Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Cadet 2021, facit och kommentarer

När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad *senast 20 maj*. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Om du inte har använt kalkylbladet finns det i detta material underlag för en sammanställning av elevernas resultat.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan och dela också ut de Kängurureflexer med texten *Jag har deltagit i Kängurun*, som kan köpas från NCM: bestallning.ncm.gu.se/produkt/reflex. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också intressanta iakttagelser av elevernas resultat och svar. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med
Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, t ex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Ytterligare förslag på hur ni kan arbeta vidare med problemen finns samlade i dokumentet *Arbeta vidare med Cadet.*

Nominera till Mikael Passares stipendium

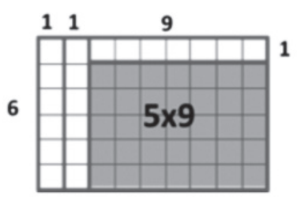
Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola, årskurs, tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond.

På ncm.gu.se/kanguru finns en nomineringsblankett. Fyll i den och skicka nomineringen *senast 20 maj* till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Facit och kommentarer – Cadet 2021

1	A		
2	E	50 %	Utnyttja symmetrin. För varje grå del finns en likadan vit del mitt emot längs en diagonal. Det är en en-till-en motsvarighet mellan grå och vita områden. De grå områdena är lika stora som de vita.
3	D		I A och B ökar temperaturen från första till andra dagen. I C ökar temperaturen mellan dag 2 och 3. I E ökar temperaturen mellan tredje och fjärde dagen.
4	B	6	Ett tal kan inte börja med 0 så det första talet måste vara 1234. Därefter följer 2345, 3456, 4567, 5678, 6789. Nu är sista siffran 9 och kan inte bli högre så det finns inga fler sådana tal.
5	A	-100	Sätts bitarna ihop korrekt blir uträkningen 2 – 102 = -100.
6	A		B, C och E har horisontella symmetriplan på halva höjden, så de fylls till den nivån. Det behövs mindre än en halv liter vatten för att fylla vas A till halvnivå eftersom den nedre halvan av vasen är smalare än den övre. Häller vi en halv liter i den så blir nivån över hälften. I D är det omvänt. *Alternativt resonemang*: Vas A och C är smalast nertill och kommer därav få högst nivå inledningsvis. Vas C blir sedan bredare än vas A vilket gör att nivån blir allra högst i A.
7	E		Jämför alternativen med var i bygget de grå bitarna syns.
8	B	1893	Vi letar efter en kombination som är 5 placeringar bort från den nuvarande kombinationen. 6 vrids så till 1 3 till 8 4 till 9 8 till 3 Det spelar ingen roll åt vilket håll man vrider.
9	D	45	$5 \cdot 9 = 45$ rutor. 

10 E 500 g

Alternativ 1: När flaskan fylls till fyra femtedelar ökar dess vikt med 740 – 560 = 180 g. Det ger att 3/5 av flaskans maximala innehåll väger 180 g. Detta innebär att 1/5 väger 60 g och om vi subtraherar dessa 60 g från 560 g får vi att en tom flaska väger 560 – 60 = 500 g.
Alternativ 2: För de som börjat med linjära ekvationssystem kan problemet lösas med denna metod.

$$\begin{cases} Flaskvikt + \dfrac{hel\ fyllning}{5} = 560 \\ Flaskvikt + \dfrac{4 \cdot hel\ fyllning}{5} = 740 \end{cases}$$

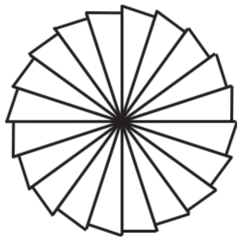
Lösning av systemet ger att en flaska väger 500 g.

11 B 2,5 cm

Om plankorna inte skulle placeras med överlapp skulle längden tillsammans bli 25 · 30 = 750 cm, så överlappen är totalt 750 – 690 = 60 cm. Det är totalt 24 överlapp så varje överlapp är 60/24 = 2,5 cm.

12 D 20

Den största av de två spetsiga vinklarna är 360° / 5 = 72°, så den mindre är 90° – 72° = 18°. Det behövs därför 360° /18° = 20 trianglar, se bild.

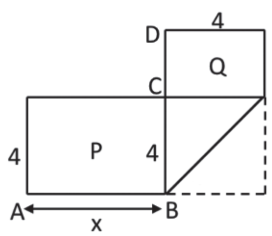


13 B 1

Låt F vara antalet felsvar och X antalet obesvarade frågor. Då blir antalet korrekta svar $20 - F - X$.
Om vi kopplar till antalet poäng: $7(20 - F - X) - 4F = 100$.
Förenkling ger $11F + 7X = 40$.
F kan som mest vara 3. Om vi testar alla små värden 0, 1, 2, 3 för F så finner vi den unika lösningen $F = 3$ och $X = 1$.

14 C 6

Vi inför några beteckningar i figuren, se bild.
Arean av P är $4x$ och arean av Q är 4 · (längden av CD). Eftersom P = 2Q så måste längden av CD vara $x / 2$. Det ger ekvationen $x / 2 = 9 - x$ och $x = 6$.

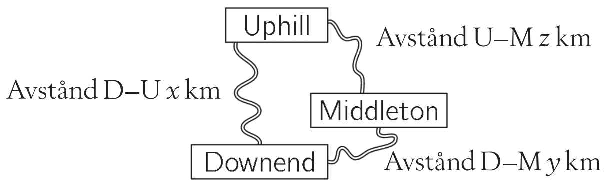


15 E

Eftersom äpplena är 2/3 av frukterna och Christy fick 2/3 av frukterna, skulle ett sätt att dela frukterna vara att ge Christy alla äpplen och Lily alla päron. Men detta är bara ett av flera sätt att dela upp frukten. Om Christy vill ha några päron kan hon byta ut några av sina äpplen till päron. Frågan är hur många. Om hon ska behålla antalet frukter hon har, betyder det att för varje äpple hon ger till Lily måste hon få ett päron.
Detta visar att svaret (E) är korrekt.
Med exempel kan vi se att alla andra svar kan vara fel och inte alltid sanna.

16 C 3 km

Att gå den långa vägen runt från U till M (moturs i figuren), och från M till D (moturs i figuren) och slutligen från D till U (moturs i figuren) är lika långt som att gå två gånger varvet medurs. Enligt problemformuleringen är det detsamma som att gå $1 + 5 + 7 = 13$ km längre än att gå medurs, från U till M och sen till D och tillbaka till U.
Så ett komplett varv är 13 km. Eftersom gångvägen från U direkt till D är 1 km längre än att gå "långvägen" betyder det att 13 km delas upp i två vägar där en är 1 km längre, alltså 6 km i en riktning och 7 km från den andra. Detta visar att det direkta avståndet från U till D är 6 km. På samma sätt hittar vi de andra sträckorna.
Algebraisk lösning:



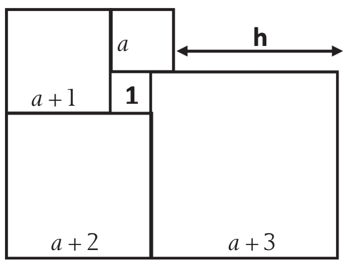
Då gäller
$y + z = x + 1$
$x + z = y + 5$
$x + y = z + 7$
Ledvis summering ger $2(x + y + z) = x + y + z + 13$
$x + y + z = 13$
$x + y = z + 7$ ger $2z + 7 = 13$, $z = 3$
$y + z = x + 1$ ger $2x + 1 = 13$, $x = 6$
Då är $y = 13 - 3 - 6 = 4$

17 D 20

Alla pentagoner har tillsammans $12 \cdot 5 = 60$ sidor. Runt varje pentagon finns 5 hexagoner, men varje hexagon har en gemensam sida med 3 pentagoner. Alltså finns det $60 / 3 = 20$ hexagoner.

18 C 4

Om vi kallar sidan på den högra översta kvadraten för a så kan vi sätta ut sidorna på de andra kvadraterna som uttryck med hjälp av a; $a + 1$, $a + 2$ och $a + 3$.



Då blir $h = (a + 2) + (a + 3) - (a + 1) - a = 4$.
(intressant upptäckt att h är oberoende av a).

19 C 30 %

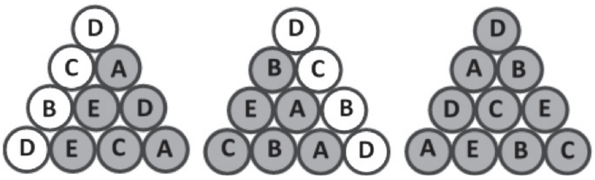
Om originalbråket tecknas som p / q kan vi med problemsituationen sätta upp följande uttryck:

$$\frac{1{,}4p}{x} = \frac{2p}{q}$$

där x är den nya nämnaren. Löses x ut blir uttrycket $x = 0{,}7q$ vilket betyder att nämnaren måste minska med 30 % (ska vara 70 % av ursprungliga nämnaren q).

20 D **D**

Vi ser alla kulor utom en, den som ligger mitt i den fjärde sidan. Alla kulor i pyramidens kanter (som till exempel de som är markerade som ljusa) visas i flera vyer. Undantaget är dem som tillhör kanter runt den fjärde sidan och inte är i hörn som bara visas en gång. Vi kommer att upptäcka att det finns 4 st kulor med bokstäverna A, B, C och E, och endast 3 st kulor med D. På den dolda kulan på fjärde sidan står det D skrivet.



21 B 27

Alternativ 1: Om *ABCDE* betecknas med x, kan en ekvationen ställas upp med hjälp av villkoren i problemet, $3(2 \cdot 10^5 + x) = 10x + 2$. Lösningen $x = 85714$ ger då talet 285714. Siffersumman är $2 + 8 + 5 + 7 + 1 + 4 = 27$.
Alternativ 2: Förhållandet mellan de två talen kan skrivas
$3 \times 2ABCDE = ABCDE2$.
Vi tittar på de sista siffrorna. Vi vill att $3 \times E$ ska sluta på 2. Endast $E = 4$ gör det, $3 \times 4 = 12$, så vi har nu $3 \times 2ABCD4 = ABCD42$. Nu tar vi de två sista siffrorna. Vi vill att $3 \times D4$ ska sluta på 42. Produkterna 3×04 till 3×94 funkar endast 14, så $D = 1$ och vi har nu $3 \times 2ABC14 = 2ABC142$. Vi fortsätter på samma sätt för att bestämma C = 7, $B = 5$, $A = 8$.

22 B 29

Att det finns minst en grön bland varje 27 kulor betyder att det inte finns fler än 26 kulor av andra färger. Med symboler: $R + B + Y \leq 26$.
På liknande sätt är
$G + B + Y \leq 24$,
$G + R + Y \leq 21$ och
$G + R + B \leq 16$. (G = grön, Y = gul, R = röd, B = blå)
Adderar vi ihop dessa fyra olikheter får vi $3(R + B + G + Y) \leq 87$ så att $R + B + G + Y \leq 29$, vilket betyder att vi har en övre gräns för antalet kulor. Om vi ersätter $\leq$ med = i olikheterna och löser det uppkomna ekvationssystemet får vi $B = 8$, $G = 3$, $R = 5$ och $Y = 13$, och deras summa är också 29.

23 B 20

Vi tittar på fyra kängurur i följd på någon plats i raden. De tre första känguruerna har olika färg, liksom de tre sista känguruerna. Skulle dessutom den första och den fjärde ha olika färger så skulle de vara av 4 olika färger. Men vi vet att de är av bara tre färger. Således har den första och den fjärde kängurun samma färg. Det betyder att färgerna upprepas efter mönstret: färg 1, färg 2, färg 3, färg 1, ...
Talen 2 och 2021 lämnar samma rest när de delas med 3 så de måste ha samma färg. Gissningarna säger att de båda är gråa, så detta måste stämma (annars skulle båda vara fel, men bara en är fel). Eftersom nummer 2 är grå följer att nummer 20 (samma rest) också måste vara grå, men gissningen är att den är blå. Så gissningen om nummer 20 är fel.
Alternativ: Om två nummer har samma rest när talen delas med tre, så måste färgerna på motsvarande kängurur vara desamma och vice versa. Nummer 2 och nummer 20 har samma rest så de har samma färg men eftersom Bruce gissar att de har olika färg måste en av dem vara en felgissning. Nummer 20 och nummer 1002 har också olika rester så de måste ha olika färger, men Bruce har gissat att de har samma färg, så (exakt) en av dem är fel. 2, 20 och 2021 ger samma rest vid delning med 3, alltså alla tre måste vara av samma färg. Färgen måste vara grå, annars skulle minst två av dessa tre vara felgissade. Alltså är nummer 20 en felgissning då Bruce sa att den är blå.

24 A 1

Komplettera tabellen steg för steg.
Tre av matcherna med A , A–B, A–E, A–C, finns i omgång 1, 3 och 5.
I de andra två matcherna med A, A–F, A–D, kan inte A–F spelas i omgång 4 eftersom där spelar redan lag F. Alltså är matchen A–D i omgång 4. Detta fylls på i rad 2 i tabellen.
Nu ser vi att lagen A, C, D, F i andra omgången spelar parvis, så den tredje matchen måste vara mellan de återstående två lagen B–E i denna omgång.
På samma sätt i omgång 4 är den återstående matchen B–C. Dessa slutsatser läggs till på tredje raden i tabellen.
Nu finns tre matcher för lag C (omgång 2, 4, 5), så de återstående två C–E och C–F måste spelas i omgångarna 1 och 3 (C–E kan inte spelas i omgång 3 eftersom E redan spelar, så det måste vara omgång 1). Det går nu att slutföra hela tabellen. D–F spelar alltså i omgång 1.

1	2	3	4	5
A–B	C–D	A–E	E–F	A–C
C–E	A–F	B–D	A–D	B–F
D–F	B–E	C–F	B–C	D–E

Redovisning av resultat

Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Det enklaste sättet att redovisa är att ladda upp det ifyllda kalkylbladet. I det finns alla uppgifter som vi behöver. Mer information om hur kalkylbladet fungerar finns i dokumentet *Att använda kalkylbladet*, som du hittar på ncm.gu.se/kanguru.

Om du *inte* har använt kalkylbladet ber vi dig fylla i motsvarande uppgifter i det formulär som finns på webben. De blanketter som finns här är till för att du ska kunna sammanställa de uppgifter som du sen ska skriva in.

Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031–786 69 85. Redovisa senast den 20 maj.

Redovisningsblankett A

Namn och poäng för de två bästa eleverna i varje årskurs:

Åk	Namn	Poäng
8		
9		
gy 1		

Om du har fler elever med mycket bra resultat, mer än 77 poäng, kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	åk 8	åk 9	gy 1
77 – 96 poäng			
57 – 76 poäng			
41 – 56 poäng			
25 – 40 poäng			
13 – 24 poäng			
0 – 12 poäng			
Totalt antal deltagare			

Redovisningsblankett B

För fortsatt bearbetning av resultaten är vi intresserade av lösningsfrekvensen per uppgift.

Antal elever med rätt svar på uppgiften

Uppgift	åk 8	åk 9	gy 1
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			