Arbeta vidare med Benjamin

Matematiskt arbete handlar i stor utsträckning om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraters lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras. Många elever kanske också klarar sig utan de olika svarsalternativen.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det? Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru

Nedan har vi samlat några av problemen från Benjamin 2022. Vi ger förslag på hur eleverna kan arbeta med uppgifterna efter tävlingen och, i vissa fall, tar vi upp specifika svårigheter. Vi ger även exempel på hur frågeställningarna och förutsättningarna i uppgifterna kan varieras.

Liknande problem från tidigare år kommer du åt via länken: http://ncm.gu.se/2664

Geometri och rumsuppfattning

3

Reflektioner

Problemet är lika mycket ett fysikaliskt som ett matematiskt problem. För att konkretisera problemet kan man arbeta med att rulla en pingisboll mot en vägg och se hur bollen studsar ut och fortsätter sin bana. Biljardbollar studsar mot bordskanten på samma sätt. Det matematiska sambandet är att vinkeln in mot kanten är densamma som vinkeln ut från kanten. Problemet kan lätt göras svårare genom att låta bollen/laserstrålen möta kanten/spegeln i en annan vinkel än 45 grader. Börja med att rita en kant/spegel och beräkna banan för en inkommande boll/stråle. Utöka därefter till flera studsar för att utforska bollens/strålens bana.

6 och 13

Area

I båda de här problemen gäller det att kunna uppfatta delar av en area och att föreställa sig hur olika delar av arean flyttas runt för att skapa större delar.
Låt eleverna beskriva med ord hur de ser och resonerar kring areorna.

- I problem 6 kan man se att den skuggade delarna är lika stora som de vita delarna antingen genom att vika bilden längst diagonalen eller genom att betrakta de skuggade delarna som en separat figur som när den vrids 90 grader kommer att precis få plats i den vita delen.
- I problem 13 finns ett rutnät att relatera till. Låt eleverna utgå från en kvadrat som består av 4 x 4 rutor och sedan hitta på olika sätt att färglägga ? av arean. Jämför olika bilder och diskutera hur man kan veta på att det är ? som är färglagd.

Liknande problem: Benjamin 2016:9, Benjamin 2019:14, Benjamin 2014:7
Liknande men mer utmanande problem: Cadet 2017:20, Cadet 2009:16, Benjamin 2011:21

24

Figur i 3D

Problemet handlar om tolkning av tredimensionella figurer avbildade i två dimensioner.

Liknande problem: Ecolier 2021:1, Benjamin 2017:19, 2021:1, Cadet 2017:23

Tal och tals användning

18

Additiv uppdelning

Det finns många problem som på olika sätt hanterar en additiv uppdelning av tal. I det här problemet gäller det att dels se på vilka sätt de olika talen kan delas upp additivt, dels inse att man måste börja med det talet som bara har en möjlig uppdelning: 3 = 1 + 2.

Liknande problem: Benjamin 2017:18, 2017:24, Ecolier 2022:24, Ecolier 2009:12

2

Jämföra räknesätt

I det här problemet liksom i många Känguruproblem leker man lite mer siffrorna i det aktuella årtalet. Här handlar det om att utveckla förståelsen för räknesätten och snabbt uppskatta storleken på tal. En utforskande aktivitet kring samma innehåll kan vara:

- Väl ett årtal och utmana eleverna att med hjälp av de siffror som finns i årtalet och tecknen för olika räkneoperationer skapa ett så stor eller så litet tal som möjligt.
- Välj ett årtal och utmana eleverna att med hjälp av de siffror som finns i årtalet och tecknen för olika räkneoperationer skapa så många olika heltal som möjligt (här får man avgöra om alla siffror måste användas eller inte). Till exempel kan siffrorna i 2022 bilda talen:
  $1 = (2 \cdot 0) + \frac{2}{2}$; $2 = 2 + (0 \cdot 2 \cdot 2)$; $3 = 2 + 0 + \frac{2}{2}$; $4 = (2 \cdot 0) + 2 + 2$ osv…

Liknande problem: Benjamin 2017:1

7

Tolvsiffrigt tal

För att lösa det här problemet behöver man ha en god förståelse för positionssystemet. Den matematiska idén bakom positionssystemet innebär att ju längre till vänster en siffra står desto högre tal representerar den. Det betyder exempelvis att 9 som entalssiffra i ett tolvsiffrigt tal är nästan försumbar, medan 9 som första siffra i talet betyder 900 000 000 000. Lösningen på problemet är att börja med det största platsvärdet och där sätta den lägsta siffran, och sedan fortsätta på samma sätt men låga siffror på höga platsvärden. En svårighet som byggs in i problemställningen är att lapparna innehåller olika antal siffror, vilket innebär att man kan behöva fundera på inte bara nästa siffra utan även den följande.

- Det är lätt att skapa nya liknande problem genom att göra egna lappar.
- Variera mellan att skapa ett så stort tal som möjligt och ett så litet tal som möjligt.

8

Gamla siffror

Det är alltid spännande att arbeta med gamla siffror och andra talsystem. Diskutera med eleverna på vilket sätt de här cisterciensermunkarnas talsystem skiljer sig från vårt moderna talsystem. Det innehåller ett slags 10-bas genom att tecknen för 1 och 10, 2 och 20 osv hänger ihop och är snarlika. I själva verket är tiotalssiffran spegelvänd jämfört med entalssiffran. Varje tal har bara en lodrät pinne med olika ”tillbehör”.

- Säg till eleverna att munkarna en dag ville skriva större tal och be dem förslå hur tecknen då skulle kunna se ut.
- Alternativ E betyder faktiskt 540. Hur är det tecknet uppbyggt?
- Be eleverna fundera på hur exempelvis 640 skulle kunna se ut. Hur kan andra tresiffriga tal se ut?
- Be dem föreslå ett sätt att även skriva fyrsiffriga tal.

Problem kring Mayafolkets talsystem: Benjamin 2019: 2, Ecolier 2019:2

11 och 22

Multiplikativ uppdelning

Båda problemen behandlar multiplikativa strukturer där elevernas får utnyttja sina kunskaper om delbarhet och faktorisering.

- Problem 11 löses lätt visuellt genom att använda rektangelmodellen och rita upp talet 60 som en rektangel 6 x 10. En alternativ lösning är att beräkna stegvis. Om var sjätte försvinner från 60 kommer 10 att försvinna, återstår 50. Om var femte försvinner från 50 … osv.
- Problem 22 löses genom att man utnyttjar kunskaper om multiplikationstabellerna. De flesta elever tycker att vissa tabeller är lättare än andra. Prata om vilka som är lätta och varför. Delbarhet med 2 och med 5 är lättast att se – varför?
- En utveckling av problem 22 är att arbeta med att primtalsfaktorisering:

  $105 = 5 \cdot 3 \cdot 7$

  $210 = 2 \cdot 105 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7$

  $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

  $168 = 2 \cdot 84 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

  Nu kan vi se att alla tal är delbara med 7 och 3, men bara 105 och 210 är delbara med 5 och bara 84 och 168 är delbara med 4 och 6.

Andra problem om delbarhet: Benjamin 2013:10, Cadet 2020:20

Logik

19

Kodlås

En kodknäckare måste arbete systematiskt, hålla reda på ledtrådar och resonera deduktivt. Den sortens problem ger god hjärngymnastik och tränar logiskt tänkande. För elever som behöver hjälp att reda i tankarna kan man formulera och skriva ner slutsatser efter varje ledtråd. ”Om den här premissen gäller kan vi dra följande slutsats … ”. För att klargöra den logiska tankebanan är språket ett viktigt redskap:

”Eftersom…så …”

”Om … så….”

”Det med för att….”

”Då gäller att…”

Liknande problem: Benjamin 2017:9, Benjamin 2021:16, Cadet 2020:24

Algebra

17

Staplade glas

Här är ett problem där en konkret situation modelleras som en linjär funktion. Det kan ses som en prealgebraisk uppgift som hanterar dels en konstant del (höjden på det första glaset) dels en variabel del (höjden på varje extra glas i stapeln). Eftersom glasen staplas i varandra kommer bara det första glaset att bidra till den totala höjden med lika mycket som sin egen höjd, alla övriga bidrar med mindre. Höjden kan därför beskrivas som:
[höjden för 1 glas] + [en mindre höjd] · [antal glas staplade i det första.]
Problemet kan utökas med frågor om höjden på staplar med att annat antal glas och slutligen med uppmaningen att generalisera:

- Hur hög är en stapel med 20 glas? Med 46 glas? Med 100 glas?
- Gör en generell lösning som kan användas till vilket antal glas som helst.
- Skriv ett enkelt dataprogram som räknar ut höjden på stapeln när du matar in ett antal glas.
- Hitta på andra situationer som kan beskrivas som dels en konstant del och dels en variabel dels och som kan representeras som en rät linje.

En generell lösning med ord:
Stapeln höjd ökas med 42 – 18 = 24 cm när 6 glas tillförs, vilket innebär att varje glas bidrar med 24/6 = 4 cm. Stapeln med 2 glas består av 1 helt glas + 4 cm för det andra glaset, vilket innebär att det första glaset är 18 – 4 =14 cm.
Stapelns höjd = 14 cm + [antal glas som staplas inuti det första] · 4 cm

En algebraisk lösning:
Algebraiskt kan det uttryckas som en linjär funktion: $f(x) = kx + m$.
Ett generellt uttryck för höjden av en glasstapel är därför $f(x) = 4 \cdot x + 14$, där x är antal glas som är staplade inuti det första.
En stapel om 6 glas tecknas då som $f(5) = 4 \cdot 5 + 14 = 34$
En stapel med 8 glas tecknas $f(7) = 4 \cdot 7 + 14 = 28 + 14 = 42$

En grafisk lösning:
När man inser att det kommer att vara en linjär funktion kan man pricka in de två givna värdena i en graf och dra en rät linje genom dem. Punkten A i grafen motsvarar två glas och 18 cm, punkten B motsvarar 8 glas och 43 cm. I grafen kan vi nu avläsa höjden (på y-axeln) av en stapel med ett valfritt antal glas (på x-axeln).