Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Student 2020, facit och kommentarer

När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad *senast 30 april*. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Om du inte har använt kalkylbladet finns det i detta material underlag för en sammanställning av elevernas resultat.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan och dela också ut de Kängurureflexer med texten *Jag har deltagit i Kängurun*, som kan köpas från NCM: bestallning.ncm.gu.se/produkt/reflex. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också intressanta iakttagelser av elevernas resultat och svar. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med
Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, t ex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Ytterligare förslag på hur ni kan arbeta vidare med problemen finns samlade i dokumentet *Arbeta vidare med Student*.

Nominera till Mikael Passares stipendium

Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola, årskurs, tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond.

På ncm.gu.se/kanguru finns en nomineringsblankett. Fyll i den och skicka nomineringen senast *30 april* till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

Facit och kommentarer – Student 2020

1	D	8	Eftersom faktorerna 2 och 5 finns med så slutar talet på 0. Resten är $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2$, vilket kan räknas ut till 288, och totala produkten blir alltså 2880. De två sista siffrornas summa blir då 8.
2	C	9 m	Den horisontella delen är fortfarande lika lång, 5 m. Däremot tillkommer fyra vertikala delar på vardera 1 m. Den nya vägen är alltså $5+(1+1+1+1)=9$.
3	B	q	Då både a och b är mindre än 1 kommer produkten också att vara det. Då $ab<a$ kan vi utesluta punkterna r, s och t. Både a och b ligger nära 1 och är båda större än 1/2 och därmed är $ab>1/4$, så vi kan också utesluta p. Alltså måste ab vara samma som punkt q. Det stämmer också bra då b ligger nära 1 vilket borde innebära att ab måste ligga nära a precis som q gör.
4	A	6 %	Två av ”tårtbitarna” i cirkeldiagrammet ska i princip vara lika stora, de som åker buss och de som åker bil. Det måste vara bitarna som visar 11 % respektive 12 %. Bland återstående bitarna ska en bit vara dubbelt så stor som en annan. Det torde då vara bitarna markerade med 24 % resp 47 %. Vi är intresserade av den sista biten. Det är alltså 6 % som åker moped till skolan.
5	C	24	Då alla siffrorna A, B, C, D, E finns representerade en gång i varje kolumn, som ental, tiotal och hundratal, kan vi sätta upp att $111(A+B+C+D+E)=2664$. Dvs $A+B+C+D+E=2664/111=24$.
6	E	7070	$\frac{1010^2+2020^2+3030^2}{2020}=\frac{(1^2+2^2+3^2)\cdot 1010^2}{2\cdot 1010}=7\cdot 1010=7070$
7	D	1000	$a \geq 1$ och $c \geq b$ Om $b>1000$ så blir $abc>1\,000\,000$ Men b kan vara exakt 1000 om $a=1$ och $c=b$, då $abc=1 \cdot 1000 \cdot 1000=1\,000\,000$. Om b ska vara så stort som möjligt så måste $b^2 \leq bc \leq abc=1\,000\,000$ så $b \leq 1000$. Likheten uppkommer då $a=1$ och $b=c=1000$.
8	E	$\frac{1}{3}$	Eftersom tärningarna har två sidor med samma färg blir sannolikheten för en viss färg på en tärning 2/6, dvs 1/3. Sannolikheten att båda visar samma färg, är sannolikheten att tärning 2 visar samma som tärning 1, alltså 1/3.
9	D	$6n-1$	Sätter vi $n=1$ i svarsalternativ A blir uttrycket 6, vilket är delbart med 3. Sätter vi $n=3$ i svarsalternativ B är uttrycket 9, vilket är delbart med 3. Sätter vi $n=2$ i uttrycken C och E blir svaret delbart med 3. Kvar är då alternativ D. Vi kan visa att D inte är delbart med 3 på följande vis: $6n-1=3\cdot 2n-1=3(2n-1)+2$ vilket betyder att när vi delar uttrycket med 3 blir resten 2, vilket det inte får bli.

10 B 3

Från början är alla mynt med krona vända uppåt: *Kr - Kr - Kr - Kr - Kr*. Nästa steg blir då *Kr - Kr - Kl - Kl - Kl*. Om vi ska försöka minimera antalet steg kan vi nu tänka oss att vi vänder så vi får *Kr - Kl - Kr - Kl - Kr*. Sista steget blir då *Kl - Kl - Kl - Kl - Kl*.

Varje gång man vänder ett mynt ändrar man antalet kronor med 1, dvs om antalet kronor var jämnt blir det udda, om det var udda blir det jämnt. Vänder man två mynt så blir pariteten oförändrad. Allmänt, om man gör ett jämnt antal ettmyntsvändningar blir pariteten oförändrad. I två steg gör man sex stycken ettmyntsvändningar, man ändrar inte pariteten. Men här gäller det att man ska ändra antalet kronor från 5 till 0, alltså ändra från udda till jämnt. Det görs inte i två steg.

11 B 1

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$ är ett jämnt tal.

Alternativ: Vi kan konstatera följande samband mellan talen $a-b, b-c, c-a$; $c-a=-(a-b)-(b-c)$. Det medför att

1) om $a-b, b-c$ har samma paritet så är $c-a$ jämn
2) om $a-b, b-c$ har olika paritet så är c–a udda.

Det ger att uttrycket $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ antingen är av typen $(jämn)^2+(jämn)^2+(jämn)^2$ eller $(jämn)^2+(udda)^2+(udda)^2$. Det betyder att uttryckets paritet är jämnt så alternativ B kan inte inträffa.
De andra alternativen är möjliga, t ex (A) $a=b=c=0$ eller (C) $a=0, b=c=1$, (D) $a=1, b=2, c=3$ och (E) $a=0, b=c=2$.

12 B 199

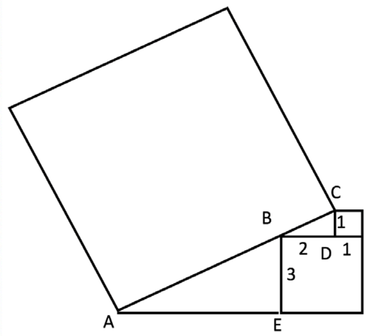
Kalla det 100-siffriga talet A, $A>10^{99}$. Det är 98 dolda siffror så $A<30\cdot10^{98}$.
Kvadrering av båda olikheterna ger
$10^{198}<A^2<900\cdot10^{196}<1000\cdot10^{196}=10^{199}$.
A^2 är mellan de konsekutiva potenserna 10^{198} och 10^{199} av 10 och har därför 199 siffror.

Alternativ: Vi kallar talet A. I grundpotensform gäller följande olikheter för talet A, $2{,}9\cdot10^{99}<A<3\cdot10^{99}$. Kvadrering ger olikheterna $8{,}1\cdot10^{198}<A^2<9\cdot10^{198}$. Talet har 199 siffror.

13 B 80

De två mindre kvadraterna har sidorna 1 och 3. Med figurens beteckningar ger det $BD=2$. Pythagoras sats ger att $BC=\sqrt{5}$.

De rätvinkliga trianglarna ABE och BCD är likformiga så $CD:BE=CB:BA$, det ger $1:3=\sqrt{5}:BA$ vilket ger $BA=3\sqrt{5}$.
Då är $AC=3\sqrt{5}+\sqrt{5}=4\sqrt{5}$ och arean blir $(4\sqrt{5})^2=80$.



14 A 673

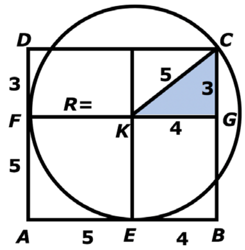
Vi undersöker pariteten för talen i talföljden. Den startar med f_1 udda och f_2 udda, f_3 blir jämn. Rekursionsformeln ger för de första talen följande pariteter:

udda, udda, jämn, udda, udda, jämn, udda, udda …

Observera att pariteten för det fjärde och det femte talet är identiskt med pariteten för det första och andra talet. Det ger att följden är periodisk, pariteten upprepas nämligen som *udda/udda/jämn*, dvs vart tredje tal är jämnt. Eftersom $2020=673\cdot3+1$ har vi 673 jämna tal.

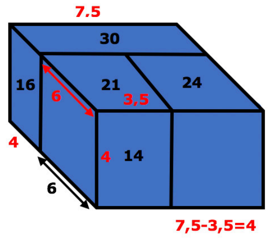
15 C 72

I tangeringspunkterna E och F är rektangelsidan vinkelrät mot cirkelns radie. Vi drar radierna från E och F. De möts i cirkelns medelpunkt K.
Radien $R = KF = AE = 5$.
Tillämpning av Pythagoras sats på triangeln KGC ger $GC = 3$, så rektangelns lodräta sida har längden $AD = 3 + 5 = 8$. Rektangelns area är $8 \cdot 9 = 72$.



16 B 24

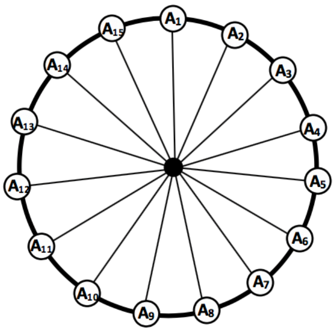
Från rektangeln med area 21 och bredd 6 får vi att dess längd är 3,5. Använder vi det får vi att rektangeln med area 14 har höjd 4. Denna höjd ger att rektangeln med area 16 har bredd 4 och rektangeln med area 30 har längd 7,5. Då följer att rektangeln vars area efterfrågas har längd $7{,}5 - 3{,}5 = 4$ och bredd 6. Dess area är $4 \cdot 6 = 24$.



17 A 0

Kalla talen $A_1, A_2 \ldots A_{15}$, (se figur) med $A_1 = 10$.
Eftersom $A_1 + A_2 + \ldots + A_7 = A_2 + A_3 + \ldots + A_8$, gäller att $A_1 = A_8$. Med samma resonemang är $A_8 = A_{15}$ och följaktligen $A_1 = A_8 = A_{15}$.

Fortsätter vi runt hjulet
$A_1 = A_8 = A_{15} = A_7 = A_{14}$ osv. I själva verket finns denna lista av lika tal i samtliga femton $A_1, A_2, \ldots, A_{15}$, dvs alla talen är 10. Då är den enda möjliga summan av alla talen $15 \cdot 10 = 150$. De föreslagna summorna är ej möjliga och svaret på frågan är alltså 0.



18 D *bc*

Från andragradsfunktionens graf ser vi att den böjer sig uppåt och a är alltså positiv, $a > 0$. Den korsar y-axeln och $c < 0$. Funktionen är avtagande vid $x = 0$ så då måste $b < 0$. Vi kan konstatera att alternativen A, B, C och E är negativa medan alternativ D är positivt.

19 E Inget av de andra alternativen är korrekt

Vi lägger in figuren i ett koordinatsystem. Linjen har riktningskoefficienten $k = \frac{3}{4}$. Om den går genom origo har den ekvationen $y = \frac{3}{4}x$.
De tre trianglarna är likformiga. Vi bestämmer koordinaterna för deras hörn på den räta linjen. Den nedre triangeln har hörn i punkterna $(1, \frac{3}{4}), (\frac{4}{3}, 1)$. Den mellersta triangeln har hörn i punkterna $(2, \frac{3}{2}), (\frac{8}{3}, 2)$ och den översta i punkterna $(3, \frac{9}{4}), (4, 3)$. Trianglarnas lodräta sidor har längderna $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ respektive $\frac{3}{4}$. Förhållandet mellan längderna är $1:2:3$. Då har trianglarnas areor förhållandet $1:4:9$.

20 D $75\,\text{m}^2$

Låt den ursprungliga trädgården ha sidlängderna x respektive y. Efter förstoringen är längderna $6x/5$ respektive $3y/2$. Den skuggade arean är ”hälften av den förstorade trädgårdens area minus hälften av den ursprungliga trädgårdens area”.
Det ger $\frac{1}{2}(\frac{6x}{5}\cdot\frac{3y}{2}-xy)=30.$
Förenkling ger $xy=75$. Den ursprungliga arean är $75\,\text{m}^2$.

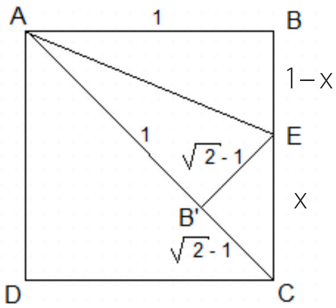
21 D 7 och 8

A går inte därför att om 2 och 3 är de enda undantagen betyder det att talet är delbart med 4 och därmed även delbart med 2 vilket är en motsägelse mot antagandet.
B går inte för om talen 4 och 5 är de enda undantagen är talet delbart med 8 och därmed delbart med 4, vilket är en motsägelse.
C kan inte inträffa för om 6 och 7 är de enda undantagen betyder det att talet är delbart med 2 och 3 och därmed med $2\cdot 3=6$, vilket motsäger antagandet.
E kan inte inträffa för om 10 och 11 är de enda undantagen betyder det att talet är delbart med 2 och 5 och därmed med $2\cdot 5=10$, vilket också motsäger antagandet.
Men D är möjlig därför att talet $1980=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11$ är delbart med alla heltal från 2 till 11 med undantag för 7 och 8.

22 C 5

30 och 18 är båda multiplar av 6. Varje gång Tony tar bort eller lägger till kulor är ändringen en multipel av 6. Med andra ord är antal kulor i lådan $71-6k$ för $k\in Z$. Den största multipeln av $6\leq 71$ är $66=6\cdot 11$ så det minsta värdet av $71-6k$ är $71-6\cdot 11=5$. Vi måste verifiera att det är möjligt för Tony att komma till 5 genom att plocka bort 30 kulor eller att lägga till 18 kulor. Här är ett sätt: $71-30-30+18+18+18-30-30=5$.

23 A $2-\sqrt{2}$



Alternativ 1: BE är vinkelrät mot AB. Den vinkeln ändras inte vid vikningen. Alltså $B'E$ blir vinkelrät mot AC. Vi får en likbent vinkelrät triangel $EB'C$. $B'E=B'C=\sqrt{2}-1$ och arean av triangeln AEC är $AC\cdot B'E/2=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)/2$.

Alternativ 2: Vikningslinjen AE är bisektrisen till vinkeln CAB, från bisektrissatsen har vi $AC:AB=CE:EB$. Med $EC=x$ får vi ekvationen $\sqrt{2}/1=x/(1-x)$ med lösning $x=2-\sqrt{2}$. Arean av fyrhörningen $AECF$ är två gånger arean av triangeln $ACE=2\cdot(2-\sqrt{2})/2=2-\sqrt{2}$.

24 A 30 m

Eftersom bara tre av kubens kanter är partiellt synliga måste den synliga delen ha formen av en tetraeder. För beräkning av dess volym väljer vi basytan som en av de rätvinkliga trianglarna med två av de synliga kantdelarna som kateter och tillämpar formeln för pyramidens volym. Höjden är då den återstående synliga kantdelen (som är vinkelrät mot basytan). Om kubens kant är a får vi sambandet:

$\frac{1}{10}a^3=\frac{1}{3}Bh=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 25\cdot 27$ med lösning

$a=\sqrt[3]{10\cdot 4\cdot 25\cdot 27}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5^3\cdot 3^3}$

Redovisning av resultat

Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Det enklaste sättet att redovisa är att ladda upp det ifyllda kalkylbladet. I det finns alla uppgifter som vi behöver. Mer information om hur kalkylbladet fungerar finns i dokumentet *Att använda kalkylbladet*, som du hittar på ncm.gu.se/kanguru.

Om du *inte* har använt kalkylbladet ber vi dig fylla i motsvarande uppgifter i det formulär som finns på webben. De blanketter som finns här är till för att du ska kunna sammanställa de uppgifter som du sen ska skriva in.

Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031–786 69 85. Redovisa senast den 30 april.

Redovisningsblankett A

Namn och poäng för de två bästa eleverna i varje årskurs:

Åk	Namn	Poäng
kurs 4		
kurs 5		

Om du har fler elever med mycket bra resultat, mer än 77 poäng, kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	kurs 4	kurs 5
77 – 96 poäng		
57 – 76 poäng		
41 – 56 poäng		
25 – 40 poäng		
13 – 24 poäng		
0 – 12 poäng		
Totalt antal deltagare		

Redovisningsblankett B

För fortsatt bearbetning av resultaten är vi intresserade av lösningsfrekvensen per uppgift.

Antal elever med rätt svar på uppgiften

Uppgift	kurs 4	kurs 5
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		