Student – Facit och kommentarer

Trepoängsproblem

1 **E: 5 och 6** Totalsumman av talen i de fyra rutorna är 10. En av delsummorna (en rad- eller kolumnsumma) är 4, så det måste finnas en delsumma som är 6 (10 – 4 = 6). En delsumma är 5, så det måste finnas en till som är 5.

Det kan t ex se ut så här:

1	3
4	2

2 **D:**  Bilden D visar trianglarna länkade på samma sätt som i bilden överst. Skillnaden är bara att den grå och den svarta triangeln är vridna cirka 30° moturs. Den vita triangeln ska vara länkad med båda de andra trianglarna. Då utesluts alternativ B och C. Den svarta och den grå triangeln är fria från varandra. Då utesluts alternativ A och E.

3 **C: 46** Basen måste vara 23-kantig (en pyramid med triangulär bas har bara 4 sidor). Pyramiden har dessutom 23 kanter som går från toppen till basens hörn.

4 **B: 1, 5 och 7** Summan av de två talen med övertäckta siffror är 11126 – 7243 = 3883. Låt *A*, *B* och C vara de övertäckta siffrorna. Då är 21A7 + BC26 = 3883. Entalet i summan är 3 men entalstermerna ger 13, dvs vi måste hantera det extra tiotalet, 1 + A + 2 = 8, A=5. 2157 + BC26 = 3883, BC26 = 1726, B = 1 och C = 7.
De tre talen är 7243 + 2157 + 1726 och de övertäckta siffrorna är 1, 5 och 7.

5 **B: 3** Från andra siffran och vidare behövs så många nior som möjligt för att få längden av talet så liten som möjligt. 2019 = 224 · 9 + 3. Första siffran i talet är 3 och sedan följs den siffran av 224 st 9:or.

6 **C:**  Utifrån de givna sannolikheterna borde tärningen bestå av tre 1:or, två 2:or och en 3:a. Det betyder att alternativ C skulle vara tärningen som inte kan vara en sådan tärning då den består av minst två 3:or. Alla de andra tärningarna skulle kunna uppfylla kraven.

7 **D: a = 0** $(a \Delta b) \Delta c = a \Delta (b \Delta c)$ betyder enligt definitionen $c - (b - a) = (c - b) - a$ vilket är ekvivalent med a = 0. Villkoret att a = 0 implicerar däremot inte något av de övriga svarsalternativen.

8 **D: 8** För att talet ska vara delbart med 2^{10} måste det vara en multipel av 2^{10}.
I intervallet finns då talen
$1 \cdot 2^{10}, 2 \cdot 2^{10}, 3 \cdot 2^{10}, 4 \cdot 2^{10}, 5 \cdot 2^{10}, 6 \cdot 2^{10}, 7 \cdot 2^{10}, 8 \cdot 2^{10} = 2^3 \cdot 2^{10} = 2^{13}$.

Fyrapoängsproblem

9 D: 3^6

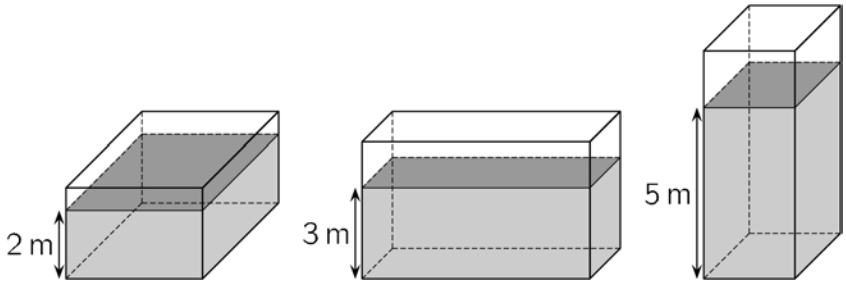
Metod 1: Uttrycket 7! + 8! + 9! kan faktoriseras enligt 7!(1 + 8 + 8 · 9) = $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 81 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3^4 = 1 \cdot 2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3^6$.
Metod 2: Två bland talen 1 till 7 är delbara med 3 och inget av dem är delbart med en högre potens av 3. Alltså 3^2 är den högsta potensen av 3 som delar 7!. Talet 7! + 8! + 9! =7! · (1 + 8 + 8 · 9) = $7! \cdot 9^2 = 7! \cdot 3^4$ har 3^6 som högsta potens av 3 bland sina delare.

10 B: 26

Anta att antalet flickor minskade med *f*. Det var 1/5 av antalet flickor förra året och är 1/4 av antalet flickor nu. I så fall ökade antalet pojkar med *f* + 1 vilket var 1/5 av antalet pojkar förra året och är 1/6 av antalet pojkar nu. Antalet elever nu är $4f + 6(f + 1) = 10f + 6$, ett tal med entalssiffran 6.

11 E: 240 m^3

Anta att behållarens mått är *a*, *b* och *c* meter. Då är behållarens volym *abc*. Beroende på vilken av sidoytorna behållaren står på kan vi ställa upp följande ekvationssystem för vattnets volym:



$$\begin{cases} a \cdot b \cdot 2 = 120 \\ b \cdot c \cdot 3 = 120 \\ a \cdot c \cdot 5 = 120 \end{cases}$$

Förenkling ger

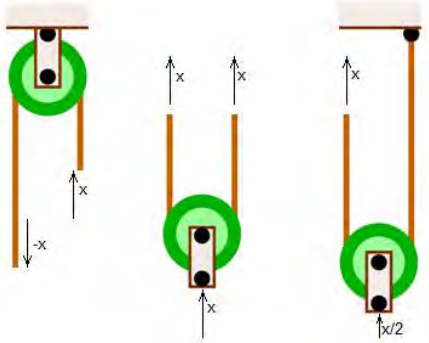
$$\begin{cases} a \cdot b = 60 \\ b \cdot c = 40 \\ a \cdot c = 24 \end{cases}$$

Ledvis multiplikation ger $(abc)^2 = 60 \cdot 40 \cdot 24 =$
$60 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 4 = (4 \cdot 6 \cdot 10)^2 = 240^2$
Alltså är behållarens volym 240 m^3.

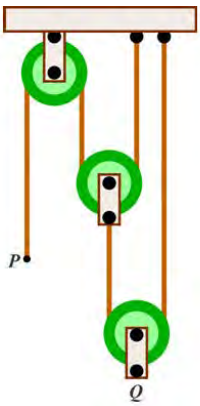
12 E: endast Bob

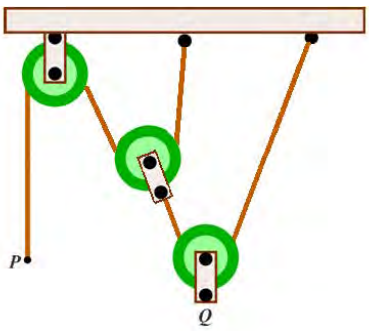
Eftersom Carl går utan hatt, så är det säkert att Bob har hatten på, för annars skulle Carl ha en. Vi kan däremot inte veta om Alex har hatten på, eftersom så snart Bob har hatten på men inte Carl, så är alla villkor uppfyllda oavsett om Alex har sin hatt på huvudet eller inte.

13 D: 6 Linornas längder är konstanta. Av detta följer att:



1. Om en trissa är fast förankrad och en lina går runt trissan så att båda linändorna hänger ner från den och vi drar ner en linända (-*x*), så dras den andra linändan upp lika mycket (*x*).
2. Om en trissa hänger på en lina och vi lyfter upp båda linändor lika mycket (*x*), så lyfts även trissan upp lika mycket.
3. Om en trissa hänger på en lina med en ända fast förankrad och vi drar upp den andra linändan (*x*), så lyfts trissan bara upp hälften så mycket (*x*/2).



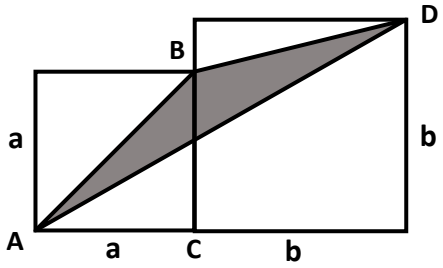


I systemet på bilden till vänster drar vi ner linan med ändpunkten *P* 24 cm, lindelen till höger om den vänstra trissan dras upp lika mycket dvs 24 cm, den mittersta trissan och linändan under den lyfts hälften så mycket dvs 12 cm och den högra trissan med punkten *Q* lyfts igen hälften så mycket dvs 6 cm. Observera att resonemanget bara gäller linor som går parallellt, ett system som på bilden till höger skulle kräva mera indata och mycket mera komplicerade beräkningar.

14 A: 2/5 Det finns fem askar, fyra med choklad (C) och en med tuggummi (T). Det finns fem möjliga ordningar att dra askarna ur säcken, nämligen: TCCCC, CTCCC, CCTCC, CCCTC, CCCCT. Eftersom Mary är den andra att dra vinner hon om och endast om tuggummiasken hamnar i position 2 eller 4. Mary vinner i två fall av fem. Sannolikheten är 2/5.

15 B: $\frac{1}{2}a^2$ De två kvadraterna har den sammanlagda arean $a^2 + b^2$. Arean av den skuggade triangeln är den sammanlagda arean subtraherad med areorna av de tre icke skuggade trianglarna:

$$a^2 + b^2 - \left(\frac{a \cdot a}{2} + \frac{b(b+a)}{2} + \frac{b(b-a)}{2}\right) = a^2 + b^2 - \frac{a^2 + 2b^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$



16 A: 4 Vi ökar den sista termen något, från 20 till 25. Det ger följande:

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}}}$$

$$< \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{25}}}}} = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{25}}}} =$$

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{25}}} = \sqrt{20 + \sqrt{25}} = \sqrt{25} = 5$$

Uttrycket är mindre än 5 så heltalsdelen är 4.

Fempoängsproblem

17 B: $(a + 1)^5 = b$ Positiva delare till 1024 är 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}

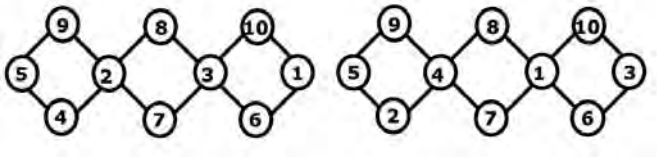
$a = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10} = 2^{11} - 1$

$b = 1 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{11} = 2^{55} = (2^{11})^5 = (a + 1)^5$

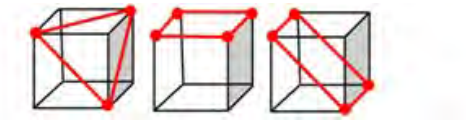
18 E: 5 Vi kan formulera följande två ekvationer $a + \frac{b}{c} = 11$ och $b + \frac{a}{c} = 14$, a, b, c positiva heltal. Subtraktion av ekvationerna och samlande av termer ger $(b - a)(c - 1) = 3c$. Eftersom faktorerna är heltal och SGD($c - 1$, c) = 1, så $c - 1$ delar 3, alltså är $c = 4$ eller $c = 2$. Löser vi de ursprungliga ekvationer så ger $c = 4$ att $a = 8$ och $b = 12$ vilka uppfyller villkoren, $c = 2$ ger $a = 16/3$ och $b = 34/3$ vilka förkastas. Alltså är $(a + b)/c = 5$.

19 C: 20

Låt *S* vara summan av de fyra talen i varje kvadrat. Addera samtliga tal, talen i ”korsningarna”, kalla dem *a* och *b,* kommer att räknas två gånger,
$3 \cdot S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + a + b = 55 + a + b > 57$ alltså $S > 19$.
Vi söker det minsta möjliga *S* så vi testar för $S = 20$ (som gäller när $a + b = 5$ dvs när *a* och *b* är 1 och 4 eller 2 och 3). Bilden visar att det är möjligt.



20 E: 20



Ett plan kan gå genom tre eller fler hörn av en kub på tre sätt:

1. Genom tre hörn som är grannar (är förbundna med en kant) med ett gemensamt hörn som i figuren till vänster. Det finns åtta sådana plan för varje kub.
2. Genom en av kubens sidor som i figuren i mitten. Det finns sex sådana plan för varje kub.
3. Genom två av kubens motsatta kanter som i figuren till höger. Det finns sex sådana plan för varje kub.

Det finns inga fler sådana plan.
Om ett plan går genom två hörn på en kant och genom ett tredje hörn (då går den också genom ett fjärde), då går den som i fall 2 eller 3. Om den går genom två hörn på en diagonal av en sida och ytterligare något hörn, så måste den gå som i fall 1, 2 eller 3. Går den varken genom en kant eller genom en diagonal så kan den gå genom högst två hörn, ett par motsatta hörn och inga fler.

21 A: endast 16

En rät linje skär en parabel i högst två punkter. Alltså måste var och en av dessa fyra linjer göra det, dvs ingen av linjerna får vara vertikal och dessutom får inte två av dem ha en gemensam skärningspunkt med parabeln. Eftersom alla dessa linjer går genom origo så är det andra villkoret ekvivalent med att linjerna är olika.
En rät linje genom origo kan beskrivas med funktionen $y = kx$.
Skärningspunkternas *x*-koordinater kan bestämmas med ekvationen

$$x^2 - 2 = kx, x^2 - kx - 2 = 0, x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 8}}{2}.$$

Då är produkten av *x*-koordinaterna för en linjes skärningspunkter

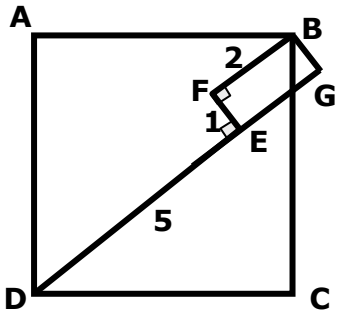
$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{k + \sqrt{k^2 + 8}}{2}\right) \cdot \left(\frac{k - \sqrt{k^2 + 8}}{2}\right) = \frac{k^2 - k^2 - 8}{4} = -2 \text{ dvs oberoende av } k.$$

Multiplicerar vi *x*-koordinaterna för samtliga fyra linjer får vi $(-2)^4 = 16$.

22 D: 4

$|n^2 - 2n - 3| = |(n-3)| \cdot |(n+1)|$. En av faktorerna i högerledet måste vara 1 om produkten ska vara ett primtal. Alltså n = 4, 2, 0 eller -2. För dessa n blir $|n^2 - 2n - 3|$: 5, 3, 3 eller 5, samtliga primtal (bara två olika primtal men fyra olika n).

23 E: inget av de förra alternativen



Dra BG vinkelrät från B mot förlängningen av DE. Det ger $EG = FB = 2$ och $BG = FE = 1$, så den rätvinkliga triangeln DBG har hypotenusan $\sqrt{|DG|^2 + |GB|^2} = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$. Men DB är kvadratens diagonal, så kvadratens sida har längden $\frac{DB}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{25} = 5$

24 B: 1/6

Vi vill välja olika tal a, b och c. Vi kan låta $a < b < c$ från {1, 2, … , 10} så att $b = (a + c)/2$ också är ett tal i mängden. Vi kan välja ut de tre talen på $\binom{10}{3}$ sätt.

Det är viktigt att notera för det första att medelvärdet $(a + c)/2$ tillhör mängden (vilken bara består av heltal) om och endast om a och c är antingen båda udda eller båda jämna tal, för det andra att medelvärdet $(a + c)/2$ är entydigt bestämt av a och c. Problemet reduceras till att bestämma sannolikheten att från mängden {1, 2, …, 10} välja två olika tal som antingen båda är udda eller båda är jämna. Eftersom det finns fem udda och fem jämna tal så är sannolikheten att

välja två udda tal $\frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$ och att välja två jämna tal är också $\frac{1}{12}$.

Den efterfrågade sannolikheten är 1/12 + 1/12 = 1/6.