Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Cadet 2020, facit och kommentarer

När du har fyllt i kalkylbladet får du en sammanställning av klassens resultat. Redovisa resultaten genom att ladda upp ditt ifyllda kalkylblad *senast 30 april*. Webbadressen är ncm.gu.se/kanguru. Om du får problem med att redovisa via nätet, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031 – 786 69 85. Om du inte har använt kalkylbladet finns det i detta material underlag för en sammanställning av elevernas resultat.

Uppmärksamma gärna goda prestationer i klassen och i skolan och dela också ut de Kängurureflexer med texten *Jag har deltagit i Kängurun*, som kan köpas från NCM: bestallning.ncm.gu.se/produkt/reflex. Namnen på de elever som fått bäst resultat i varje årskurs kommer att publiceras på webben. Där publiceras också intressanta iakttagelser av elevernas resultat och svar. Många efterfrågar också en sammanställning med lösningsfrekvenser och denna blir förstås bättre ju fler som redovisar.

Låt eleverna få en ny chans att lösa de problem de inte hann med

Endast några enstaka elever hinner lösa alla problem under tävlingstillfället. Ordna därför gärna ett extra tillfälle utom tävlan, där klassen kan lösa problemen utan tidsbegränsning. Många skulle säkert utmanas av de svårare problemen, om de fick tid att arbeta med dem.

Sen kan ni diskutera och kontrollera lösningarna. Låt eleverna berätta om sina lösningar och jämför olika sätt att resonera. Gå noga igenom alla problem och red ut det som kan ha varit svårt. Diskutera ord och begrepp som eleverna funderar över. För att variera problemen kan förutsättningar, t ex de ingående talen, ändras. Försök också att formulera om problemen så att andra svarsalternativ än de rätta ska bli de rätta svaren.

Ytterligare förslag på hur ni kan arbeta vidare med problemen finns samlade i dokumentet *Arbeta vidare med Cadet.*

Nominera till Mikael Passares stipendium

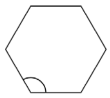
Mikael Passare (1959–2011) var professor i matematik vid Stockholms universitet. Han hade ett stort intresse för matematikundervisning på alla nivåer och var den som tog initiativ till Kängurutävlingen i Sverige. Mikael Passares minnesfond har instiftat ett stipendium för att uppmärksamma elevers matematikprestationer. I samband med Kängurutävlingen kommer därför en elev i tävlingsklasserna Ecolier, Benjamin och Cadet samt en elev från gymnasiet att belönas med 500 kr.

För att kunna nomineras måste eleven ha genomfört tävlingen på korrekt sätt och klassens resultat måste vara inrapporterade. Nomineringen ska innehålla *elevens namn, skola, årskurs, tävlingsklass* och *resultat* på årets tävling, uppgift om vilken dag tävlingen genomfördes och namn, telefonnummer och e-post till den nominerande läraren samt en postadress dit vi kan skicka diplomet. Det ska finnas en *motivering* till varför just denna elev är värd att speciellt uppmärksammas. Det kan t ex vara en *ovanligt god prestation* i tävlingen, *oväntat bra resultat i relation till tidigare prestationer* eller *annat* hos eleven som är värt att speciellt uppmärksammas i relation till arbetet med Kängurun. Förutom detta premieras att eleven är *hjälpsam och visar gott kamratskap*. Det är motiveringen som kommer att ligga till grund för juryns beslut. I juryn ingår representanter från Mikael Passares minnesfond.

På ncm.gu.se/kanguru finns en nomineringsblankett. Fyll i den och skicka nomineringen senast *30 april* till:

Kängurutävlingen
NCM, Göteborgs universitet
Box 160
405 30 GÖTEBORG

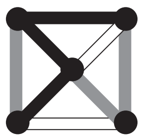
Facit och kommentarer – Cadet 2020

1	A	 (120°)	Vinkelsumman i en polygon med n hörn är $180\cdot(n-2)$. Det betyder att vinklarna i den regelbundna sexhörningen är störst. Vinkelsumman i sexhörningen är $180\cdot 4=720$ och varje vinkel är 120°. Det går även att utnyttja att yttervinkeln i en regelbunden n-hörning är $360°/n$. Ju större n desto mindre yttervinkel och större innervinkel.
2	C	6	Miguel löser $4\cdot 6=24$ uppgifter. Lars behöver sex dagar på sig för att lösa lika många.
3	A	$\frac{8+5}{3}$	
4	E	$\frac{1}{2}$	Den stora kvadraten är uppdelad i åtta figurer, lika många färgade och ofärgade av varje form och storlek. Alltså är hälften av kvadraten färgad. Alternativt används att arean av de två minsta kvadraterna uppe till vänster är lika stor som arean av den ofärgade triangeln uppe till höger.
5	E	8	Varje lag spelar tre matcher, en mot var och en av de andra. Högsta möjliga poäng är 9 med tre vinster ($3+3+3=9$ poäng). Näst högsta poäng är 7, med två segrar och en oavgjord ($3+3+1=7$ poäng). Eftersom värdena är på båda sidor om 8, kan vi vara säkra på att 8 poäng är omöjligt. För att göra lösningen komplett kontrollerar vi att alla de andra alternativen är möjliga: En vinst, en oavgjord och en förlust ger $3+1+0=4$. En vinst och två oavgjorda ger $3+1+1=5$. Två vinster och en förlust ger $3+3+0=6$. Två vinster och en oavgjord ger $3+3+1=7$. Faktiskt är alla poäng från 0 till 9 möjliga, med undantag av 8.
6	B	-120	Välj de tre tal som har högsta absolutvärden så att produkten är negativ. $(-5)\cdot 4\cdot 6=120$.
7	D	5 timmar	Eftersom John behöver en timme om han åker buss båda vägarna så tar varje bussresa en halvtimme, oavsett riktning. Då måste promenaden hem från skolan ta $3-0{,}5=2{,}5$ timmar. Att promenera till och från skolan tar $2\cdot 2{,}5=5$ timmar. *Alternativt:* en bussresa till skolan och hem, samt en promenad till skolan och hem tar sammanlagt sex timmar. Promenad till skolan och hem tar $6-1=5$ timmar.
8	B	43	Summan av alla rader är lika med summan av alla kolumner. Talet som saknas är $24+26+40-27-20=43$.
9	A	1 km	*Lösning 1*: Den första skylten står 2 km från Astad och 4 km från Bstad i motsatt riktning. Bstad ligger alltså 6 km från Astad. Den andra skylten är 7 km från Astad och finns alltså mellan Bstad och Cstad, så Bstad ligger $7-6=1$ km från denna skylt. *Lösning 2*: Avståndet mellan skyltarna är $7-2=5$ km. Eftersom Bstad ligger 4 km från den första skylten, i riktning mot Cstad, är avståndet från den andra skylten $5-4=1$ km i riktning mot Astad. Lägg märke till att informationen på skyltarna om Cstad inte används i lösningarna ovan. I lösningar där den informationen används blir istället skylten om Astad överflödig.

10 C 4 km

Annas mål är att gå $31 \cdot 5$ km $= 155$ km under mars månad. Under de första 16 dagarna har hon gått 95 km, så hon har $155 - 95 = 60$ km kvar. Det är 15 dagar kvar på månaden och Anna måste då gå $60/15 = 4$ km i genomsnitt varje dag.

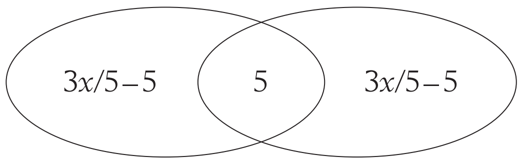
11 B



12 C 25

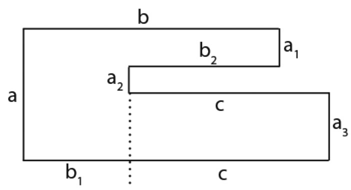
Lösning 1: Eleverna som simmar och eleverna som dansar utgör tillsammans $3/5 + 3/5 = 6/5$ av klassen. Nu är de fem elever som gör båda aktiviteterna räknade två gånger. Det betyder att 1/5 av klassen är fem elever och att klassen har 25 elever.

Lösning 2: Låt x vara antalet elever i klassen. Klassen kan delas in i tre olika grupper, de som simmar men inte dansar, de som dansar men inte simmar och de som gör både och. Om de elever som simmar är 3/5 av klassen måste de som simmar men inte dansar vara $3x/5 - 5$. På samma sätt är de som dansar men inte simmar $3x/5 - 5$. Genom att lägga ihop de olika grupperna får vi hela klassen. Det ger ekvationen: $(3x/5 - 5) + 5 + (3x/5 - 5) = x$, med lösningen $x = 25$.



13 C 24

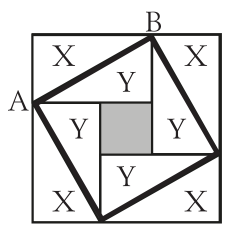
Om sidorna betecknas som i figuren är omkretsen $2 \cdot (a + b + c)$. Av figuren framgår att $a_1 + a_2 + a_3 = a$ och $b_1 + b_2 = b$. Omkretsen är $2 \cdot (3 + 5 + 4) = 2 \cdot 12 = 24$.



Alternativt resonemang: Om Sacha går ett varv medurs runt sin trädgård så går hon 3 m norrut och lika mycket söderut samt 5 m + 4 m österut och lika mycket västerut. Sammanlagt 24 m.

14 A 1 cm²

Arean av den stora kvadraten minus arean av den snedställda kvadraten (med sidan AB) är lika med de fyra trianglarna markerade X. Dessa är lika med de fyra trianglarna märkta Y, som i sin tur är lika med den sneda kvadraten minus den lilla grå kvadraten. Vi har att:
(Stor kvadrat) – (sned kvadrat) = (sned kvadrat) – (grå kvadrat), dvs
$49 - 25 = 25 -$ (minsta kvadraten). Den minsta kvadratens area är 1 cm².



15 D 400 %

Om chefens lön är 100 är Werners lön 20. Chefen tjänar 80 mer än Werner, $80/20 = 4$, vilket motsvarar 400 %.
Generell lösning: Chefen tjänar x kr, Werners lön är $0{,}2 \cdot x$.
$(x - 0{,}2 \cdot x) / 0{,}2 \cdot x = 0{,}8 / 0{,}2 = 4 = 400\,\%$.

16 B 24

Vi undersöker det största möjliga antalet kuber i fyra separata fall, beroende på från vilket håll sidobilden visar bygget.
1. Antag att vi tittar på bygget från söder. I den första kolumnen från vänster finns det träkuber på tre ställen med maximal höjd två kuber. Det finns som flest $3 \cdot 2 = 6$ kuber i den kolumnen. I den andra kolumnen finns det en stack med höjd fyra, totalt $1 \cdot 4 = 4$ kuber. I den tredje finns det totalt $2 \cdot 1 = 2$ kuber. Längst till höger finns tre stackar med maximal höjd tre, totalt $3 \cdot 3 = 9$ kuber som flest. Detta ger sammanlagt det största antalet kuber: $6 + 4 + 2 + 9 = 21$ kuber.
2. Betraktar vi bygget från öster får vi på liknande sätt:
$3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 22$ kuber.
3. Från norr: $3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 24$ kuber.
4. Från väster: $2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 23$ kuber.
Det största antalet kuber som Irene kan ha använt är 24, om bygget ses från norr.

17 A grön

Eftersom det finns en gul kub (G) i ena änden och tre röda (R) i den andra måste raderna med de 12 kuberna antingen se ut som

G * * * * * * * * RRR eller RRR * * * * * * * * G.

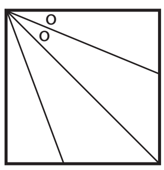
Det första alternativet kan inte stämma eftersom den tionde kuben från vänster är röd men den ska vara blå (B). Så det måste se ut så här

R R R * * * * * * B * G

De fyra gröna kuberna ska ligga intill varandra och kan bara passa någonstans i position 4 till 9 från vänster. De kan vara i positionerna 4, 5, 6, 7 eller 5, 6, 7, 8 eller 6, 7, 8, 9. I alla dessa fall kommer den sjätte positionen från vänster att upptas av en grön kub.

18 A 112,5°

Vikningen ger att de två vinklarna som är markerade o är lika.
Båda är $45° / 2 = 22{,}5°$.



Den sökta vinkeln är yttervinkel till den översta triangeln i bilden och kan bestämmas till $90° + 22{,}5° = 112{,}5°$.

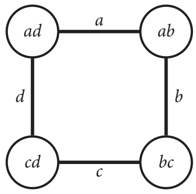
Alternativ lösning: I den näst översta triangeln är två av vinklarna kända. Det ger $180° - 45° - 22{,}5° = 112{,}5°$.

19 D 10

Hälften av det fyrsiffriga talet är delbart med 2, vilket betyder att talet är en multipel av 4. Motsvarande resonemang ger att talet också är en multipel av 9 och av 25. Talen 4, 9 och 25 är relativt prima, dvs de saknar gemensamma delare. Det leder till att det fyrsiffriga talet är delbart med deras produkt $4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$. Fyrsiffriga multiplar av 900 är talen $900 \cdot 2$; $900 \cdot 3$ ... $900 \cdot 11$. Det finns 10 av dem.

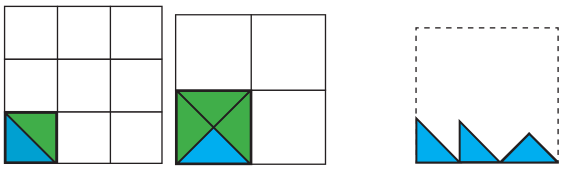
20 C 8

Beteckna talen Sonja skriver vid kvadratens sidor med a, b, c och d. Summan av produkterna är: $ab+bc+cd+da=15$. Ekvationen kan formuleras om med vänster led som en produkt: $(a+c)(b+d)=15$.
Eftersom talen a, b, c och d är positiva heltal har vi att $a+c>1$ och $b+d>1$ och att antingen $a+c=3$ och $b+d=5$ eller tvärtom. I båda fallen är
$a+b+c+d=(a+c)+(b+d)=3+5=8$.



21 C 8

Ett sätt att skapa kvadrater är att sätta ihop två trianglar till en kvadrat. Dessa små kvadrater kan sedan byggas ihop till större kvadrater, $n \times n$-kvadrater (vänster figur). Det går åt $2n^2$ trianglar till en sådan kvadrat och $2n^2 \leq 52$ ger att $n=1, 2, 3, 4$ eller 5.



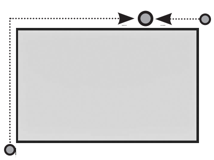
Ett annat sätt att skapa kvadrater är att sätta ihop fyra trianglar till en kvadrat som kan användas för att skapa större kvadrater (högra bilden), $m \times m$-kvadrater. I det här fallet använder vi $4m^2$ trianglar, så $4m^2 \leq 52$, vilket ger att $m=1$, 2 eller 3. Sammantaget ger detta att vi har minst $5+3=8$ kvadrater i olika storlekar som består av de ursprungliga trianglarna.

För en fullständig lösning krävs att vi visar att det inte går att konstruera kvadrater på några andra sätt, utan att det är exakt åtta möjliga kvadrater. Låt oss anta att de små trianglarna har kateter med längden 1. Hypotenusan har då längden $\sqrt{2}$. Vi prövar nu om vi kan bygga kvadrater där sidan består av N trianglar med kateten längs sidan och M med hypotenusan längs sidan. Se figuren längst till höger där $N=2$, $M=1$. En sådan kvadrat har sidlängden $N+M\sqrt{2}$ och arean är $(N+M\sqrt{2})^2=N^2+2M^2+2NM\sqrt{2}$. Kvadratens area måste dock vara ett rationellt tal eftersom de små trianglarna har arean 1/2. Det enda sättet uttrycket $(N^2+2M^2+2NM\sqrt{2})$ kan vara rationellt är om $NM=0$, vilket betyder att antingen $M=0$ eller $N=0$. Av detta följer att basen i de stora kvadraterna endast innehåller trianglar av en typ av orientering. Med andra ord beskriver ovanstående fall alla möjligheter, nämligen antingen ($N=1, 2, 3, 4, 5$ och $M=0$) eller ($N=0$ och $M=1, 2, 3$).

22 D 20 m

Oavsett var tränaren står, så är det totala avståndet som två barn gick från diagonalt motsatta hörn halva poolens omkrets. Figuren visar detta.

Om alla fyra barn går till tränaren kommer de tillsammans att gå ett avstånd lika med poolens omkrets, här $2 \cdot 25 + 2 \cdot 10 = 70$ m. När tre av barnen gick 50 m, kommer avståndet från tränaren till det fjärde att vara $70 - 50 = 20$ m. Tränaren måste gå 20 m.



23 D 165 m

Vi använder det faktum att om två personer rör sig med konstant hastighet, så är förhållandet mellan deras tillryggalagda sträckor samma vid varje tidpunkt (lika med förhållandet mellan deras hastigheter).
Låt oss beteckna avståndet de sprang x meter. När Anne gick i mål hade Boris sprungit $x - 15$ m och Carl $x - 35$ m. När Boris gick i mål hade Carl sprungit $x - 22$ meter. Från ovanstående får vi likheten

$$(x - 15) / (x - 35) = x / (x - 22).$$

Ekvationen har lösningen $x = 165$ m.

Alternativ lösning: Under den tiden då Boris sprang sina sista 15 m, sprang Carl $35 - 22 = 13$ m vilket ger ekvationen $(x - 35) / (x - 15) = 13 / 15$.

24 C 3

Från den sista ledtråden vet vi att siffrorna 2, 4, 6, 7 definitivt inte finns med i talet.
Talet består därför av siffrorna 0, 1, 3, 5, 8, 9 i någon ordning.
Ledtråd ett ger att 1 och 3 definitivt är med (eftersom 2 och 4 är borta).
Ledtråd två ger att exakt en av siffrorna 8 och 9 är med (eftersom 2 och 6 är borta).
När siffrorna 1 och 3 och precis ett av 8 och 9 är med, men ingen av 2, 4, 6 och 7, så ger ledtråd tre att den fjärde siffran måste vara antingen 0 eller 5. Då ger ledtråd tre också att 9 är med och ledtråd två att den har position 1.
Ledtråd tre ger nu att siffran 5 inte kan vara med eftersom den står i första positionen, där vi vet att 9 ska vara. Det betyder att 0 är med och ska stå i position två.
Så här långt har vi fått fram att talet är 9 0 _ _ där de två sista siffrorna är 1 och 3. För att bestämma deras ordning använder vi ledtråd ett som ger att ordningen måste vara 13 och inte 31. Sammanfattningsvis är vårt nummer 9013.
Notera att ledtråd fyra inte behöver användas.

Redovisning av resultat

Redovisning av resultat sker på ncm.gu.se/kanguru. Det enklaste sättet att redovisa är att ladda upp det ifyllda kalkylbladet. I det finns alla uppgifter som vi behöver. Mer information om hur kalkylbladet fungerar finns i dokumentet *Att använda kalkylbladet*, som du hittar på ncm.gu.se/kanguru.

Om du *inte* har använt kalkylbladet ber vi dig fylla i motsvarande uppgifter i det formulär som finns på webben. De blanketter som finns här är till för att du ska kunna sammanställa de uppgifter som du sen ska skriva in.

Om du får problem med att redovisa, hör av dig till oss på kanguru@ncm.gu.se eller på telefon 031–786 69 85. Redovisa senast den 30 april.

Redovisningsblankett A

Namn och poäng för de två bästa eleverna i varje årskurs:

Åk	Namn	Poäng
8		
9		
gy 1		

Om du har fler elever med mycket bra resultat, mer än 77 poäng, kan du redovisa deras namn i ett e-brev till kanguru@ncm.gu.se.

Antal elever med	åk 8	åk 9	gy 1
77 – 96 poäng			
57 – 76 poäng			
41 – 56 poäng			
25 – 40 poäng			
13 – 24 poäng			
0 – 12 poäng			
Totalt antal deltagare			

Redovisningsblankett B

För fortsatt bearbetning av resultaten är vi intresserade av lösningsfrekvensen per uppgift.

Antal elever med rätt svar på uppgiften

Uppgift	åk 8	åk 9	Gy kurs 1
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			