Kängurutävlingen – Matematikens hopp 2020

Arbeta vidare med Cadet

Matematiskt arbete handlar i stor utsträckning om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder.

Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraters lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras. Många elever kanske också klarar sig utan de olika svarsalternativen.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
- Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att man noggrant går igenom lösningsstrategier och repeterar eller tar upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor. I efterarbetet kan det även vara lämpligt att hämta in snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru.

Nedan har vi samlat några av problemen från Cadet 2020. Vi ger förslag på hur eleverna kan arbeta med uppgifterna efter tävlingen och, i vissa fall, tar vi upp specifika svårigheter. Vi ger även exempel på hur frågeställningarna och förutsättningarna i uppgifterna kan varieras.

Tal

5

Fyra fotbollslag spelar en turnering. Alla lag spelar mot varandra exakt en gång. För varje match gäller att det vinnande laget får tre poäng och förlorarna noll poäng. Blir det oavgjort får lagen en poäng vardera. Vilken av de följande sammanlagda poängen kan ett lag inte ha, efter att alla matcher har spelats?

Uppgiften kan varieras på flera sätt, t ex genom att öka antalet lag i turneringen eller att låta lagen möta varandra två gånger istället för en. Kan eleverna hitta något mönster i lösningarna till olika varianter på uppgiften?

6

Klara vill multiplicera tre olika tal i följande lista: -5, -3, -1, 2, 4 och 6. Vilken är den minsta produkten hon kan få?

Uppgiften kan varieras på flera olika sätt, t ex genom att ändra talen i listan eller frågeställningen.

- Vilken är den största produkten man kan få?
- Vad händer om man istället multiplicerar fyra tal? … eller fem tal?

12

Alla elever i en klass simmar eller dansar på sin fritid. Tre femtedelar av klassen simmar och tre femtedelar av klassen dansar. Fem elever både simmar och dansar. Hur många elever är det i klassen?

Uppgiften kan varieras på flera olika sätt, t ex genom att ändra andelen elever som simmar och/eller dansar. Hur blir det om en del av eleverna i uppgiften även spelar fotboll?

15

Werners lön är 20 % av hans chefs lön. Hur många procent mer tjänar chefen än Werner?

Alla elever har inte klart för sig betydelsen av att klargöra vad som är delen respektive helheten när man beräknar en andel och anger den med procent. Ofta kan en illustration hjälpa till att strukturera upp situationen. Låt eleverna jämföra frågorna:

- Hur många procent mer tjänar chefen än Werner?
- Hur procent av Werners lön är chefens lön?

Jämför med följande uppgifter:

- Priset på kaffe ökar först med 30 % för att sedan sänkas med 30 %. Jämför det slutliga priset med det ursprungliga.
- Priset på kaffe höjs med 30 %. Med hur många procent måste det sedan sänkas för att det ska återgå till det ursprungliga priset?

19

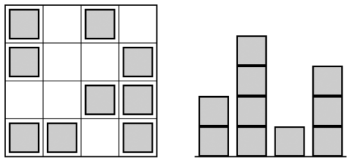
Hur många fyrsiffriga tal finns det där hälften av talet är delbart med 2, en tredjedel av talet är delbart med 3 och en femtedel av talet är delbart med 5?

Låt eleverna undersöka vad det innebär att hälften av ett tal är delbart med 2.
Vad har det för betydelse att de tre talen, 2, 3 och 5, i uppgiften är primtal? Jämför t ex med om talen hade varit 2, 3 och 4 eller 2, 3 och 6?

Rumsuppfattning

16

Irene byggde med identiska träkuber. Den vänstra bilden visar bygget uppifrån. Den högra bilden visar hur det ser ut från sidan, men man vet inte från vilken sida. Vilket är det största antalet kuber som Irene kan ha använt?

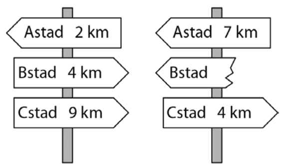


Låt eleverna bygga figurer med klossar eller annat material för att sedan betrakta bygget från olika håll. Låt eleverna skapa egna liknande problem, byta och lösa varandras.
Vilka olika frågor kan man ställa utifrån elevernas konstruktioner och bilder? Vad krävs för att en konstruktion ska kunna bestämmas i alla delar utifrån två bilder? Måste man få se en konstruktion från alla håll för att den ska kunna bestämmas exakt?

Längd och avstånd

9

Den kortaste vägen från Astad till Cstad går igenom Bstad. Längs vägen finns de två avståndsskyltarna. Vilket avstånd ska det stå på den trasiga skylten?



Låt eleverna illustrera situationen genom att konstruera en sträcka med Astad i ena änden och Cstad i den andra. Prova olika placeringar av de två skyltarna och Bstad.

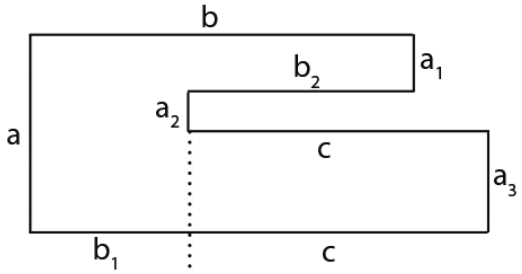
- Kan man direkt veta hur långt det är mellan Astad och Cstad?
- Vad händer om uppgiften om Astad saknas på en av skyltarna? Går det ändå att lösa problemet? Hur mycket information kan tas bort från de två skyltarna utan att problemet blir olösligt?
- Hur exakt går det att bestämma avståndet på den trasiga skylten? Avstånden som anges är avrundade till hela antal kilometer.

Låt eleverna konstruera egna liknande problem och byta med varandra. Innan de byter med varandra ska de inte bara formulera sitt problem utan också själva skriva ner sin egen lösning.

13

Sachas trädgård ser ut som på bilden. Alla sidor är antingen parallella eller vinkelräta mot varandra. Några av sidornas längder anges i bilden. Hur lång är trädgårdens omkrets?

Låt eleverna se följande figur och fundera på relationerna mellan sidorna, t ex
mellan de vertikala sidorna, a, a_1, a_2 och a_3, och
mellan de horisontella sidorna b, c, b_1 och b_2.



Kan de resonera sig fram till att t ex $a = a_1 + a_2 + a_3$ och att $b = b_1 + b_2$? Kan de utnyttja detta för att teckna ett uttryck för omkretsen?

Alternativt: Låt eleverna tänka sig att de går ett helt varv runt trädgården och notera hur långt de rör sig i respektive väderstreck, alltså sortera upp sträckorna efter om de rör sig norrut, österut, söderut eller västerut. Vilket samband finns det mellan hur långt de går åt norr och söder, respektive åt öster och väster?

22

Fyra barn är i varsitt hörn av en simbassäng med måtten 10 m x 25 m. Deras tränare står vid någon av bassängens sidor. När tränaren ropar på barnen klättrar tre av dem upp ur bassängen och går den kortaste vägen runt bassängkanten bort till tränaren. Tillsammans går de tre barnen 50 m. Vilken är den kortaste sträcka som tränaren måste gå för att komma till det fjärde barnet?

Situationen kan undersökas t ex med hjälp ett A4-apper och några markörer. Fyra markörer placeras i papprets hörn och tränare-markören kan sedan placeras på olika ställen. Elever som behöver lite hjälp att komma igång kan få frågor som t ex

- Hur blir det om tränaren står i ett hörn, någonstans vid en långsida eller kortsida?

Alternativa frågeställningar:

- Om alla fyra barnen går den kortaste vägen till tränaren – var ska tränare stå för att deras sammanlagda avstånd ska bli så stort eller så litet som möjligt?

Kanske upptäcker eleverna att tränarens placering inte har någon betydelse, ökas avståndet till några barn, minskas det lika mycket för de andra.

- Hur långt kommer de fyra barnen att gå sammantaget?

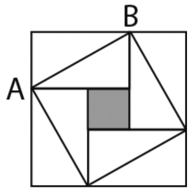
Uppgiften kan varieras genom att bassängens form ändras.

- Hur blir det om bassängen har formen av en liksidig eller likbent triangel?

Area

14

En kvadrat består av fyra likadana rektanglar och en liten kvadrat i mitten. Den stora kvadratens area är 49 cm^2 och längden av diagonalen AB i en rektangel är 5 cm. Hur stor area har den lilla kvadraten?



Uppgifter av det här slaget ger möjlighet att diskutera bildens roll vid geometrisk problemlösning. Bilder är i allmänhet att betrakta som skisser och är inte nödvändigtvis korrekta i alla avseenden – det går t ex inte att lösa problemet genom att mäta i figuren. När lösningen har diskuterats kan eleverna få i uppgift att konstruera en korrekt figur.

Lösningen kräver att eleverna kan hantera areor som inledningsvis inte är kända och att de kan identifiera kongruenta figurer. I en lösning utnyttjas att två differenser mellan areor är lika, en strategi som används för att formulera ekvationer.

Vinklar

1

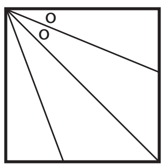
Nedan visas fem regelbundna polygoner. Vilken av de markerade vinklarna är störst?

Låt eleverna undersöka vinkelsumman i (regelbundna) polygoner. Kan de hitta ett generellt uttryck för vinkelsumman?
Ta upp begreppet yttervinkel och undersök hur det kan användas i undersökningen.

18

Zaida tog ett kvadratiskt pappersark och vek två av sidorna mot diagonalen, enligt bilden till vänster. Hon fick då fyrhörningen som visas i den högra bilden. Hur stor är den största vinkeln i fyrhörningen?

Låt eleverna vika ett kvadratiskt papper, först så de får diagonalen och sedan enligt uppgiften. När de viker upp pappret framträder linjerna i figuren.



Den sökta vinkeln kan bestämmas på flera olika sätt. Hur många kan dina elever komma på?
Frågeställningen kan ändras: Hur stor är arean av den uppkomna figuren? (se Student nr 23).