel och ta upp medelpunktsvinkel och randvinkel. Se även Junior 2010:18.

7
Ta upp definitionen av ett prisma. Undersök antal hörn, kanter och sidoytor hos prismor. Finns det något samband? Liknande problem Student 2004:1.

10, 12
Hur stor del av kvadraten i uppgift 10 är inte täckt av halvcirklarna? Diskutera varför uppgift 12 går att lösa utan att man bestämmer radierna. För en allmän diskussion om hur mycket information som behövs för att bestämma ett visst antal värden. Exempelvis behövs två ekvationer för att bestämma värden på två variabler.

14
Resonera om olika metoder att lösa uppgiften. Vilken sida och vilken höjd har den stora liksidiga triangeln? En liten liksidig triangel? För att underlätta beräkningar kan det ibland vara tidsbesparande att införa en extra variabel. I detta fall kan *s* beteckna sidan i en "liten" triangel och *h* dess höjd. Man får.

$$\frac{5s \cdot 3h + 4s \cdot 1h + 2s \cdot 3h}{2} = \frac{25sh}{2} = 25\text{cm}^2.$$

18
Behandla likformighet och areaskala.

Algebra

9
Behandla kvadrattalens egenskaper – de är alltid större än eller lika med 0. Vad betyder ekvationen om 0 byts ut mot ett positivt tal? Diskutera cirkelns ekvation. Arbeta också med Student 2004:13 och Student 2008:10.

13
Vad säger ekvationen om vilka tal x och y är delbara med? Vad betyder $5|x$ och $2|y$? Resonera om vilket tal $x+y$ måste vara delbart med.

17
Behandla triangelolikheten. Bestäm triangelns vinklar. Liknande problem är Student 2007:12.

23
Börja med enklare exempel. Ta upp skillnaden mellan att se ett mönster och visa det generellt. Arbeta med uttrycket $\frac{a^n - b^n}{a - b}$.

24
För vilka heltalsvärden på a är $f(a)$ möjliga att bestämma? Vi kan lösa det genom att byta ut x mot $\frac{2010}{x}$. Då får vi ekvationen $2 \cdot f(\frac{2010}{x}) + 3f(x) = \frac{10050}{x}$. Låt eleverna sätta upp ekvationssystemet bestående av de två ekvationerna och bestämma $f(x)$.

Ett exempel på problem där en liknande lösningsstrategi kan användas är:
Bestäm värdet av $x^3 - y^3$ då $x - y = 2$ och $x^2 + y^2 = 8$.

Bestäm värdet av $\frac{a + 3b}{a - 3b}$ om du vet att $\frac{a + 2b}{a - 2b} = 3$ och att $a \neq 0, b \neq 0$.

Tidigare problem som rör funktioner är Student 2007:22 och 2005:7.