Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Junior 2022, facit och kommentarer

När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad *senast 29 april*. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Om du inte har använt kalkylbladet finns det i detta material underlag för en sammanställning av elevernas resultat.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan och dela också ut de Kängurureflexer med texten *Jag har deltagit i Kängurun*, som kan köpas från NCM: bestallning.ncm.gu.se/produkt/reflex. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också intressanta iakttagelser av elevernas resultat och svar. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med
Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, t ex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Ytterligare förslag på hur ni kan arbeta vidare med problemen finns samlade i dokumentet *Arbeta vidare med Junior.*

Nominera till Mikael Passares stipendium

Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola, årskurs, tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap.* Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond.

På ncm.gu.se/kanguru finns en nomineringsblankett. Fyll i den och skicka nomineringen senast *30 april* till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Facit och kommentarer – Junior 2022

1 D 9

Carola behöver 5 tändstickor till siffran 2 och 6 stickor till siffran 0. Till hela talet behövs $3 \cdot 5 + 1 \cdot 6 = 21$ tändstickor. Det är $9 = 30 - 21$ stickor kvar i asken.

2 A 9

Den liksidiga triangeln har omkretsen 36. Kvadratens omkrets är 4 gånger sidan x och vi har $4x = 36$. Kvadratens sida är $x = 36/4 = 9$.

3 C

I B är tiden för en app halverad. I D och E är tiden för tre appar halverade. I A har alla tider halverats. C är det korrekta svaret.

4 D 10

Vi har $(x + 1)(y + 1) = 77 = 11 \cdot 7$. Då är $x + 1 = 11$ och $x = 10$.

5 B -1

Det sista villkoret ger ekvationen $x + x^2 = 0$ och $x \cdot (x + 1) = 0$, med lösningarna 0 och -1. Från det första villkoret kan 0 uteslutas. Talet är -1.

6 B $\frac{1}{4}$

Om rektangeln delas på mitten vertikalt framgår det att en fjärdedel av varje halva av rektangeln är skuggad.

7 C 3

Totalt har 14 + 11 + 10 + 8 + 2 = 45 röster räknats. Det är 90 % av det totala antalet röster, vilket betyder att 5 röster är kvar att räkna. Det bästa utfallet för varje kandidat är att få samtliga fem återstående röster. Varken Diana eller Eddy kan trots alla fem röster vinna över Alex som har 14. De tre andra kan vinna.

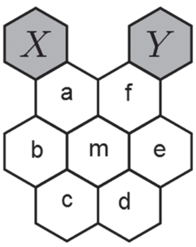
8 D 17

Pythagoras sats ger att arean av den stora kvadraten i mitten är både 3 + 22 och 8 + ?. Den sökta arean är 3 + 22 – 8 = 17.

9 B 2π

De skuggade områdena i cirkeln längst till höger passar precis in i två av de ofärgade områdena i cirkeln längst till vänster. Det framgår att arean av de skuggade områdena är arean av en stor cirkel minus arean av två små cirklar; $A = 4\pi - 2\pi = 2\pi$.

10 D 5



Den första vita hexagonen som apini besöker måste vara *a* eftersom den är den enda som gränsar med *X*. Den sista dvs. den sjunde måste vara *f*. Hexagonen *m* kan besökas enbart som nr 2, 3, 4, 5 eller 6 i ordningen. Det är lätt att hitta 5 sådana vägar: *ambcdef, abmcdef, abcmdef, abcdmef* och *abcdemf*. Frågan är om det finns flera sådana vägar. T.ex. om det finns flera vägar sådana att *m* besöks som nr 4.

Svaret är nej:

a är nr 1. Eftersom *f* är nr 7 och *m* nr 4 så kan bara *b* vara nr 2 och bara *c* kan vara nr 3.

f är nr 7. Eftersom *a* är nr 1 och *m* nr 4 så kan bara *e* vara nr 6 och bara *d* kan vara nr 5.

Det fins bara en väg från *X* till *Y* som passerar genom var och en av de sju vita hexagonerna exakt en gång med *m* som nr 4.

Samma gäller om *m* ska passeras som nr 2, 3, 5 eller 6.

11 D 1011

Efter att Adam tagit bort brickor finns det $2022 \cdot 5/6$ kvar. Efter Beata finns det $2022 \cdot 5/6 \cdot 4/5$ och efter Calle är det $2022 \cdot 5/6 \cdot 4/5 \cdot 3/4 = 2022 \cdot 3/6 = 1011$ brickor kvar till Doris att ta bort.

12 E obestämt

Två möjligheter. Mormodern kan vara antingen 77 år (75 + 2 = 78 – 1 = 81 – 4) eller 79 år (75 + 4 = 78 + 1 = 81 – 2). Det går inte att exakt fastställa hennes ålder.

13	A	$\frac{8}{9}$	Låt den korta sidan i den lilla rektangeln vara a och den långa sidan b. Då är $DC = 3b$ och $AB = 3a + b$. $DC = AB$ ger oss $3b = 3a + b$ och $b = 1{,}5a$. Förhållandet $AD/DC = (2b + a)/(3b) = 4a/4{,}5a = 8/9$.
14	A	45 s	Det tar 550/10 = 55 sekunder för kaninen att springa runt banan. Låt x (meter) vara avståndet som igelkotten springer till den möter kaninen. Då gäller $x/1 = (550 - x)/10$, med lösningen $x = 50$ (meter). Igelkotten springer fram och tillbaka, totalt 100 meter vilket tar 100/1 = 100 sekunder. Igelkotten kommer i mål 100 – 55 = 45 sekunder efter kaninen. Alternativ: Kaninen och igelkotten springer tillsamans 11 meter av banan varje sekund och möts efter 550/11= 50 sekunder. Igelkotten behöver lika lång tid för att komma tillbaka medan kaninen som är 10 gånger så snabb klarar det på 5 sekunder. Igelkotten kommer 50 – 5 = 45 sekunder efter kaninen.
15	B	20	Veronica måste ta av de tre ringarna på ringfingret i en särskild ordning. Låt oss kalla dessa ringar A, B, C. Hon kan ta av ringen på lillfingret före ring A, mellan A och B, mellan B och C eller efter C. Det ger fyra olika möjlligheter. För vart och ett av dessa kan Veronica ta av ringen på långfingret på 5 olika sätt, allra först, mellan andra ringar eller allra sist. Det ger totalt $4 \cdot 5 = 20$ olika sätt att ta av ringarna. Alternativ lösning: de tre ringarna på ringfingret måste tas av i en särskild ordning. De andra två ringarna kan tas av i vilken ordning som helst. Antalet olika sätt kan tecknas $5!/3! = 5 \cdot 4 = 20$.
16	E	$\frac{5}{6}$	Då W är kvadratens mittpunkt är längden av sträckan UW = 1/2. Kvadraten, med sidan 1, är delad i tre lika stora områden. Varje del har då arean 1/3. Vi betecknar längden av sträckan SV med y. Formeln för parallelltrapetsens area ger att: $\frac{1}{2} \cdot (y + \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Lösningen av ekvationen ger $y = \frac{5}{6}$.
17	B	40	Vi delar kvadraten P i två lika delar med diagonalen. Det framgår att den stora triangeln består av fyra kongruenta mindre trianglar och arean av den stora triangeln är 90. Vi delar nu upp kvadraten R i fyra trianglar med hjälp av två diagonaler. Det framgår att den stora triangeln består av nio sådana små trianglar (två av trianglarna i kvadraten kan halveras med hjälp av dess höjd). Arean av en de små trianglarna är 90/9 = 10 och arean av kvadraten R är 40.
18	D	17	Det minsta antal poäng som kan delas ut totalt på de 28 matcherna är $28 \cdot 2$ poäng/match = 56 poäng. Det händer om alla matcher slutar oavgjort. För varje match där ett av lagen vinner adderas 1 poäng till totalsumman. Den aktuella totalsumman är 61 – 56 = 5 poäng över minimum, vilket betyder att i endast 5 matcher vann ett av lagen. Mästarlaget erhåller högsta möjliga antal poäng om det spelade och vann dessa fem matcher vilket ger den högsta möjliga poängsumman; $5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 17$ poäng.
19	D	80	Varje kategori i besättningen (officer, sjöman, hyttpojke) fick 5 fler silvermynt än guldmynt. Om det finns totalt n pirater kommer överskottet av silvermynt att uppfylla följande villkor, $5n = 600 - 200$, och $n = 80$.
20	E	17,5 cm^2	Triangeln FBD är rätvinklig, då FB och BD båda är parallella kvadraters diagonaler, och har arean $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10 = 35\ cm^2$. Punkten P är mittpunkt på BD vilket ger att triangeln FPD har halva arean av triangeln FBD, 35/2 = 17.5.

21	C		Berta kan inte vara ”positiv” för svaret ”ja” på frågan leder till en motsägelse. Alltså, Berta är ”negativ”. Svaret på frågan är ”nej” vilket betyder att både Berta och Albert inte är ”negativa”. Albert måste vara ”positiv”.
22	C	7 kg	Den totala vikten är 1 + 2 + ... + 12 = 78 kg. Den tredje gruppen väger 78 – 41 – 26 = 11 kg. De fyra minsta vikterna väger 1 + 2 + 3 + 4 = 10 kg och den enda möjligheten att fyra vikter väger 11 kg är 1 + 2 + 3 + 5 = 11. Vi har att de fyra tyngsta vikterna väger 12 + 11 + 10 + 9 = 42 och enda möjligheten att fyra vikter väger 41 kg är 12 + 11 + 10 + 8 = 41. De tre grupperna av vikter är (1, 2, 3, 5), (8, 10, 11, 12) och (4, 6, 7, 9). Av alternativen är det bara vikten 7 kg som är i samma grupp som vikten på 9 kg.
23	D	35	N kan endast innehålla siffrorna 1, 2, 4, 5. Därför kan inte talet $N + 1$ innehålla siffran 7 och produkten av dess siffror kan inte vara 35. Produkten 40 fås med $N = 2251$ och $N + 1 = 2252$, 30 med $N = 2512$ and $N +1 = 2513$, 25 med $N = 54$ and $N + 1 = 55$ och 24 fås med $N = 45$ and $N + 1 = 46$. Alternativ: N kan endast innehålla siffrorna 1, 2, 4 och 5 och alla kan vara den sista siffran. Sista siffran i $N + 1$ blir 1 större dvs.: 2, 3, 5 eller 6 respektive och övriga siffror förblir samma som i N. Om sista siffran i N är 1, så är produkten av siffror i $N + 1$: $20 / 1 \cdot 2 = 40$. Om sista siffran i N är 2, 4 eller 5, så är respektive sifferprodukten i $N + 1$: $20 / 2 \cdot 3 = 30$ eller $20 / 4 \cdot 5 = 25$ eller $20 / 5 \cdot 6 = 24$.
24	A	A	Låt r_a, r_b, r_c, r_d och r_e vara radierna i cirklarna med mittpunkterna A, B, C, D och E. Då gäller $r_a + r_b = 16$ cm, $r_b + r_c = 14$ cm, $r_c + r_d = 17$ cm, $r_d + r_e = 13$ cm och $r_e + r_a = 14$ cm. Addition av sträckorna ger att $2(r_a + r_b + r_c + r_d + r_e) = 74$ cm och $r_a + r_b + r_c + r_d + r_e = 37$ cm. Den största radien är $r_a = (r_a + r_b + r_c + r_d + r_e) - (r_b + r_c) - (r_d + r_e) = 37 - 14 - 13 = 10$ cm. Alternativ (resonemangslösning, helt utan beräkningar): Längden av ett segment som förbinder mittpunkter av två tangerande cirklar är summan av cirklarnas radier. För varje cirkel i figuren finns två segment som parvis förbinder mittpunkterna i de fyra övriga cirklarna. Summan av två sådana segments längder är lika med summan av dessa fyra cirklarnas radier. För den av de fem cirklarna som har största radie är summan av de övriga fyra cirklarnas radier minst. Därför tittar vi på de kortaste segmenten: DE = 13cm, BC = 14cm och AE = 14cm. Vi ser att DE och BC är ensamt det minsta sådana paret (DE och AE förbinder bara 3 mittpunkter). Alltså är A mittpunkten till cirkeln med den största radien.

Redovisning av resultat

Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Det enklaste sättet att redovisa är att ladda upp det ifyllda kalkylbladet. I det finns alla uppgifter som vi behöver. Mer information om hur kalkylbladet fungerar finns i dokumentet *Att använda kalkylbladet*, som du hittar på ncm.gu.se/kanguru.

Om du *inte* har använt kalkylbladet ber vi dig fylla i motsvarande uppgifter i det formulär som finns på webben. De blanketter som finns här är till för att du ska kunna sammanställa de uppgifter som du sen ska skriva in.

Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031–786 69 85. Redovisa senast den 29 april.

Redovisningsblankett A

Namn och poäng för de två bästa eleverna i varje årskurs:

Åk	Namn	Poäng
kurs 2		
kurs 3		

Om du har fler elever med mycket bra resultat, mer än 77 poäng, kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	kurs 2	kurs 3
77 – 96 poäng		
57 – 76 poäng		
41 – 56 poäng		
25 – 40 poäng		
13 – 24 poäng		
0 – 12 poäng		
Totalt antal deltagare		

Redovisningsblankett B

För fortsatt bearbetning av resultaten är vi intresserade av lösningsfrekvensen per uppgift.

Antal elever med rätt svar på uppgiften

Uppgift	kurs 2	kurs 3
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		