Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Student 2022, facit och kommentarer

När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad *senast 29 april*. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Om du inte har använt kalkylbladet finns det i detta material underlag för en sammanställning av elevernas resultat.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan och dela också ut de Kängurureflexer med texten *Jag har deltagit i Kängurun*, som kan köpas från NCM: bestallning.ncm.gu.se/produkt/reflex. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också intressanta iakttagelser av elevernas resultat och svar. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med
Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, t ex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Ytterligare förslag på hur ni kan arbeta vidare med problemen finns samlade i dokumentet *Arbeta vidare med Student*.

Nominera till Mikael Passares stipendium

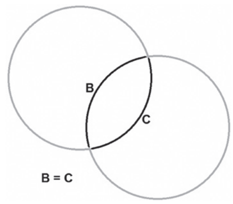
Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola, årskurs, tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond.

På ncm.gu.se/kanguru finns en nomineringsblankett. Fyll i den och skicka nomineringen senast *30 april* till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Facit och kommentarer – Student 2022

1	E		I diagram E är tiden som Henry denna vecka spenderade på tre av sina appar lika lång som tiden han spenderade förra veckan.
2	B	69	Det minsta tresiffriga tal som är delbart med 13 är $104 = 8 \cdot 13$ och det största tresiffriga tal delbart med 13 är $988 = 76 \cdot 13$. Antalet positiva tresiffriga tal delbara med 13 är $76 - 8 + 1 = 69$
3	B	Teddy och Lily	Både Lily och Teddy är äldre än Bella, medan Charlie är yngre.
4	D	16	Eftersom $15 = 3 \cdot 5$ så måste talet innehålla en siffra 3 och en siffra 5. Då måste de övriga åtta siffrorna i det 10-siffriga talet vara siffran 1. Det ger siffersumman 16.
5	D	2π	Inre bågar av två korsande cirklar med lika radier är lika långa. Det betyder att omkretsen av det skuggade området är lika lång som en cirkels omkrets med radie 1, dvs. 2π. 
6	B	220	Vi listar de tal med siffrorna 0 och 2 som uppfyller villkoren från det minsta talet till det största. Det ger talen 2, 20, 22, 200, 202, 220, 222, 2000, 2002, 2020, 2022. Det mittersta talet är 220.
7	A	0	Eftersom de båda termerna är icke-negativa, kan summan bara bli 0 om båda termerna är lika med 0. Det är omöjligt, alltså finns det inga lösningar.
8	D	*D*	Låt den lilla cirkeln har radien 1 l.e. Den har då omkretsen 2π. Båge *A* har medelpunktsvinkel $3\pi/4$ och radie 2 l.e. Dess längd blir $3\pi/2$. Båge *B* har medelpunktsvinkel $\pi/2$ och radie 3 l.e. Dess längd blir $3\pi/2$. Båge C har medelpunktsvinkel $\pi/4$ och radie 3 l.e. Dess längd blir $3\pi/4$. Båge *D* har medelpunktsvinkel $\pi/2$ och radie 4 l.e. Dess längd blir 2π. Båge *E* har medelpunktsvinkel $3\pi/4$ och radie 4 l.e. Dess längd blir 3π.
9	E	$a < 0$	Eftersom jämna potenser alltid är positiva så har $-b$ samma tecken som ab. Det innebär att $a < 0$ medan det inte har någon betydelse om b och c är positivt eller negativt.
10	A	15 cm	Låt $AB = 2x$ och $CD = 2y$. Då är $2x + 18 = 12 + 2y$, vilket ger $y - x = 3$. Avståndet mellan medelpunkterna blir $12 - x + y = 12 + 3 = 15$. Alternativt: Låt linjen genom A, B, C och D vara en tallinje. Då har mittpunkten av två punkter, säg A och B koordinaten (A+B)/2.. (C+D)/2 - (A+B)/2 = ((C-A)+(D-B)/2 = (12cm+18cm)/2=15cm. Generellt: Med liknande resonemang kan man vissa mera allmena samband för vektorer som i sin tur leder till intressanta geometriska samband.
11	D	0,137 (m^3)	Vi kan inte bara öka sista siffran, eftersom den då skulle bli 7, 8 eller 9. Vi kan inte heller öka fjärde siffran (skulle bli 8 eller 9) eller tredje siffran (skulle bli 9). Därför måste andra siffran öka, till (minst) 2. Vi väljer att låta de tre sista siffrorna ändras så att vi får nästa tal där alla siffror är olika, det ger 92,013. Det sker efter en förbrukning av 0,137 m^3 vatten.

12 D 21

Låt den minsta kvadraten ha sidan $2x$ och den andra kvadraten sidan $2y$. Då har den skuggade fyrhörningen arean $\frac{(x+y)^2}{2} = 3$, alltså $(x + y)^2 = 6$. Den stora kvadraten har sidan $2(x + y)$ och arean $4(x + y)^2 = 24$. Följaktligen har det icke skuggade området arean $24 – 3 = 21$.
Generellt: En rektangel delas i 4 rektanglar (det spelar ingen roll att några av dem är kvadrater). Den skuggade triangeln i varje rektangel har 1/8 av rektangelns area och den vita delen är 7 gånger så stor. Då är också det hela vita området 7 gånger så stor som den skuggade.

13 E 12

$2^{2021} + 2^{2022} = 2^{2021} \cdot 3$ och $3^{2021} + 3^{2022} = 3^{2021} \cdot 4$. SGD $= 3 \cdot 4 = 12$

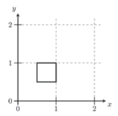
14 B 21

Låt de fem talen i storleksordning vara a, b, c, d, e.
Då är $a + b + c + d + e = 120$, $a + b + c = 57$ och $c + d + e = 84$.
Då är $c = 57 + 84 – 120 = 21$

15 C 12

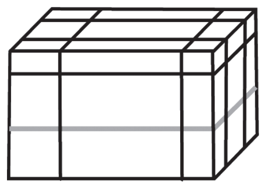
Fyra punkter där cirkelranden skär koordinataxlarna, dvs. i punkterna $(\pm 5, 0)$ och $(0, \pm 5)$. Eftersom $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ så får vi också de åtta punkterna $(\pm 3, \pm 4)$ och $(\pm 4, \pm 3)$. Totalt 12 punkter.

16 C



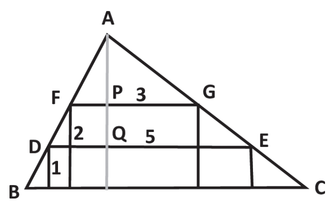
Kvadratens hörn avbildas enligt följande $(1, 1) \to (1, 1)$, $(1, 2) \to (1, 1/2)$, $(2, 1) \to (1/2, 1)$ och $(2, 2) \to (1/2, 1/2)$. Eftersom kvadraten sidor antingen har konstant x koordinat (1 eller 2) eller konstant y koordinat (1 eller 2) blir sidorna avbildade på horisontella eller vertikala linjer. Därför blir även avbildningen en kvadrat och alternativ C är korrekt.

17 C $3S$



Låt begränsningsarean på de tre olika sidoytorna vara A, B respektive C, då är $S = 2A + 2B + 2C$. En delning som den grå linjen ökar den totala begränsningsarean med $2A$, där A är begränsningsarean av den sidoyta som är parallell med delningen. Då är bidraget av alla sex delningarna $4A + 4B + 4C = 2S$.
Den totala begränsningsarean blir $S + 2S = 3S$.

18 B $\frac{7}{2}$



Trianglarna AFG och ADE är likformiga.
Det ger $AP : FG = AQ : DE$. Om höjden mot BC är h får vi $\frac{h-2}{3} = \frac{h-1}{5}$ vilket ger $h = \frac{7}{2}$.

19 D 30

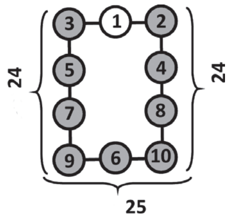
Låt h vara den stora rektangelns höjd. h är 9 gånger de minsta rektanglarnas höjd. Eftersom samtliga rektanglar är likformiga blir den största rektangelns bas 9. Då har var och en av de två mellanstora rektanglarna horisontell sida 4 och vertikal sida h. Likformigheten ger $4 : h = h : 9$, $h = 6$.
Omkretsen på den största rektangeln är $2 \cdot (9 + 6) = 30$.

20 A 1

Den sista siffran måsta vara 5, så talet kan bara ha udda siffror. Sifferprodukten är delbar med 5, så 5 gånger denna produkt är delbar med 25. De enda möjliga talen är 175, 375, 575 och 975. Av dessa är det bara $175 = 35 \cdot 5$ som uppfyller villkoren.

21 E inget av föregående

Största möjliga summa av talen i de två kolumnerna och bottenraden är
$(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + (9 + 10) = 73$.
Men summan av talen i de två kolumnerna och bottenraden är $24 + 24 + 25 = 73$, som är lika med största möjliga. Det innebär att för dessa nio cirklar finns det bara ett val av tal, nämligen 2 till 10 med talen 9 och 10 placerade i de två hörncirklarna i bottenraden för att få maximal summa. Det tal som återstår är 1 vilket placeras i den gula cirkeln.
Bilden visar ett exempel på en möjlig placering av talen.



22 B 2

Talen 1 och 20 måste placeras mitt emot varandra i 20-hörningen, i annat fall skulle de vara skilda åt med 9 sidor eller mindre, men $1 + 9 \cdot 2 = 19 < 20$. Det enda möjliga sättet att från 1 komma till 20 i 10 steg är att ha de jämna talen i ordning på en sida i 20-hörningen och de udda talen på andra sidan. Det ger en differens på 1 mellan 1 och 2 och mellan 19 och 20. Övriga differenser är 2. Alltså är två sidor rödfärgade.

23 D $\frac{3}{7}$

Vilka som möter varandra är slumpmässig. Den näst bästa spelaren spelar inte final om och endast om hon lottas i samma halva som den bäste. I den halvan är 3 platser av 7 platser tillgängliga.
Alternativ: I första omgången har Martina 7 möjliga motståndare och en av dem är Ash. Då är hennes chans att komma till andra omgången 6/7.
Om hon kommer till andra omgången så har hon 3 möjliga motståndare och en av dem är Ash. Då blir Martinas chans att komma till finalen 2/3.
Martinas obetingade chans att komma till finalen är $6/7 \cdot 2/3 = 4/7$ och risken att inte göra det $1 - 4/7 = 3/7$.

24 C $2N$

Notera att $N < \sqrt{N^2 + N + 1} < N + 1$ och $3N < \sqrt{9N^2 + N + 1} < 3N + 1$.
Det finns $3N - (N + 1) + 1 = 2N$ tal.

Redovisning av resultat

Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Det enklaste sättet att redovisa är att ladda upp det ifyllda kalkylbladet. I det finns alla uppgifter som vi behöver. Mer information om hur kalkylbladet fungerar finns i dokumentet *Att använda kalkylbladet*, som du hittar på ncm.gu.se/kanguru.

Om du *inte* har använt kalkylbladet ber vi dig fylla i motsvarande uppgifter i det formulär som finns på webben. De blanketter som finns här är till för att du ska kunna sammanställa de uppgifter som du sen ska skriva in.

Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031–786 69 85. Redovisa senast den 29 april.

Redovisningsblankett A

Namn och poäng för de två bästa eleverna i varje årskurs:

Åk	Namn	Poäng
kurs 4		
kurs 5		

Om du har fler elever med mycket bra resultat, mer än 77 poäng, kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	kurs 4	kurs 5
77 – 96 poäng		
57 – 76 poäng		
41 – 56 poäng		
25 – 40 poäng		
13 – 24 poäng		
0 – 12 poäng		
Totalt antal deltagare		

Redovisningsblankett B

För fortsatt bearbetning av resultaten är vi intresserade av lösningsfrekvensen per uppgift.

Antal elever med rätt svar på uppgiften

Uppgift	kurs 4	kurs 5
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		