Arbeta vidare med *Benjamin*

Efter tävlingen hoppas vi att problemen ska bli underlag för många intressanta diskussioner. Låt gärna eleverna arbeta med lösningarna i grupp. Uppmuntra dem att hitta så många olika lösningssätt som möjligt. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås ett långsiktigt arbete så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Svarar lösningen på frågan som ställs? Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
- Påminner problemet om något annat problem vi har löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?

Gå gärna igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är rätt. Låt eleverna göra förändringar i problemet så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt. De felaktiga svarsalternativen kan också användas som utgångspunkt för diskussion om vad som skulle kunna leda fram till dessa svar: ”Hur tror ni att den som har valt alternativ A som svar har tänkt?”

Matematiskt arbete handlar både om matematikinnehållet och om strategier. Låt eleverna få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbete med problem bör förmågorna att resonera och argumentera vara centrala. Om inte tydliga resonemang kommer fram i elevernas redovisningar kan du visa hur ett sådant kan föras. Eleverna behöver få se vad det innebär att föra ett resonemang, hur logiken styr vilka slutsatser som kan dras. I samband med diskussion om problemen kommer ett antal termer och begrepp att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Nedan ger vi förslag på hur du kan arbeta vidare med några av problemen. För varje problem lyfts ett matematikinnehåll fram som problemet behandlar, men ibland kan det givetvis finnas andra saker att belysa. Det bästa sättet att själv bilda sig en uppfattning om ett problems kvaliteter är att själv lösa det. Då blir man medveten om hur man själv tänker och vilka samband som används. Lös därför alltid problemen själv och komplettera våra förslag med egna idéer. Vi ger också hänvisningar till snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem, med facit och ”arbeta vidare”, finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru. Om dina elever har speciellt svårt för något problem, eller finner ett visst problem extra roligt, kan du utnyttja de gamla problemen för att berika din undervisning.

Geometri och rumsuppfattning

Problem 1 (Geometri, 3 dimensioner)

Problemet handlar om tolkning av tredimensionella figurer avbildade i två dimensioner. Bygg konstruktionerna. Diskutera varför de felaktiga alternativen är fel.

Liknande problem: Ecolier 2021:1, Benjamin 2017:19

Problem 7 (Geometri, 2 dimensioner)

Det här problemet tilltalar antagligen elever som är vana vid datorspel där de använder tangentbordets pilar för att flytta en figur på skärmen. Här handlar det om att kunna föreställa sig förflyttning flera led framåt. Låt elever förklara med ord hur de måste flytta och varför figur A, C, D och E inte kommer igenom öppningen.
Konstruera egna former som kan passera hålet.
Vad är gemensamt för alla som kan passera? För de som inte kan passera?

Problem 9 (Geometri, pappersvikning)

Lös problemet konkret. Undersök hur pappren ska vikas. Diskutera vilka former som bildas och deras storlek. På hur många sätt kan P, Q och R vikas på mitten?

Problem 10 (Geometri och bråk som del av helhet)

Arbeta med att beskriva alla de olika bråken.

- I figur C och E är de färglagda delarna lika stora. Hur vet vi det?
- Hur stor del av A respektive B är färglagd? Hur kan vi se det?

Låt eleverna utgå från ett eget kvadratiskt papper och dela in i olika delar. På hur många sätt kan de färglägga ¼? Testa med andra bråk.

Liknande problem: Cadet 2019:8

Problem 13 (Geometri, sträckor)

Diskutera hur längderna på de olika sidorna kan bestämmas. Diskutera begreppet area i relation till sidorna på rektangeln (area = basen · höjden). Vad händer med arean och höjden ökar? Om basen ökar? Om basen och höjden är lika? Om höjden ökar lika mycket som basen minskar? Här är det lämpligt att låta eleverna använda figuren för att redovisa sin lösning. Problemet kan sedan utökas med andra frågor kring figuren, exempelvis:

- Vilken omkrets har var och en av de tre rektanglarna?
- Vilken omkrets respektive area har hela figuren?

Det finns många gamla problem där vissa sträckor eller areor är givna och andra ska beräknas med hjälp av de givna. *Liknande problem*:
Benjamin 2020:19; 2018:8; 2017:15; 2015:7; 2006:13
Ecolier 2020:24; 2019:20
Cadet 2020:13; 2018:8; 2017:4

Tal och tals användning

Problem 3 (Positionssystemet)

Diskutera med eleverna hur vi snabbt kan avgöra vilket tal som är störst, utan att anteckna alla siffrorna.

- Vilken linje visar det minsta talet? Hur kan vi veta det?
- Hur skulle linjen för det största möjliga talet se ut? Det minsta möjliga?

Problem 6 (Addition, subtraktion)

Det här problemet handlar om att förstå att det hela tiden är samma avstånd runt cylindern, vilket medför att skillnaden mellan talen som hamnar ovanför varandra är konstant. I detta fall ska 21 adderas varje varv. Skillnaden som ska adderas fås genom subtraktion ($27-6$) men det är troligt att eleverna faktiskt tänker det som en addition av en obekant ($6+x=27$). Problemet är en bra utgångspunkt för att diskutera sambandet mellan addition och subtraktion. Problemet kan varieras genom att ändra cylinderns omkrets eller antal varv måttbandet viras.

Liknande problem: Ecolier 2021:7 där det tal som efterfrågas är det som är direkt ovanför 27.

Problem 8 (Proportionalitet)

Färgblandningsproblemet är ett proportionalitetsproblem där eleven förväntas inse att samtliga lösningar har samma proportioner. En svårare variant av problemet är att ange olika proportioner på de olika svarsalternativen. Att skriva upp det proportionella förhållandet i bråkform gör jämförelsen mycket enklare. Då kan de även behandlas som tal och förlängas eller förkortas för att skapa gemensam nämnare.

Svårare variant: Carin ska måla väggarna i sitt rum gröna. Den gröna färgen är för mörk så hon blandar i vit färg. Hon provar olika blandningar. Vilken av följande blandningar ger den mörkaste gröna nyansen?

(A) 1 del grön + 4 delar vit
(B) 2 delar grön + 2 delar vit
(C) 2 delar grön + 6 delar vit
(D) 3 delar grön + 4 delar vit
(E) 3 delar grön + 2 delar vit

När man ska skriva bråken är det viktigt att hålla ordning på vad som jämförs. Det går antingen att jämföra del med del: grön/vit) eller att jämföra del med helhet: grön /(vit+grön).

Vi börjar med att jämför del med del: $\frac{1}{4}, \frac{2}{2}, \frac{2}{6}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}$

Det är inte helt enkelt att förstå vilken som blir mörkast. Mörkast är den som har störst täljare (grönt) i förhållande till nämnare (vit). Skriv alla med samma nämnare blir detta enklare.

Välj 12 eftersom det är MGN för 2, 4 och 6: $\frac{3}{12}, \frac{12}{12}, \frac{4}{12}, \frac{9}{12}, \frac{18}{12}$

I den jämförelsen ser man hur många delar grön som blandas med 12 delar vit.
Det är tydligt att den sista blandningen blir mörkast.
Om vi istället jämför del med helhet får vi följande bråk: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{5}$

Dessa kan därefter jämföras med referensvärdet $\frac{1}{2}$ som motsvarar en blandning av en del grön och en del vit. Den enda blandningen som är större än $\frac{1}{2}$ är $\frac{3}{5}$ (mer grön än vit).

Problemet kan göras både enklare och svårare genom att variera de ingående talen. Just i den här varianten är alternativ E den enda blandningen där det är fler delar grönt än vitt. Fundera på andra proportioner som kan jämföras och vilka beräkningar de resulterar i.

Problem 11 (Positionssystemet)

Det här problemet förutsätter en förståelse av positionssystemet och att så länge vi håller oss till heltal innebär fler siffror alltid ett större tal (vilket inte gäller när det handlar om decimaltal). Det är inte alltid elever kan tillämpa sin kunskap om positionssystemet. Att ta hjälp av additionsalgoritmen genom att ställa upp talen tydligt under varandra kan vara en stor hjälp.

En liknande typ av problem handlar om att se på skillnaden mellan exempelvis det största tresiffriga talet och det minsta fyrsiffriga talet. Låt eleverna undersöka flera sådana gränsfall om de är osäkra inom det här området.

I strävan 1A *Tänk till tusen* använder elever kunskaper om tals storlek och positionssystemet för att göra strategiska bedömningar. För att vinna Tänk till tusen krävs god taluppfattning samt insikt i hur en standardalgoritm för addition fungerar (och en del tur med tärningen).

Problem 20 (Proportionalitet)

Även pannkaksreceptet är ett proportionalitetsproblem där olika sätt att uttrycka andelar ska jämföras med varandra. Jämför lösningsstrategier här. Vilken strategi ger oss snabbast ett korrekt svar? Vilken strategi är enklast? Vilken strategi skulle man använda i en praktisk situation? Här är exempel på några olika strategier:

- ”Vägen över ett” innebär att hela receptet beräknas för en enda pannkaka. Därefter kan man se hur mycket varje ingrediens räcker till.
- Förhållandena skrivs som bråk och storleken på dessa jämförs, till exempel genom att placeras ut på en tallinje eller att göras om till gemensam nämnare.
- Gissa, testa och justera. Testa genom att dela receptet på ett lämpligt sätt. Be om förslag på vilka tal som är lämpliga att testa med.

Eftersom det är 25 ägg och 5 kg mjöl är det enkelt att dela receptet med 5. Vi ser då att vi till 20 pannkakor behöver 5 ägg, 1 kg mjöl, 0,8 l mjölk, 200 g smör. Samtliga ingredienser räcker till, så vi får testa med något annat. Om vi delar med 10 istället ser vi att varken ägg eller mjölk kommer att räcka men nu är vi ganska nära. Just det här problemet är ganska svårt att komma fram till genom testning. Diskutera varför!

Problem 16 (Taluppfattning)

Gå igenom för varje alternativ hur lillebror har vridit. Hur skulle cylindern sett ut om han i stället hade vridit 5 hack uppåt? Kan han få den kombinationen på något annat sätt? Hur ska han vrida för att få kombinationen 3015? Låt eleverna göra egna exempel.

I det här problemet ligger fokus på entalssiffran. Eftersom det finns 10 hack innebär det att det finns många sätt att vrida som ger samma resultat. Här är några exempel:
Om vi börjar på 6 och vrider 5 hack hamnar vi på 1: $6+5=11$, entalssiffran är 1
Om vi börjar på 6 och vrider 15 hack hamnar vi på 1: $6+15=21$, entalssiffran är 1
Om vi börjar på 6 och vrider 5 hack bakåt hamnar vi på 1: $6-5=1$, entalssiffran är 1

Logiskt tänkande

Problem 4 (Uteslutning)

Problemet tränar logisk slutledning. Diskutera olika sätt att angripa problemet.
Ett alternativt resonemang för att lösa problemet är att börja med den låda som bara innehåller en bokstav.
Hon måste ta N ur låda 3 för där finns bara N.
Det innebär att hon måste ta E ur låda 1 eftersom hon redan tagit N.
Det innebär att hon måste ta U ur låda 5 eftersom hon redan tagit E.
Det innebär att hon måste ta G ur låda 4 eftersom hon redan tagit E, U och N.
Slutligen tar hon K ur låda 2.

Liknande problem: En nästan identisk uppgift finns i Ecolier 2021:13 där det är geometriska former istället för bokstäver i lådorna.

Problem 21 (Sant eller inte sant – logiska resonemang)

Problem där både sann och falsk information ges är kluriga och tränar logisk slutledning. Ibland är det enklare att börja resonemanget med ett antagande och se om det leder till en motsägelse eller inte. Uppstår en motsägelse får man gå tillbaka och göra ett nytt antagande. Ett bra sätt är att vara tydlig med att dokumentera resonemanget. Använd tydliga markörer och sambandsord:

- antag att …
- då vet vi att …
- det leder till att …
- i så fall måste …

Liknande problem: Benjamin 2020:16, Benjamin 2018:11

Problem 15 (Problemlösningsstrategier)

Visa konkret hur brickorna läggs. Låt eleverna visa hur de kan få alternativ A-D och argumentera för varför det inte går att få bild E.

Det här är ett bra exempel på ett problem som är ganska omständligt att lösa genom att testa alla alternativ. Att istället vända på problemet och lösa det bakifrån är mycket lättare. Då går resonemanget så här: Om vit börjar så måste svart ha lagt den sista brickan. Vi ser direkt att detta inte är möjligt i bild E.

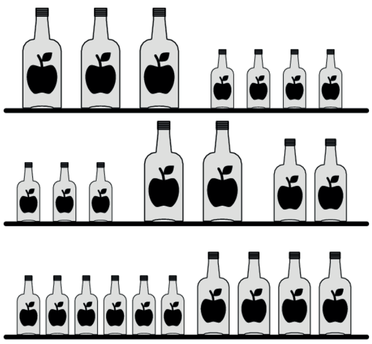
Algebra

Problem 23 (Prealgebra, likheter)

Problemet är en inledning till ekvationslösning eftersom det som presenteras är tre mängder som alla är lika. Det är samma mängd saft på varje hylla, men den uttrycks på olika sätt. Det går därför att skriva som likheter: totala volymen på översta hyllan = totala volymen på mittenhyllan = totala volymen på understa hyllan.

En svårare variant av samma problem finns här, där de olika storlekarna på flaskor inte är jämna multiplar av varandra. Det innebär att lösningen inte är lika lätt att testa sig fram till. Istället behöver man ta till ett resonemang kring likheterna. Räkna noga antalet av varje sorts flaska på varje rad, det skiljer lite från uppgiften i tävlingen.

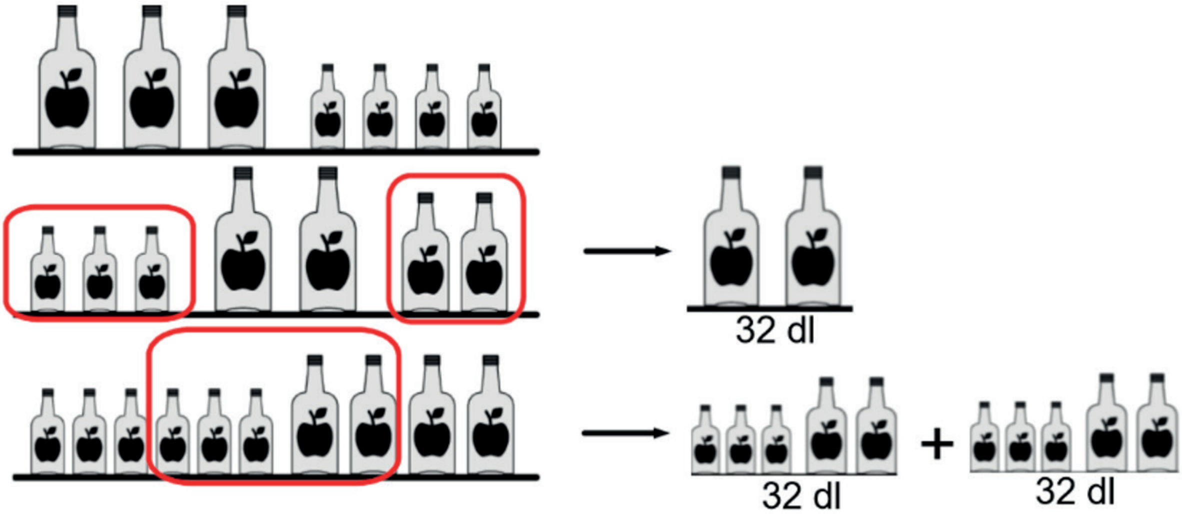
> På varje hylla på bilden finns det totalt 64 dl äppelmust.
> Flaskorna finns i tre storlekar: stor, mellan och liten.
> Hur många deciliter rymmer en mellanstor flaska?
>
> (A) 3
> (B) 6
> (C) 8
> (D) 10
> (E) 14



Problemet kan lösas som ett ekvationssystem, men också genom att jämföra mängder och föra ett resonemang kring likheter.

Om du fördubblar mängden flaskor på mellersta hyllan ser du att du får samma antal av de minsta och av de medelstora flaskorna som i den nedre hyllan. Detta innebär att var och en av de fyra stora flaskorna måste innehålla $64/4 = 16$ dl. Var och en av de fyra små flaskorna på den övre hyllan innehåller sedan $(64 - 3 \cdot 16)/4 = 4$ dl. Var och en av de fyra medelstora flaskorna på den nedre hyllan innehåller $(64 - 6 \cdot 4)/4 = 10$ dl.

Du kan också titta på flaskorna i den nedre hyllan. Dela upp dem i två lika stora mängder med 3 små och 2 medelstora flaskor i varje, där båda mängderna måste innehålla 32 dl. Denna mängd finns på hyllan i mitten, och där ser du att två stora flaskor också måste innehålla 32 dl, dvs 16 dl i varje flaska. Övriga beräkningar som ovan.



Problem 24 (Prealgebra, likheter & olikheter)

Det här är årets svåraste problem eftersom den innehåller olikheter och kräver resonemang i flera led. Det blir enklare om man hittar på symboler för frukterna eller har konkreta saker att plocka med. Problemet fungerar som ingång till att använda algebraiska symboler och tränar eleverna att föra resonemang kring tal med okänt värde.

Ecolier 2021:24 är en enklare variant av problemet eftersom det innehåller två likheter och en olikhet istället för en likhet och två olikheter.

Det går lätt att göra enklare problem av samma karaktär där antal led som behövs i resonemanget inte är lika många. Exempelvis:

> Ett äpple och en apelsin väger lika mycket tillsammans som ett päron och en nektarin.
> Ett äpple väger lika mycket som en apelsin.
> Ett äpple och ett päron väger mindre än en apelsin och en nektarin.
> Vilken av frukterna är tyngst?

Ecolier 2021:10 visar tre vågar som sammanlagt ger information om olikheter. Skillnaden är att siffervärden anges vilket gör det lätt att testa och pröva sig fram med olika värden. Utan siffervärden är det endast relationen mellan vikterna som beaktas. Med siffervärden börjar eleverna oftast att räkna istället.

Liknande problem med enbart likheter: Ecolier 2019:15; Benjamin 2020:20
Liknande problem med olikheter: Ecolier 2018:18; Benjamin 2018:18