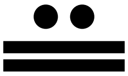
Facit och kommentarer – Ecolier 2019

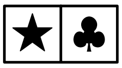
1 E

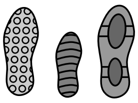
2 C  5+5+1+1

3 A tisdag Om det var söndag igår är det måndag idag.

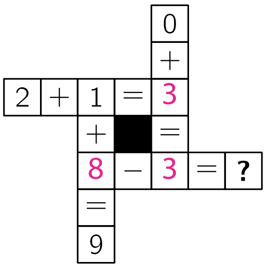
4 D 

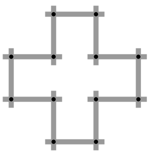
Det kvadratiska hålet kommer att hamna tre rutor från mittvikningen och då syns motorcykeln.
Det rektangulära hålet hamnar två rutor till höger om det kvadratiska. Området mellan hålen kommer att täcka lastbilen.

5 A  Biten finns mitt i den övre raden på arket.

6 A  De först gjorda fotspåren är delvis förstörda av de två senare. De senaste syns helt. Mitt i bilden syns avtrycken från alla skor.
Avtrycket från den minsta skon gjordes efter skon med cirklar på sulan.
Avtrycket från skon med de två större ovalerna gjordes efter det från den minsta skon.

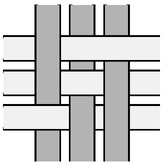
7 B 5 8 – 3 = 5



8 D  Pia har satt ihop 10 stickor. Figur D kräver 12 stickor.

9 D 8 Om farfar hade plockat 2 svampar färre än han gjorde, dvs lika många som Kotte, så skulle de ha plockat 18 – 2 = 16 svampar tillsammans.
16/2 = 8, så Kotte har plockat 8 svampar och farfar 8 + 2 = 10

10 C 3 Dennis kan få de tre första figurerna i raden, men inte de två figurerna längst till höger, kvadraten och den fyra rutor långa rektangeln.
Varje figur för sig är lätt att undersöka men för att veta att svaret är exakt tre måste man undersöka alla fem figurerna.

11 C

Band som från ena sidan sett ligger över kommer på andra sidan att ligga under. Det band som vi inifrån ser längst till vänster kommer om vi tittar från andra sidan att vara längst till höger.

12 D 11 kg
En hund väger mindre än 12 kg. Eftersom två hundar väger mer än 20 kg, måste en hund väga mer än 10 kg.

13 A Antingen 0 eller 1.
Största möjliga summa är 921, som han kan få som $920 + 1$ eller $921 + 0$.

14 D 250 g
Eftersom ett tomt glas väger 100 g måste vattnet i ett fullt glas väga 300 g, $400\,g - 100\,g$.
Vattnet i ett halvfullt glas väger då 150 g, och ett halvfullt glas med vatten väger $100 + 150 = 250$ g.

15 D 11 kr
Om vi lägger ihop alla får vi att två äpplen, två päron och två bananer kostar $5\,kr + 7\,kr + 10\,kr = 22$ kr.
Ett äpple, ett päron och en banan kostar alltså 11 kr.
Det går också att jämföra och resonera:
Av de två första bilderna kan vi dra slutsatsen att en banan kostar 2 kr mer än ett päron. Den tredje bilden ger då att en banan kostar 6 kr och ett päron kostar 4 kr. Ett äpple kostar alltså 1 kr. $6\,kr + 4\,kr + 1\,kr = 11$ kr.

16 C 19
Den stora kuben kommer att bestå av 27 små kuber, $3 \cdot 3 \cdot 3$.
Han har använt 8 små kuber, så $27 - 8 = 19$ till behövs.

17 E 6
Av mittenraden kan vi sluta oss till att cirkeln $= 4$.
Av första raden att stjärna + hjärta är $15 - 4 = 11$.
Tredje raden ger då att hjärta är $16 - 11 = 5$.
Stjärnan är därmed $16 - 10 = 6$.

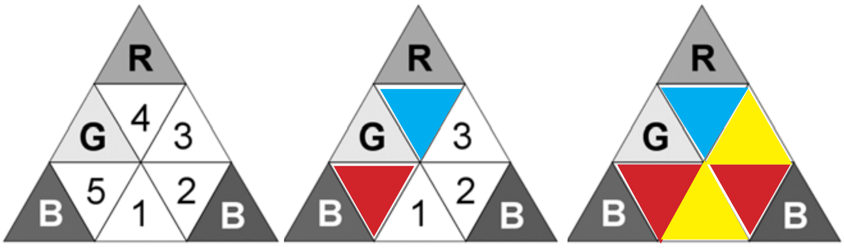
18 C 44
Till ramen behövs små kvadrater längs de fyra sidorna plus 4 hörnbitar.
Till bilden med sidlängden 7 behövdes $4 \cdot 7 + 4 = 32$ kvadrater.
Till en bild med sidlängden 10 behövs alltså $4 \cdot 10 + 4 = 44$ kvadrater.

19 B 10
15 blå kulor kan bytas mot 5 röda. Fyra av dessa kan bytas mot 10 gröna.
Då blir det 1 blå och 1 röd kula över.
Ett annat sätt att resonera:
6 blå kulor ger 5 gröna kulor, så 12 blå kulor kommer att ge 10 gröna kulor.
Det blir då 4 blå kulor över men de räcker inte till fler byten.

20 E 83 m
Bredden på den vertikala delen är $40\,m - 36\,m = 4$m.
De tre prickade sträckorna är:
Övre horisontella: $28\,m - 2\,m = 26$ m.
Nedre horisontella: $40\,m - 2\,m = 38$ m.
Vertikala: $20\,m - 4\,m + 3\,m = 19$ m.
Sammanlagd sträcka: $26\,m + 38\,m + 29\,m = 83$ m.

21 B 3 Det finns 15 djur och 10 av dem är inte kor, alltså finns det 5 kor.
Eftersom 8 djur inte är katter måste $15-8=7$ vara katter.
Resten, dvs $15-5-7=3$, är kaniner.

22 E 1 och 3 är gula.
Triangel 4 måste vara blå och triangel 5 måste vara röd.
Alla blå trianglar är nu utlagda.
Triangel 1 kan därför inte vara blå, utan måste vara gul.
Då är 2 röd och 3 gul. Alltså 1 och 3 är gula.



23 B Bartek Någon av Bartek och Erkki ljuger, eftersom det bara är en som har tagit glassen.
Om Bartek ljuger talar Erkki sanning, ”Ali har tagit glassen”.
Men det skulle innebära att även Ali ljuger.
Alltså talar Bartek sanning, det är han som har tagit glassen.
Det stämmer också med de andra barnens utsagor.

24 D 22 Om alla handdukar hade hängt som i bild 2 hade Emil behövt $35+1=36$ klädnypor.
Eftersom han använde 58 gick det åt ytterligare 22 klädnypor, som han använde för att hänga handdukar som i bild 1.
Vi har redan räknat med 1 klädnypa per handduk så de 22 klädnyporna räcker till 22 handdukar upphängda med två klädnypor.
Emil hängde alltså 22 handdukar med två klädnypor och $35-22=13$ handdukar med en klädnypa, plus en extra.
$22 \cdot 2$ plus $13 \cdot 1+1$ ger korrekt antal $44+14=58$.
Illustrera gärna lösningen konkret.

Arbeta vidare med Ecolier 2019

Låt alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen. I samband med genomgång passar det sen bra att låta eleverna lösa problemen i par eller i grupp. Uppmuntra dem att hitta så många olika lösningssätt som möjligt.

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar:

– Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar?
– Är lösningarna tydliga?
– Är resonemanget korrekt?
– Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem?

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem, arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning.

Alla problem kan naturligtvis diskuteras utifrån valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra dessa och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika uttrycksformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur den konkreta representationen uttrycks i ord och med symboler. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
– Påminner problemet om något annat problem, som vi har löst tidigare?
– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
– Vilka nya frågor kan problemet väcka?
– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. Låt eleverna göra förändringar i uppgiften så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt. De felaktiga svarsalternativen kan också användas som utgångspunkt för diskussion om vad som skulle kunna leda fram till dessa svar: ”Hur tror ni att den som har fått alternativ *a* som svar har tänkt?” Elever behöver få diskutera både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem därför få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. I arbetet med alla problem bör förmågorna att *resonera och argumentera* vara centrala.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal termer att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva få definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Här har vi sorterat förslag inom områdena *Tal och aritmetik*, *Centrala geometriska begrepp*, *Problem där bilden innehåller viktig information och resonemang*, *Flerstegsproblem som kräver resonemang och beräkningar* samt *Problem där det logiska resonemanget är avgörande*. Naturligtvis kan flera av problemen också passa under andra rubriker. Vi hänvisar som tidigare till några tidigare problem, som har anknytning till problemet eller till de förslag för vidare arbete som behandlas. Problem som är hämtade från *Milou* (M) är ofta lite enklare medan de från *Benjamin* (B) kan ge möjlighet till större utmaningar. Till dessa tidigare använda problem finns också kommentarer och förslag till hur man kan arbeta, i respektive års dokument ”Arbeta vidare”. Några av de tidigare problemen som vi refererar till finns också samlade i dokumentet *Arbeta vidare med tidigare problem – Ecolier*, som kommer att finnas på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru, där också alla tidigare omgångar är samlade. Problem inom området geometri finns dessutom samlade i boken *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*.

Ett problem om tid

Huruvida kalender och tideräkning ska räknas som matematik diskuteras ibland. Det finns hur som helst möjlighet att använda matematik i sådana sammanhang och varje år finns det kalenderproblem i Kängurutävlingen, både för yngre och äldre elever.

3 Veckodagar

Se till så att alla har de grundläggande kunskaperna om hur vi delar in ett år men ställ också en del utmanande frågor.

- Hur många dagar är det i en vecka, två veckor, tre veckor …?
- Hur många dagar i en månad? På ett år? Ett skottår?
- Ungefär hur många dagar har en tioåring levt?
- Undersök en almanacka och se på mönstret i veckodagar och datum.
- Om vi vet att första april är en tisdag, vilket datum är det då nästa tisdag?

Tidigare problem: E 2004:14, E 2013:12, E 2018:14, B 2007:7 och B 2018:6.

Problem med tal och enkel aritmetik

Med utgångspunkt i problem kan vi diskutera egenskaper hos tal. Några grundläggande aspekter som passar särskilt bra för elever i denna ålder är positionssystemet, udda och jämna tal, tals uppdelning, räknesättens innebörd och enkel faktorisering. Problemen utmanar också elevernas strategiska tänkande och förhoppningsvis väcker de frågor om tal. Uppmuntra dem därför att ställa fördjupande frågor. Hjälp dem också att se samband både inom matematiken och mellan matematiken och omvärlden.

2 Talskrivning

- Vilka är talen i de andra alternativen i uppgiften?

Berätta om andra sätt att skriva tal, t ex med romerska siffror.

- Låt eleverna skriva och tolka olika tal skrivna med romerska siffror.

Diskutera betydelsen av positionssystemet, som hjälper oss att skriva hur stora tal som helst med hjälp av bara 10 siffror. Diskutera vilken betydelse nollan har – vad talar en nolla i ett tal om?

- Vilket är det största tal ni kan skriva med hjälp av de 10 siffrorna, om varje siffra bara får användas en gång? Låt eleverna argumentera för sina förslag.
- Vilket är det minsta?

Tala om att vi vanligen inte skriver ut nollor om de står först i ett tal, annat än när talet är skrivet i decimalform och det är 0 hela, ex 0,45.

- Vilket tal kommer efter 99, efter 999, efter 9999 etc?
  Se på mönstret och låt eleverna förklara vad som händer när vi lägger på 1 på 9999.
- Vilket tal kommer före 100, 1000, 10 000 etc?

Elever i den här åldern är säkra på tiotalsövergångarna, men när det handlar om större tal kan det fortfarande vara svårt med övergångarna.

- Skapa det största och det minsta talet med hjälp av ett antal givna siffror, t ex 5, 6, 7, 8.
- Spela spel som tränar känslan för positionssystemet, ex *Tänk till tusen* som finns på Strävorna 1A ncm.gu.se/stravorna. Där finns också andra aktiviteter som handlar om positionssystemet.

Tidigare problem: E 2002:9, E 2018:21 och B 2001:8.

13 Använd 2, 0, 1 och 9

Detta problem handlar också om positionssystemet. Diskutera gemensamt hur eleverna har resonerat.

– Varför spelar det ingen roll om vi adderar 1 eller 0?
– Varför är de andra siffrorna viktiga?

Använd begreppen ental, tiotal och hundratal i diskussionen om uppgiften.

Tidigare problem: E 2006:14, E 2012:13, E 2014:1 och 13 samt B 2014:2.

7 Räknerutan

Denna uppgift handlar om likheter. 1 + ? = 9. När de ingående talen är låga, som i problemet, är det oftast inte svårt och de flesta klarar denna uppgift med hjälp av sina automatiserade talkunskaper, de vet att 1 + 8 = 9. Använd därför större tal, sådana som kräver eftertanke för att komma åt vilken strategi som kan användas:

– 236 + ? = 792 m fl (eller svårare tal om eleverna lätt räknar detta i huvudet med ”uppåträkning”)

Med hjälp av subtraktion hittar vi enkelt det saknade talet. Varför? Hur hänger subtraktion och addition ihop? Illustrera med bilder och konkret. Om vi vet att 236 + 556 = 792 vet vi också att 556 + 236 = 792, 792 – 556 = 236, 792 – 236 = 556.

– Gör fler exempel som visar sambandet mellan addition och subtraktion. Låt eleverna muntligt få förklara detta samband
– Gör motsvarande med multiplikation och division: $3 \cdot ? = 21$

För att kunna laborera med större tal kan ni utgå från exempelvis $13 \cdot 17 = 221$.

– Vad är då 221/13 etc.

Genom att använda tal som ligger utanför ”huvudräkningsområdet” blir strukturen tydligare, själva beräkningen hamnar i bakgrunden.

Pröva gärna att uttrycka sambanden med bokstäver också:

– $a + b = c$, vad är då $b + a$? $c - a$? $c - b$?

Tidigare problem: M 2017:12 och E 2016:2.

9 Kotte och farfar plockar svamp

Gå igenom texten tillsammans, många elever har nog svårt att föreställa sig situationen. Att farfar har två fler än ett okänt antal kan vara svårt att hantera. Diskutera gemensamt vad det innebär och visa med föremål eller bild (där den okända delen är dold).

– Låt eleverna berätta hur de resonerar och hjälp dem att visa det på olika sätt. Jämför olika lösningsmetoder.

Troligen har några börjat med att dela lika så att båda har plockat 9 svampar och sedan prövat sig fram genom att flytta över från Kotte till farfar. Andra kanske börjar med att ge farfar de två extra och sen delar de lika på resten. Jämför med hur de skulle ha gjort i en egen konkret situation där ett given mängd ska delas upp på två personer och den ena ska ha två fler.

– Gör fler exempel som problemets, men ändra de ingående talen så att eleverna får känna att de bemästrar problemtypen.

En sorts problem som återkommer i Kängurun är närliggande, de handlar om att en mängd ska delas så att den ena delen är dubbelt så stor som den andra. Ett exempel:

Det finns dubbelt så många äpplen som päron i korgen. Tillsamman är det 21 frukter.
Hur många päron finns det?

fortsättning på nästa sida ⟶

Gör fler liknande exempel med olika tal och låt eleverna konstruera egna uppgifter. Tala inledningsvis inte om att hela mängden måste vara ett antal som är delbart med 3 för att det ska gå att lösa (med hela tal), utan låt eleverna få upptäcka detta samband. Illustrera sedan konkret och med bild, så blir det ännu tydligare varför.

– Konstruera gemensamt ett problem som går att lösa.
– Ändra sedan problemet så att ena delen är tre gånger så stor:

Det finns tre gånger så många äpplen som päron i korgen. Tillsamman är det 20 frukter.
Hur många päron finns det?

Se också kommentar till problem 15.

Tidigare problem: E 2012:12 och B 2013:16.

Problem som kan anknytas till centrala geometriska begrepp

Geometri är ett område som lämpar sig väl för problemlösning. Att resonera sig fram till lösningen och att sedan kunna argumentera för den är väsentliga delar av problemlösningsförmågan.

8 Stickor

Uppgiften handlar om omkrets. Stickorna bildar i svarsalternativen slutna former, där alla utom en har samma omkrets, men formerna är olika. Att olika former kan ha samma omkrets är en viktig erfarenhet att få.

– Laborera med ett givet antal stickor eller motsvarande och låt eleverna konstruera olika former.
– Gör samma sak med papper och penna.
– Låt eleverna formulera, muntligt eller skriftligt, att alla former har samma omkrets.
– Bestäm omkretsen med lämplig enhet, som kan vara stickor eller rutor men också cm.

Jämför arean på några av de figurer som eleverna konstruerat där skillnaden är tydlig. Två former med samma omkrets kan ha olika area, vilket också är en grundläggande insikt som eleverna behöver skaffa sig genom erfarenhet.

– Försök att göra en figur med stor area och en med mycket liten area.

Om ni ännu inte har pratat om area kan ni prata om hur stort området är och använda denna uppgift som en introduktion till area.

Tidigare problem: E 2005:14 och E 2006:9.

10 Klipp bort en ruta

Denna uppgift handlar om att mentalt föreställa sig en figur och att vrida den.

– Låt eleverna muntligt beskriva vilka rutor de ska ta bort.

Alla de fem figurerna består av fyra rutor, och har alltså samma area.

– Vilken har störst omkrets? Minst?
– Går det att skapa en ännu större omkrets med de fyra bitarna?

– På hur många olika sätt kan de fyra rutorna sättas samman?
– På hur många sätt kan tre rutor sättas samman? Fem rutor?

Elever i en klass tillsammans hittar troligen samtliga former. För att vara säker på att man har hittat alla former måste man gå systematiskt tillväga.

Låt eleverna undersöka och rita sina figurer. Se på omkretsen, antalet hörn, antalet ”vrår” (konkava hörn). Finns det ett samband mellan antalet vrår och antalet ”vanliga” hörn? Diskutera om två figurer som är lika men har olika orientering ska betraktas som samma? Har de samma form?

Tidigare problem: M 2013:12, M 2016:14, E 2006:11, E 2011:13, E 2015:16, B 2007:2 och B 2017:2.

16 Bygg en kub

– Vad är en kub?
Diskutera kubens egenskaper och jämför med kvadraten.

Här finns det två huvudstrategier – antingen att utgå från hur många småkuber som den färdiga kuben ska ha och räkna bort de kuber som redan är byggda, eller att bygga vidare på det som har påbörjats. Vilket är enklast? Vilken metod har eleverna använt?

Hjälp eleverna att se strukturen i bygget, tre småkuber i varje rad, tre rader i varje plan och tre plan. Att uppfatta strukturen är nödvändigt för att kunna utveckla förståelse när det gäller formler för volymberäkning.

– Låt eleverna bygga kuber i olika storlekar, hur många småkuber behövs?
Om sidan är 1?, sidan 2? etc.
Bygg och bokför antalet småkuber.
– Hur kan man räkna ut hur många kuber som behövs om man vet sidans längd?

Tidigare problem: M 2013:8, M 2016:9, E 2006:16, E 2012:11, E 2018:15 och B 2014:8.

Problem där bilden innehåller viktig information

Några av dessa problem utmanar elevernas förmåga att visualisera och går relativt lätt att lösa om man gör det konkret, men är betydligt svårare om lösningen måste ske ”i huvudet”. Att kunna göra sådana operationer i tanken är därför något som behöver behandlas i undervisningen. Ett stöd för tanken kan vara att med ord beskriva hur man vrider, vänder, speglar etc.

1 Prispallen

Här gäller det att se på prispallens höjd och bortse från barnens längd.
– I vilken ordning kom barnen?

Vi kan också undersöka barnens längder
– Vilket barn är längst?
– Hur vet vi det?
– Om den lägsta prispallen, platsen som A har, är 50 cm hög och de andra sedan ökar med 25 cm per steg, hur högt står då vinnaren?
– Om prispallen och A tillsammans är 148 cm, hur lång är då A?
– Om A och E är lika långa, hur högt över marken når då E (huvudet)?
…
Tidigare problem: E 2018:4.

6 Stegen i snön

– Låt barnen berätta om hur de har löst uppgiften.
Har de jämfört parvis eller direkt tittat där alla tre fotspår korsar varandra?

Uppgiften förutsätter att vi läser bilderna från vänster, förstår alla att bilderna ska läsas så?
Årets Milou 14 påminner om detta problem, men kräver också att man vet vad som utmärker en kvadrat.

Tidigare problem: M 2014:9 och E 2016:11.

4 Den uppvikta boken

- Låt eleverna beskriva vad som händer när man stänger boken. Var hamnar hålen? Hjälp dem att använda rutorna som referens.
- Var skulle hålen vara för att de andra alternativen skulle vara riktiga?

Arbeta också med enkla koordinatsystem, som ju också handlar om att orientera sig i ett rutsystem, även om vi i koordinatsystem i matematik oftast tittar på skärningspunkter mellan linjer. Spelet *Sänka skepp* passar också bra, och kontexten kan förstås ändras så att det exempelvis handlar om att hitta nergrävda skatter.

På Strävorna finns exempel på övningar inom området, bl a *Var är den?* som finns i ruta 5C . Där finns också hänvisningar till andra aktiviteter.

Tidigare problem: M 2014:5, M 2016:13, E 2011:3, E 2012:1 och B 2012:11.

5 Klipparket

Den här typen av uppgifter förekommer ofta i Kängurun, då de hjälper eleverna att utveckla sin rumsuppfattning. Att prata om uppgiften och uttrycka de rumsliga relationerna med ord är en del av detta arbete.

- Låt eleverna undersöka varje alternativ och motivera varför de inte går att få ur klipparket. Här spelar figurernas orientering roll, så man måste tänka sig vad som händer när man vrider på pappret.

Tidigare problem: M 2015:12, M 2018:7 och E 2018:9.

11 Väv med sex band

Ett motsvarande problem, med fyra band i stället för sex finns på Milou i år, börja med att diskutera det om detta varit svårt. Att undersöka alternativen i ordning är troligen en lättare strategi än att först föreställa sig hur väven ser ut.

- Finns det något alternativ som direkt kan uteslutas? Varför?
- Gå igenom alla alternativ och motivera varför de som är fel inte stämmer. Låt eleverna resonera om väven med hjälp av höger - vänster och över - under.

I exemplet hänger väven i ett fönster, vi kan tänka oss att väven är vänd i sidled, så vad som är upp och ner är givet.

- Hur hade lösningen påverkats av om man hade vänt väven i höjdled, så att det som är uppåt hade blivit nedåt?

Tidigare problem: M 2009:5, M 2010:9, E 2014:4, E 2016:3 samt E 2017:4 och 9.

18 Tavelram

Problemet handlar om att uppfatta mönstret: de fyra sidorna + fyra hörnbitar.
Variera storleken på tavlan och låt eleverna få komma fram till det generella sambandet.
De flesta barn roas av att få arbeta med mycket stora tal, så gör en tavla som är exempelvis 100 000 rutor lång och 100 000 rutor bred.

- Låt dem uttrycka sambandet med ord och eventuellt också med symboler.
- Gör en tavla som inte är kvadratisk, t ex rektangulär med ena sidan 7 rutor och den andra 4 rutor. Variera måtten. Hur förändras uttrycket?

Mönsteruppgifter ingår i varje Kängurutävling, då mönster är centralt inom matematik.
På Milou finns i år uppgift 15, som handlar om att bygga långbord:

> Vid varje sida av ett bord kan det sitta ett barn. Vi sätter ihop fyra sådana bord till ett långbord. Hur många kan sitta vid det?

- Variera problemet beträffande antalet bord och hur många som får rum vid varje sida.

Tidigare problem: E 2006:6 och 12, E 2007:18 och E 2008:5.

Flerstegsproblem som kräver resonemang och beräkningar

Textproblem uppfattas av många som svåra, speciellt om det är mycket information att hantera. Eleverna behöver få undervisning om hur de ska angripa den typen av uppgifter. Arbeta därför gemensamt med texterna. Gå igenom tillsammans och hjälp eleverna att sätta sig in i problemet, exempelvis med stödjande frågor. Hjälp eleverna att strukturera informationen i texten. Gå också igenom eventuella oklarheter beträffande ord och meningsbyggnad.

Att förstå vad problemet handlar om är en förutsättning för att kunna lösa det. Men att förstå vad det handlar om och vad som efterfrågas är inte detsamma som att ”veta vad man ska göra”. Problemlösning handlar om att komma från att förstå situationen till att komma på hur man ska komma fram till svaret på den formulerade frågan. Det är denna process, som består av flera steg och ofta innebär både misslyckade och lyckade insatser, som är central i undervisning om problemlösning. Att lära sig hantera motgångar och misslyckanden är viktigt för att utveckla problemlösningsförmågan.

I problemlösning spelar resonemang och argumentation en stor roll. Hjälp eleverna att göra resonemangen tydliga och visa gärna hur du själv resonerar som komplement. För att kunna utveckla sitt resonemang är det bra att kunna få möjlighet att följa mer utvecklade resonemang.

De problem som följer passar bra att använda för sådana ”exempellösningar”. Arbeta igenom dem noga. Läs texten, diskutera eventuella bilder, ställ frågor till texten och låt eleverna berätta med egna ord vad problemet handlar om och vad som ska lösas. Låt dem sedan dela med sig av idéer, frågor och funderingar. Strukturera upp den information som ges. Låt introduktionen ta tid, så att alla förstår vad problemet handlar om och också får idéer om hur det ska kunna lösas.

Diskutera olika lösningsmetoder, och anteckna sådant som ni kommer fram till. Gör tydliga lösningar på tavlan (eller motsvarande) och låt eleverna skriva desamma i sina räknehäften.

12 En prydnadshund

Kan alla tolka bilden? Förstår alla vad vågen illustrerar? Denna typ av våg förekommer knappt längre, men i illustrationer av likheter och olikheter är de värdefulla. Ställ frågor och låt eleverna motivera sina svar:

- Väger en hund mer eller mindre än 12 kg?
- Vad vet vi om vikten på två hundar?
- Kan en hund väga 11 och ett halvt kg?
- Hur skulle den vågen i den högra bilden stå om en hund vägde 10 kg?
- Vilka möjligheter finns om en hund inte väger ett helt antal kg?
- Uttryck olikheterna i bilderna med hjälp av symboler < och >.
- Låt eleverna konstruera egna olikheter och lösa.

Tidigare problem: M 2014:12, M 2018:15, E 2002:5, E 2004:8, E 2016:21, E 2018:20 och en svårare variant av det problemet B 2018:18 samt B 2015:9.

14 Ett halvfullt glas

Här är bilden bara en illustration och behövs inte. Diskutera skillnaden mellan bilden i detta problem och i ett problem där bilden har betydelse för problemet, t ex 12. Att kunna förstå bildernas betydelse är viktigt, se också kommentarer till problem 20.

Ett halvfullt glas är ett klassiskt problem som förekommer i olika varianter, och det är mycket lämpligt för att illustrera hur man kan lösa flerstegsproblem.

– Hur mycket väger vattnet i ett fullt glas? 400 gram – 100 gram.

Diskutera vad detta uttryck innebär. Vi kan se det som att vi tar bort glasets vikt eller att vi ser på skillnaden mellan det fyllda glaset och det tomma glaset. I båda fallen är det (vikten på) vattnet som vi får.

fortsättning på nästa sida →

– Hur ska vi beräkna vikten av hälften av vattnet? 300 gram/2.
– Hur mycket skulle vattnet i ett tredjedels glas väga?
– Hur mycket väger ett glas som är halvfyllt? 100 gram + 150 gram.
– Hur mycket väger ett glas som är fyllt till en tredjedel?
–Variera problemet, låt eleverna konstruera egna och lösa dem med tydliga strukturerade redovisningar av lösningen.

Tidigare problem: M 2013:5 och B 2012:9.

15 Frukter

– Vilken roll spelar bilden här? Hur skulle problemet formuleras utan bild?

Detta problem är svårare än det föregående, vattenglaset. Diskutera med eleverna vad som gör problemet mer komplicerat. Jämför med ett liknande problem som finns på Milou i år, här endast med text:

Två äpplen kostar 6 kr tillsammans.Två päron kostar 8 kr tillsammans.
Hur mycket kostar ett äpple och ett päron tillsammans?

I det problemet kan vi direkt med en beräkning ta reda på vad ett äpple respektive ett päron kostar, men det är inte möjligt i Ecolierproblemet.

Det finns flera sätt att lösa problemet. Om man ser att det är 2 stycken av vardera frukt i de tre summorna tillsammans är det enkelt att lägga ihop summorna och dela med två. 5 kr + 7 kr + 10 kr= 22 kr. Då får vi två av varje frukt, så en av varje kostar 22 kr/2. Här kan alltså bilden hjälpa oss att se en enkel lösning. I text blir det inte riktigt lika tydligt.

Ett annat sätt att lösa problemet är att resonera sig fram genom att jämföra. Gör också den lösningen gemensamt, inte minst för att det illustrerar resonemang.

Jämför bild 1 och 2.
– Vilket är dyrast, ett päron eller en banan?
– Hur vet vi det?
– Hur mycket dyrare?

Jämför bild 1 och 3 och ställ likande frågor, och även bild 2 och 3.
Skriv upp de slutsatser ni kommer fram till:

- En banan är dyrare än ett päron.
- En banan kostar 2 kr mer än ett päron.
- En banan är dyrare än ett äpple.
- En banan kostar 5 kr mer än ett äpple
- Ett päron .... etc

Med hjälp av dessa jämförelser kan ni sedan bestämma priset på varje frukt. Det ger flera intressanta beräkningar:

En banan och ett päron kostar 10 kr tillsammans.
Bananen kostar 2 kr mer än päronet.
Hur mycket kostar en banan? Ett päron?

Se också förslagen till problem 9, Kotte plockar svamp.

Tidigare problem: E 2011:7 och B 2003:21.

17 Stjärnans värde

Diskutera hur problemet kan angripas. Vilken rad är det lämpligt att börja med? Varför?
Om ni har genomfört jämförelseresonemanget i fruktproblemet nr 15, så kan ni använda ett motsvarande resonemang här.

- – Jämför rad 1 och 3. Vad är lika? Olika?
- – Fyll i summorna i kolumnerna också när ni kommit fram till vad varje figur symboliserar.
- – Vilken är summan av de tre raderna?
- – Vilken är summan av de tre kolumnerna?
- – Varför är det samma summa?

Tidigare problem: M 2015:14, E 2004:5, E 2015:3, E 2017:6 och B 2010:1.

19 Byta kulor

Diskutera olika lösningsstrategier. Några kanske ritade en bild för att lösa problemet, låt dem visa dessa. Diskutera hur en sådan bild kan vara till hjälp.

Hur har eleverna hanterat att det blir kulor över? Har någon växlat en röd kula mot 2 eller 3 gröna?
Gå igenom texten noga så att eleverna ser att den möjligheten inte finns. I verkligheten hade det kanske gått att diskutera sådana byten, men här måste vi hålla oss till det som är skrivet. Anknyt gärna till motsvarande exempel från verkligheten. Om en påse kolor kostar 10 kr kan vi inte köpa en och en halv påse för 15 kr.

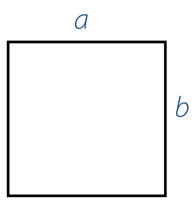
Tidigare problem: M 2017:16, E 2013:13 och B 13:11.

20 En lång korridor

För att bestämma sträckorna måste vi ta hänsyn till att en del av korridorernas längder inte ska ingå i sträckan. Låt eleverna resonera sig fram till de tre delsträckornas längd. Förstora gärna bilden, eller gör en stor skiss på tavlan (motsvarande) och sätt ut även de mått som inte ska ingå i sträckan, så att det blir riktigt tydligt för alla.

Bilden här är ett bra exempel på en bild som *inte* kan användas för att direkt hitta lösningen, vi kan inte mäta oss till svaret i bilden. Bilden är inte skalenlig och även om den hade varit det är den alldeles för liten för att kunna ge några exakta mått. Bilden här har en annan funktion, den visar hur korridoren är konstruerad och vilka mått vi ska räkna med. Så fungerar oftast bilder inom geometri. Viktiga mått och förutsättningar anges, men sen måste man själv med hjälp av kunskap om egenskaper hos geometriska objekt göra de beräkningar eller dra de slutsatser som leder fram till svaret. Att anta att en sträcka är lika lång som en annan ”för att det ser ut så” räcker inte. Man måste kunna motivera sina svar. Gör gärna något exempel, tex:

Sidan a i denna kvadrat är 7 cm.
Hur lång är sidan b?
Hur vet du det?



Tidigare problem: M 2018:13 och E 2005:16.

24 Handdukar på tork

Illustrera gärna problemet konkret, så att alla förstår vad det handlar om. Troligen finns det elever som inte har varit med om att hänga tvätt på en tvättlina, och kanske är även klädnypor okänt för en del elever.

– Börja med att dra en generell slutsats om hur många klädnypor som går åt för att häng handdukar som i bild 1, dvs med två klädnypor till varje handduk.
– Dra sen en generell slutsats om att hänga som i bild 2. Gör gärna en tabell:

Antal handdukar	antal klädnypor
1	2
2	3
3	4
4	. . ...

– Låt eleverna formulera sambandet med ord.
– Hur många klädnypor hade Emil behövt till sina 35 handdukar om han hade hängt alla som i bild 1?
– Hur många klädnypor behöver Emil till sina handdukar om han hänger som i bild 2?
– Hur många handdukar hade de 58 klädnyporna räckt till om han hade hängt som i bild 2?
– Hur många klädnypor får Emil över om han hänger som i bild 2? (58–36 =22)

Det är dessa 22 klädnypor som ska användas till att hänga som i bild 1.
För att detta ska bli tydligt för eleverna måste det nog illustreras och förenklas:

Häng upp (eller rita) 5 handdukar som i bild 2. Till dem går det åt 5 + 1= 6 klädnypor.
Ta fram två nya klädnypor. Hur många av de fem handdukarna kan nu hänga som i bild 2?

Tidigare problem: E 2012:2.

Problem där det logiska resonemanget är avgörande

Om man ber elever i Ecolier-åldern att göra ”ett svårare problem” blir det ofta ett likadant problem men med större tal. För många avgör talområdet hur svårt ett problem är. Det är en mycket rimlig tanke, eftersom eleverna i den här åldern fortfarande håller på att utveckla sin beräkningsförmåga och utöka sitt talområde. I några av de svåraste Känguruproblemen förekommer det ingen beräkning, eller endast mycket enkel sådan, men problemen är konstruerade så att de utmanar elevernas logiska tänkande. De är alla sådana att de kräver noggrann läsning, detaljer i texten kan vara avgörande. För att lösa dem måste man läsa texten med djup förståelse för att också kunna föreställa sig situationen.

21 Gårdens djur

Använd klossar och illustrera. Börja med klossar i en färg och byt sedan färg på de ”djur” ni identifierar.

– Om 10 av de 15 djuren inte är kor, vad vet vi då om de 5 återstående?
– Om 8 av djuren inte är katter, vad vet vi då om de 7 återstående?

Uppmärksamma speciellt att mängden av de 8 djur som inte är katter består av både kor och kaniner och att de 10 djur som inte är kor är katterna och kaninerna. Gör också en bild som illustration.

Konstruera några egna exempel som eleverna får beskriva på liknande sätt som i problemet.

– Låt eleverna få konstruera egna mängder av t ex olika frukter, fiskar eller något som intresserar dem och beskriva eller formulera ett problem om dessa.

Tidigare problem: E 2006:17 och B 2003:20.

22 Färgade trianglar i en triangel

Detta problem är inte så svårt att lösa, det går att prova sig fram ganska lätt. Det passar dock bra för att utveckla förmågan att resonera.

– Varför måste trianglarna placeras på detta vis?
– Finns det andra möjligheter, när de första fyra trianglarna är givna så som i problemet?
– På hur många olika sätt kan Mary placera 9 trianglar med 3 olika färger enligt den regel hon har?

Ett klassiskt geometriproblem som också handlar om att områden intill varandra ska ha olika färg är ”Kartfärgningsproblemet” eller ”Fyrfärgsproblemet”:

> Hur många olika färger behövs för att kunna färglägga en karta över ett godtyckligt antal områden så att inte två områden som gränsar till varandra får samma färg?

Problemet var löst redan på 1800-talet, det behövs fyra färger. Sen gällde det att bevisa att fyra färger alltid är tillräckligt. Det tog ända till 1976 innan Fyrfärgsteoremet kunde bevisas.

– Låt eleverna få pröva att färglägga en (tillräckligt komplicerad) karta med så få färger som möjligt, så att inte två områden som delar gräns får samma färg.
Berätta sedan om Fyrfärgsproblemet.

På Cadet finns i år två problem som är besläktade med Ecolier 22, det är nr 20 och 22. De är svårare men om du har några elever som visar speciellt intresse för detta så låt dem pröva.

Tidigare problem: B 2010:20 och B 2018:13.

23 Glasstjuven

Vem ljuger och vem talar sanning? Varje år brukar det finnas något sådant logikproblem i åtminstone klasserna Benjamin, Cadet, Junior och Student, men ibland också på Ecolier. Somliga är väldigt förtjusta i dessa problem medan andra slår bakut. Därför är det bra att verkligen arbeta igenom några, så att eleverna får vara med om att genomföra en lösning.

I dessa problem handlar det om att se hur en utsaga förhåller sig till de andra, vilket för de flesta innebär att systematiskt arbeta sig igenom påståendena. I det här fallet kompliceras också problemet av att frågan är vem som har tagit glassen, inte vem som ljuger.

Dramatisera gärna situationen och gör det till en lek där klassen ska avslöja glasstjuven. Låt fem elever få spela de fem barnen och säga sina påståenden. Låt de övriga i klassen först få försöka hitta vem som ljuger. För att hjälpa dem kan du efter ett tag ställa följande frågor:

– Det finns två som säger vem som har tagit glassen. Vilka är det?
– Vem pekar de ut?
– Kan båda tala sanning?
Diskutera detta med eleverna, kan alla förstå logiken i det?

Jämför vad Erkki säger med vad Ali säger.
– Kan båda tala sanning?
– Vem är det som ljuger?
Diskutera även denna slutsats med eleverna.

Förstår alla att det måste vara Erkki som ljuger? En av Erkki och Bartek ljuger och en av Erkki och Ali ljuger.

– Låt eleverna, när de har kommit fram till vem som ljuger, avgöra vem som har tagit glassen och motivera sina svar.

fortsättning på nästa sida ⟶

Om Erkki ljuger så talar alla de andra sanning.
– Vem har tagit glassen?
– Läs igenom alla påståenden och se att det stämmer.

– Låt eleverna få berätta om vad som gör att de tycker att problem av denna typ är svåra (om de tycker det).
– Lös fler liknande problem.
– Gå igenom dem tillsammans och låt eleverna berätta för varandra hur de resonerar.
– Låt dem också granska varandras resonemang och se om det stämmer.

Återkom till liknande problem och låt varje problem få ta tid.

Tidigare problem: E 2005:18, E 2010:17, B 2007:13, B 2008:19, B 2013:20 och B 2018:11.

Att läsa

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal*. NCM, Göteborgs universitet.

Rystedt, E. & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.

Wallby, K. m fl (red) (2014). *NämnarenTema 10 Matematikundervisning i praktiken*. NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar äldre än ett år finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken *Månadens problem*, ncm.gu.se/manadens-problem.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal larportalen.skolverket.se. På lärportalen finns moduler om problemlösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. Matematiklyftets material finns alltså tillgängligt för alla. På Lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.