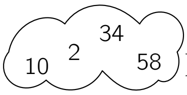
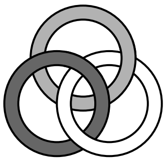
Facit och kommentarer – Cadet 2019

1 E 

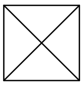
Det finns udda tal i alla andra moln.

2 C 20

Varje rad består av tre enhetskuber, men mittenkuben är gemensam och behöver bara räknas en gång. Därför tas $3 \cdot 3 - 2 = 7$ enhetskuber bort.
Från början var det $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kuber, alltså finns $27 - 7$ kuber kvar.
Alternativ lösning:
Ta bort en liten kub från stora kubens mitt och en för varje sida, $1 + 6 = 7$.
Kvar blir en kub för varje hörn och en för varje kant, $8 + 12 = 20$.

3 D 

Den vita ringen ska vara ihopkopplad med den ljusgrå ringen.
De är inte ihopkopplade i alternativ B, C och E .
Den ljusgrå och den svarta ringen ska inte vara ihopkopplade, vilket de är i alternativ A.
Endast i alternativ D är den vita ringen länkad med de två andra samtidigt som dessa två inte är länkade med varandra.

4 D 

För att rita figur D måste vi dra pennan två gånger utefter någon linje.
När man ritar en figur med ett penndrag utan att dra någon sträcka två gånger och slutar på samma ställe som man började på, så går det ett jämnt antal linjer till/från varje hörn i figuren. Slutar man på ett annat ställe blir det två ”udda hörn” (hörn med ett udda antal linjer).
Alltså har varje figur som kan ritas med ett enda penndrag antingen 0 eller 2 udda hörn.
Figurer i A, B, och C har inga udda hörn, man kan börja rita dem var som helst och då slutar man på samma ställe.
Figur D har 4 udda hörn och den tillhör alltså inte figurer som kan ritas så.
Figuren i E har två udda hörn, för att rita den börjar man i ett av de övre hörnen och då slutar man i det andra.

5 D 40

Alla fick fyra muffins var som de åt upp. De var fem så tillsammans åt de alltså 20 muffins. Det var hälften av vad de hade från början, $20 = 40/2$, så det fanns 40 muffins från början.

6 A Victor

Första påståendet ger att Lothar inte är sist.
Andra påståendet ger att Jan inte heller är sist.
Tredje påståendet ger att Manfred inte är sist.
Fjärde påståendet ger att Eddy inte heller är sist.
Kvar är Victor som måste komma sist.

7 B 58

De fem nollorna finns på sidorna 10, 20, 30, 40 och 50. Alltså har boken minst 50 sidor men inte 60.
De sex åttorna finns på sidorna 8, 18, 28, 38, 48, 58.
En bok har alltid ett jämnt antal sidor och vi vet att vår bok inte har någon sidan 60, alltså är den sista sidan 58.

8 D $\frac{4}{9}$

Den övre vänstra fjärdedelen är indelad i 9 kvadrater, som var och en är $\frac{1}{36}$ av hela kvadraten. 7 av dessa är grå, dvs $\frac{7}{36}$.

Dessutom är den nedre högra fjärdedelen grå. Totalt har vi alltså:
$\frac{1}{4} + \frac{7}{36} = \frac{9}{36} + \frac{7}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

9 A 60

Boris som hade fem högar hade två fler i varje hög. Det är $5 \cdot 2 = 10$ äpplen. Dessa 10 äpplen måste ligga i Andrews sjätte hög. Det betyder att i alla Andrews högar ligger det 10 äpplen. Totalt har han alltså 60 äpplen. (Boris 60 äpplen är fördelade på fem högar med 12 i varje.)

10 A 5, 6 och 7

Utför man additionen så ser man att det saknas en femma i tiotalskolumnen, en sjua i hundratalskolumnen och en sexa i tusentalskolumnen.

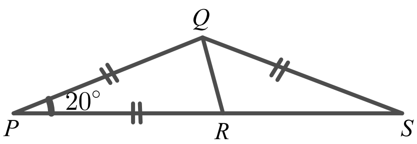
$$\begin{array}{r} 1\,2\,4\,3 \\ 2\,1\,\square\,7 \\ +\ \square\,\square\,2\,6 \\ \hline 1\,0\,1\,2\,6 \end{array}$$

Alternativ lösning:
Ersätt de dolda siffrorna med bokstäver A, B och C.
$1243 + 21A7 + BC26 = 10126$
Entalen: $3 + 7 + 6 = 16$, dvs ett tiotal i minne till tiotalen.
Tiotalen $1 + 4 + A + 2 = 7 + A$, $7 + A$ ska ge vara ett tal med entalssiffran 2.
Det måste vara 12 och A är därmed 5. Det blir då ett hundratal i minne.
Hundratalen $1 + 2 + 1 + C = 4 + C$, som ska vara ett tal med entalssiffran 1, dvs 11 och C är då 7. Ett tusental i minne.
Tusentalen $1 + 1 + 2 + B = 4 + B$ ska vara 10, dvs $B = 6$.
A, B, C är alltså 5, 6 och 7.

11 B 32

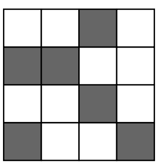
Det är 15 tal mellan 7 och 23 på ena sidan så det måste vara lika många på andra sidan, så det finns $15 + 15 + 2$ tal runt cirkeln. Alltså $n = 32$.

12 B 60°



Triangeln *PQS* är likbent vilket gör att vinkeln *QSR* är 20° och vinkeln *PQS* är 140°. Triangeln *PQR* är likbent med toppvinkeln 20°, så de andra två vinklarna är lika stora:

$\frac{(180° - 20°)}{2} = 80°$. $PQS - PQR = RQS$, $140° - 80° = 60°$.

13 E 

I svarsalternativ A, B, C och D hittar vi L-formen i olika position. Om man tar bort dem så finns också 3×3-kvadraten, i olika position. I alternativ E finns det ingen del som motsvarar den L-formade biten.

14 B 2

Dora kände 4 personer, alltså Allan, Bella, Clarie och Erik.
Allan kände 1 person, alltså Dora, men inte Bella, Clarie eller Erik.
Clarie kände 3 st, men inte Allan, hon kände alltså Bella, Dora och Erik.
Bella kände 2 st. Vi vet att hon kände Dora och Clarie, alltså inte Erik.
Erik kände Dora och Clarie men varken Allan eller Bella, alltså kände han 2 personer.

15 C 3

55 % av 20 skott innebär 11 skott som träffar.
Om 56 % av 25 skott träffar är det 14 träffar.
På de fem extra skotten träffade hon alltså $14 - 11 = 3$ gånger.
Man kan räkna utan räknare:
55 % av 20 skott: 55 % av 10 skott är 5,5 och av 20 alltså $5{,}5 \cdot 2 = 11$.
56 % av 25 skott: 56 % av 100 är 56 och eftersom 25 är 100/4, så är 56 % av $25 = 56/4 = 14$.
Vi kan också förenkla procentberäkningen genom att utnyttja att a % av b är lika med b % av a.
Alltså är 56 % av 25 – 55 % av 20 lika med 25 % av 56 – 20 % av 55:

$$\frac{56}{4} - \frac{55}{5} = 14 - 11 = 3$$

16 D 7

$\frac{1}{8}$ är hundar, dvs det finns 3 hundar.

$1 - \frac{3}{4}$ är kor, så $\frac{1}{4}$ dvs 6 djur är kor.

$1 - \frac{2}{3}$ är katter, dvs det är 8 katter. Resten är kängurur: $24 - 3 - 6 - 8 = 7$.

Det finns 7 kängurur.

17 B 12 cm²

Längden på en rektangel är $\frac{10\,\text{cm}}{5} = 2$ cm.

Bredden på en rektangel är $\frac{6\,\text{cm}}{4} = 1{,}5$ cm.

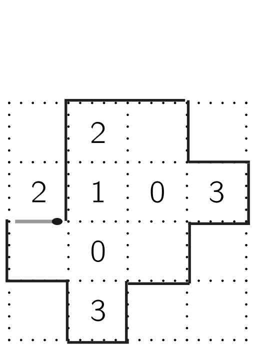
Var och en av rektanglarna har arean $2 \cdot 1{,}5 = 3\ \text{cm}^2$.
Totalt finns 14 rektanglar som tillsammans har arean $14 \cdot 3\ \text{cm}^2 = 42\ \text{cm}^2$.

Triangelns area är $\frac{10 \cdot 6}{2} = 30\ \text{cm}^2$.

Det grå området är alltså $42 - 30 = 12\ \text{cm}^2$.

18 C 16

Bilden visar att 16 stickor räcker. Vid varje ytterkant på ”planen” finns det en ruta med ett tal större än 1 (2, 2, 3, 3).
Det betyder att banan måste nå alla fyra ytterkanter. Det behövs därför 4 vågräta stickor för att komma från den vänstra kanten och 4 vågräta för att komma tillbaka. På samma sätt kan vi se att Aylin behöver minst 8 lodräta stickor.
Alltså minst 16 stickor sammanlagt.



19 B 75 euro

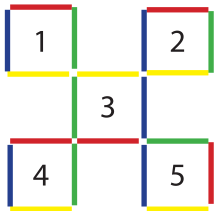
Från början har han 50 euro. Hela summan använder han till att köpa läsk. När han hade sålt 40 flaskor hade han $50 + 10 = 60$ euro.

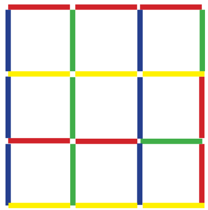
Han sålde alltså flaskorna för $\frac{60}{40} = 1{,}5$ euro.

När han hade sålt 50 flaskor hade han $50 \cdot 1{,}5 = 75$ euro.

20 C 5

De fem markerade kvadraterna i den vänstra figuren nedan har ingen gemensam kant och var och en av kvadraterna måste innehålla en grön sticka. De gröna stickorna är alltså minst 5 st.





Vi kan också resonera så här:
Det finns 9 rutor och en sticka kan utgöra sidor till som mest 2 rutor så 4 stickor räcker inte. Figuren till höger visar ett exempel med stickor där det är exakt 5 gröna stickor. Det är alltså möjligt att endast använda 5 gröna stickor.

21 E 6

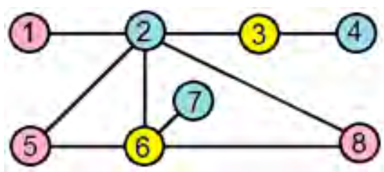
$\frac{1}{10}$ av 60 är 6, kvar 54. $\frac{1}{9}$ av 54 är 6, kvar 48. $\frac{1}{8}$ av 48 är 6, osv.

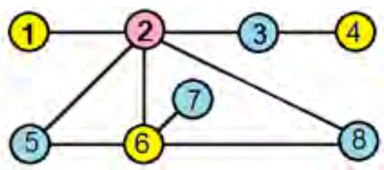
Hon äter 6 chokladbitar varje dag.
Detta upprepas nio gånger och hon har alltså 6 kvar.
6 är hälften av 12, som hon hade kvar dagen innan.

Ett annat sätt att resonera:
När hon först åt 1/10 av chokladen blev det 9/10 kvar.
Sen åt hon 1/9 av dessa 9/10, vilket innebär att 8/10 av den ursprungliga mängden blev kvar. Därefter åt hon 1/8 av 8/10 så att 7/10 blev kvar osv.
Varje dag åt hon alltså 1/10 av den ursprungliga mängden, dvs 6 bitar.
Den dagen som hon åt hälften av det hon hade, blev det kvar lika mycket som hon åt, alltså 6 bitar.

22 A 5 och 8

Ringarna 2 och 6 ska ha två olika färger.
Ring 5 som är direkt sammanbunden både med 2 och med 6 måste få den färg som varken används i ring 2 eller i ring 6. Detsamma gäller ring 8.
Alltså måste 5 och 8 få samma färg.

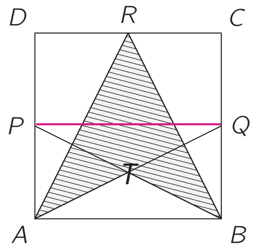




23 E $\frac{3}{8}$

Låt S vara kvadratens sidolängd. Kvadratens area är då S^2.

Dra linjen PQ. $ABQP$ är en rektangel med arean $\frac{S^2}{2}$.



Låt T vara skärningspunkten av rektangelns diagonaler AQ och PB.

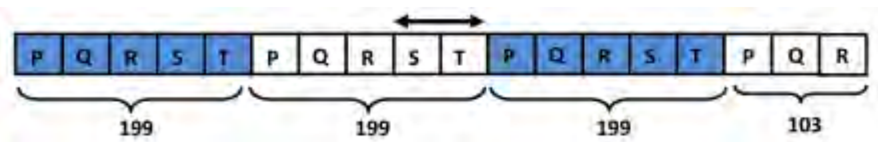
Triangeln ATB har arean $\frac{\frac{S^2}{2}}{4} = \frac{S^2}{8}$. Triangeln ARB har arean $\frac{S^2}{2}$.

Det skuggade området har arean $\frac{S^2}{2} - \frac{S^2}{8} = \frac{3S^2}{8}$, dvs $\frac{3}{8}$ av kvadratens area.

24 D 96

Det finns 199 passagerare i vagnarna 1 till 5 och 199 passagerare i vagnarna 6 till 10, alltså finns det $700-199-199=302$ passagerare i vagnarna 11 till 18.
Det finns 199 passagerare i vagnarna 9 till 13 och 199 passagerare i vagnarna 14 till 18, alltså finns det $700-199-199=302$ passagerare i vagnarna 1 till 8.
I vagnarna 9 och 10 finns det alltså $700-302-302=96$ passagerare.

Alternativ lösning:
Låt antalet passagerare i de första fem vagnarna vara P, Q, R, S och T.
Låt antalet i den sjätte vagnen vara X.
Vi vet att $P+Q+R+S+T=199$ och att $Q+R+S+T+X=199$.
Alltså är antalet passagerare i första och sjätte vagnen detsamma.
Antalet passagerare i vagnarna följer ett mönster så som i figuren.
De två mittersta vagnarna har S respektive T passagerare.
Eftersom det totala antalet passagerare är 700, kan vi räkna ut att $P+Q+R=700-3\cdot 199=103$. I den nionde och tionde vagnen sitter det därför $199-103=96$ passagerare.
$S+T=P+Q+R+S+T-P+Q+R$



Kängurutävlingen – Matematikens hopp

Arbeta vidare med Cadet 2019

Känguruproblemen bygger på förståelse och grundläggande kunskaper, få är direkta rutinuppgifter. Flertalet av problemen kan kopplas till såväl det centrala innehållet problemlösning som till förmågan problemlösning. Det är därför viktigt att låta problemen leva vidare. Har det inte funnits möjlighet att genomföra tävlingen kan problemen ändå komplettera den ordinarie undervisningen.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal matematiska termer att aktualiseras. Gå igenom dem. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

I all form av problemlösning är det viktigt att diskutera strategier och lösningsmetoder. Vill ni inte arbeta igenom tävlingens samtliga problem kan exempelvis några problem väljas ut som har något gemensamt. Nedan ges hänvisningar till liknande problem och förslag på upplägg och i år finns visst fokus på digitalisering då delar av det fortsatta arbetet kan ske med Excel och Geogebra.

Matematiskt arbete handlar i stor utsträckning om resonemang. Elever behöver få resonera om både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. Ett sätt att arbeta vidare kan vara att eleverna i mindre grupper resonerar sig fram till en gemensam lösning. Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få bedöma kamraters lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Diskutera vilken information i problemet som är nödvändig och vad som kan ändras utan att problemet förändras. Många elever kanske också klarar sig utan de olika svarsalternativen.

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. När elever upplevet att det är en del av undervisningen brukar det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?

– Påminner problemet om något annat problem vi löst tidigare?

– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?

– Vilka nya frågor kan problemet väcka?

– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Att arbeta vidare med problemen kan innebära att noggrant gå igenom lösningsstrategier och repetera eller ta upp teori kring använda begrepp. Här finns många tillfällen att utveckla olika matematiska förmågor och flertalet av Känguruproblemen har direkt koppling till kursplanen i matematik för åk 9 och ämnesplanen Ma1. I efterarbetet kan det även vara önskvärt att hämta in fler snarlika problem från de andra tävlingsnivåerna detta år och från tidigare års Kängurutävlingar. Alla tidigare tävlingsproblem finns att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru. Tidigare problem inom området geometri är dessutom samlade och strukturerade i en bok – *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem.*

Att läsa

Eriksson, K. & Rydh, S. (2003). *Nöjesmatematik*. Stockholm: Liber.

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

Ulin, B. (2010). *Matematiska äventyr*. NCM, Göteborgs universitet.

Ulin, B. (2016). *Frågor och fascinationer*. NCM, Göteborgs universitet.

Vaderlind, P. (2005). *Klassisk och modern nöjesmatematik*. Stockholm: Svenska förlaget.

Wallby, K. m fl (red) (2014). *NämnarenTema 10 Matematikundervisning i praktiken*. NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar, äldre än ett år, finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, ncm.gu.se/namnaren. Du finner dem via artikelregistret. Under Klassrum på ncm.gu.se finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. NCM presenterar varje månad nya problem under rubriken Månadens problem.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns artiklar och aktiviteter samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal, matematiklyftet.skolverket.se. På lärportalen finns moduler om problemlösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. På lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.

Den största delen av de förslag som presenteras i detta *Arbeta vidare*-dokument är framtaget av Cecilia Christiansen, Carlssons skola, Stockholm.

Introduktion

I år följer *Arbeta vidare* tävlingsproblemen nästan i nummerordning, men en del snarlika problem ryms inom samma kommentar. Använd facit och detta dokument parallellt. Som komplement finns även en powerpointpresentation där en del problem diskuteras mer och de är märkta *(se även ppt)*. Presentationen finner du på
ncm.gu.se/media/namnaren/kanguru/2019/arbetavidare/arb_vid_cadet_2019.pptx

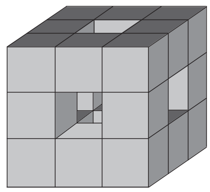
Cadet 1

Vilket moln innehåller endast jämna tal?

Diskutera hur en elev som har valt fel alternativ kan ha tänkt. Diskutera även varför och i vilka sammanhang det kan vara bra att känna igen jämna och udda tal.

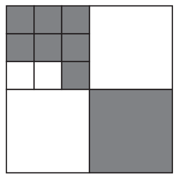
Cadet 2 och 8 (se även ppt)

2. En kub med kantlängden 3 är byggd av enhetskuber. Några kuber tas bort rakt igenom, från vänster till höger, uppifrån och ner samt från framsidan till baksidan, se bilden.
Hur många enhetskuber finns kvar?



Hur stor del av kuben har tagits bort?

8. En stor kvadrat är indelad i mindre kvadrater.
Hur stor del av den stora kvadraten är grå?

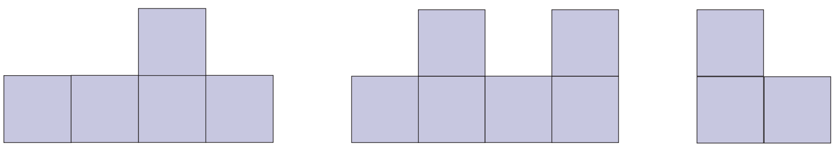


Anta att vi låter kvadraten i problem 8 bli till en kub genom att låta bilden vara basen till kuben. Hur stor del av kuben är grå?

3 och 8: Låt eleverna arbeta med problemen konkret med exempelvis centikuber eller multilink samtidigt som de resonerar om antalet kuber som tas bort eller blir kvar.

Rita kuben med hjälp av Geogebra, www.geogebra.org. Klicka på 3D-grafräknare eller GeoGebra Classic. Om du eller dina elever behöver en introduktion till Geogebra så har Kikora gjort flera korta onlinekurser: www.geogebra.org/m/Ebm5wBW5.

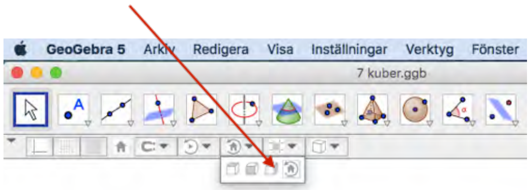
Gå från 2D till 3D. Visa 2D-bilder av 3D-objekt framifrån, uppifrån, från sidan och låt eleverna bygga det som visas. Dela ut sju centikuber eller multilinkkuber till varje elev. Använd kuberna för att bygga en 3D-figur som motsvarar beskrivningen:

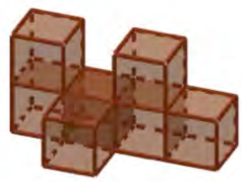


uppifrån framifrån från sidan

Låt eleverna i par jämföra det de byggt. Visa sedan 3D-bilden:

Vänd på uppgiften och *gå från 3D till 2D*. Låt varje elev bygga en egen skulptur som består av sju kuber och sedan rita skulpturen i Geogebra. Ta bilder av skulpturen framifrån, ovanifrån och från sidan:



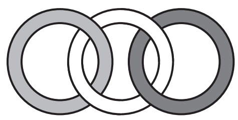


Dela eller skicka bilderna till en annan elev. Eleven som får bilderna bygger skulpturen med kuber. Jämför sedan den verkliga skulpturen med den digitala.

Som ett alternativ till Geogebra kan eleverna rita av sina skulpturer på isometriskt prickpapper, se ncm.gu.se/matematikpapper.

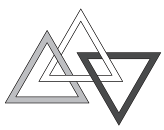
Cadet 3

Bilden visar tre ringar som är sammanlänkade.

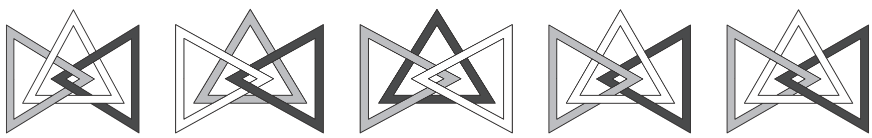


Klipp ut tre ringar i olika färger och länka samman dem enligt illustrationen. Se vad som händer då de manipuleras och diskutera särskilt svarsalternativ E. Liknande uppgifter finns som Student 2019:2

Tre trianglar är länkade med varandra.



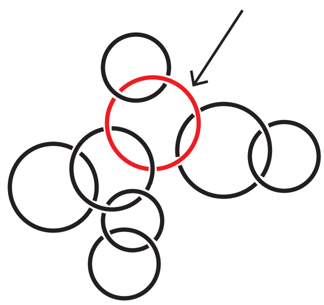
Vilken av följande bilder visar samma tre trianglar länkade på samma sätt?



A B C D E

… och nr 1 i Junior 2018.

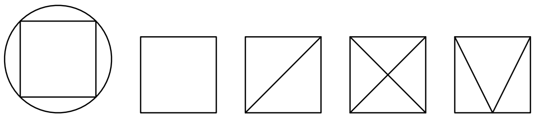
Några av bildens ringar bildar en kedja där den röda ringen som pilen pekar på ingår. Hur många ringar finns det i denna kedja?



A: 3 B: 4 C: 5 D: 6 E: 7

Cadet 4

Fyra av figurerna nedan kan man rita med ett penndrag, utan att lyfta pennan och utan att dra den två gånger längs samma linje. En av dem kan inte ritas så. Vilken?



Den matematiker som troligen är mest förknippad med problemet är Leonard Euler. Låt eleverna söka fakta om honom.

Ett konkret exempel på att utvidga problemet till en aktivitet är *Topologisk lek*, som beskrivs av Kristin Dahl i *Matte med mening*.

Ett annat exempel är att undersöka *Königsbergs broar*. I Nämnaren finns ett flertal artiklar som behandlar ämnet.

Cadet 5 (se även ppt)

Fem vänner träffades och hade med sig muffins som de hade bakat. Var och en av dem gav de andra varsin muffins. Vännerna åt sedan upp alla muffins de hade fått. Då halverades antalet muffins. Hur många muffins hade de från början?

Låt eleverna konkretisera med plockmaterial. Diskutera den vanliga missuppfattningen att räkna med 5 istället för 4. Träna begreppsförmågan och diskutera med eleverna olika samband som halvera/dubblera, fler än/färre än, osv.

Cadet 6 (se även ppt)

I en biltävling kom Lothar i mål före Manfred, Victor kom efter Jan, Manfred före Jan och Eddy kom före Victor. Vem av de fem kom sist i mål?

Använd leksaksbilar eller annat plockmaterial som exempelvis plastbokstäver för att illustrera uppgiften. Lyft vikten av att rita när man löser problem. Kontrollera om alla villkor är uppfyllda eller om det finns flera ordningar som uppfyller villkoren.

Uppgiften passar att omformulera till *Gemensam problemlösning*.

I en biltävling kom Lothar i mål före Manfred.

Vem kom sist i mål?

I en biltävling kom Victor i mål efter Jan.

Vem kom sist i mål?

I en biltävling kom Manfred i mål före Jan.

Vem kom sist i mål?

I en biltävling kom Eddy i mål före Victor.

Vem kom sist i mål?

Cadet 7

Alla sidor i Juliets bok är numrerade. Det finns fem stycken nollor och sex stycken åttor bland de siffror som används. Vilken sida kan vara den sista?

Låt eleverna använda böcker som stöd eller inspiration och formulera egna uppgifter med andra tal och olika antal sidor.

Cadet 9 (se även ppt)

Andrew delade upp ett antal äpplen i sex lika högar. Boris delade samma antal äpplen i fem lika högar. I varje hög som Boris hade låg det två fler äpplen än i de högar som Andrew hade. Hur många äpplen hade Andrew?

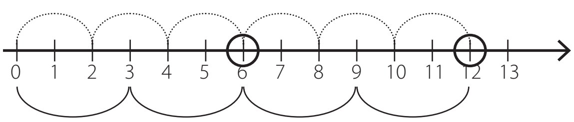
Diskutera med eleverna begreppen: *multipel*, *gemensam multipel* och *minsta gemensamma multipel*. Ta även upp *delare, gemensam delare, minsta gemensamma delare, faktorisera, primtal* och *primfaktorer*. Här beskriver vi bara de tre första då de har direkt koppling till uppgiften. *Multipel:* Tal som är produkten av ett givet tal och något heltal.

Multiplar

De fyra första multiplarna till talet 5 är: 5, 10, 15 och 20. Det är alltså de fyra första produkterna i femmans multiplikationstabell.

Två olika tal kan ha gemensamma multiplar. För talen 2 och 3 är de fyra första multiplarna 6 ($2 \cdot 3$), 12 ($2 \cdot 2 \cdot 3$), 18 ($2 \cdot 3 \cdot 3$) och 24 ($2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$).

Minsta gemensamman multipeln (MGM) för 2 och 3 är alltså 6.



Ur boken *En hel del textuppgifter – gul – Singaporemetoden*, sid 14.

Vilka *multiplar* har 20 och 50?
Multiplar till 20: 20, 40, 60, 80, $\boxed{100}$, 120, 140, 160, 180, $\boxed{200}$, 220, …
Multiplar till 50: 50, $\boxed{100}$, 150, $\boxed{200}$, 250, …

Vilka gemensamma multiplar har 20 och 50?
100, 200, 300, …

Vilken är största gemensamma multipel av 20 och 50?
Frågan har inget svar men kan ge upphov till intressant diskussion. Varje tal har oändligt många multiplar. Förhoppningsvis kommer någon av eleverna på att frågan är fel ställd och att de istället borde fråga vilken den *minsta* gemensamma multipeln är. Om ingen elev kommer på det kan du själv ställa frågan.

Vilken är den *minsta gemensamma multipeln* av 20 och 50?
MGM (20, 50) = 100. Ett sätt att hitta MGM av två eller flera tal är att skriva *talens tabeller* och se vilken lägsta multipel talen har gemensamt, dvs första talet vi hittar i båda tabellerna.
Exempel: Hitta MGM (6, 14)
Multiplar av 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, …
Multiplar av 14: 14, 28, 42, …
MGM (6, 14) = 42

Ur boken *Delbarhet och primtal* av Cecilia Christiansen.

Låt eleverna lösa uppgiften i Excel, lägg till fler delfrågor:
Andrew delade några äpplen i sex lika högar. Boris delade samma antal äpplen i fem lika högar.

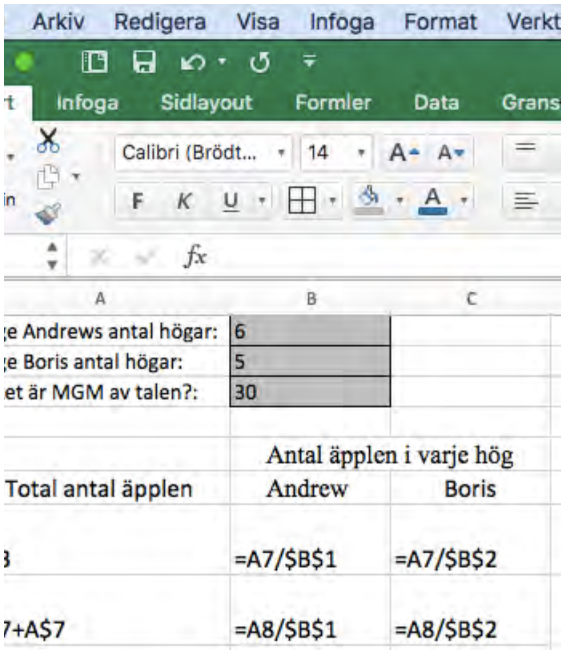
a) I varje hög som Boris hade låg det åtta fler äpplen än i de högar som Andrew hade. Hur många äpplen hade Andrew?

b) I varje hög som Boris hade låg det 15 fler äpplen än i de högar som Andrew hade. Hur många äpplen låg i var och en av Andrews högar?

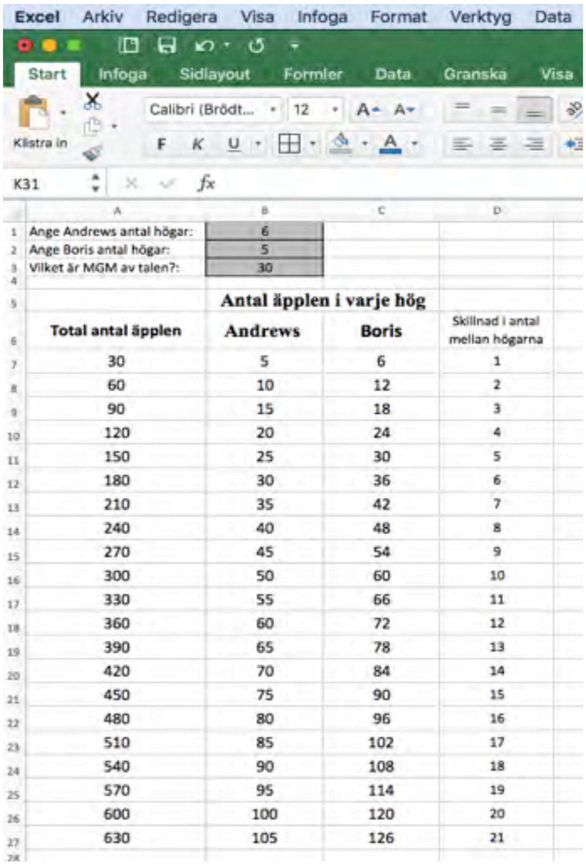
c) Hur många äpplen fanns i var och en av Boris högar om det i varje av hans högar låg 21 fler äpplen än i var och en av Andrews högar?

d) Beskriv hur vi enkelt kan beräkna antalet äpplen som Andrew eller Boris har om vi vet skillnaden mellan antalet äpplen i deras högar.

Programmera ett Excel-blad som beräknar antalet äpplen i varje hög. (För bättre upplösning på skärmdumpar, se ppt.)
Indata:
Andrews antal högar.
Boris antal högar.
MGM av antalen äpplen i bådas högar.
Skriv in text och data som på bilden.
$B$3 är en absolut referens, både kolumn och rad är låst.
A$7: raden är låst.
Markera sedan A8 till C8 och kopiera formlerna nedåt.
Avläs svaret från tabellen:



A	B	C
…e Andrews antal högar:	6	
…e Boris antal högar:	5	
…et är MGM av talen?:	30	
	Antal äpplen i varje hög	
Total antal äpplen	Andrew	Boris
…3	=A7/$B$1	=A7/$B$2
…7+A$7	=A8/$B$1	=A8/$B$2



	A	B	C	D
1	Ange Andrews antal högar:	6		
2	Ange Boris antal högar:	5		
3	Vilket är MGM av talen?:	30		
4				
5		Antal äpplen i varje hög		
6	Total antal äpplen	Andrews	Boris	Skillnad i antal mellan högarna
7	30	5	6	1
8	60	10	12	2
9	90	15	18	3
10	120	20	24	4
11	150	25	30	5
12	180	30	36	6
13	210	35	42	7
14	240	40	48	8
15	270	45	54	9
16	300	50	60	10
17	330	55	66	11
18	360	60	72	12
19	390	65	78	13
20	420	70	84	14
21	450	75	90	15
22	480	80	96	16
23	510	85	102	17
24	540	90	108	18
25	570	95	114	19
26	600	100	120	20
27	630	105	126	21

Svar:

a) 240 äpplen

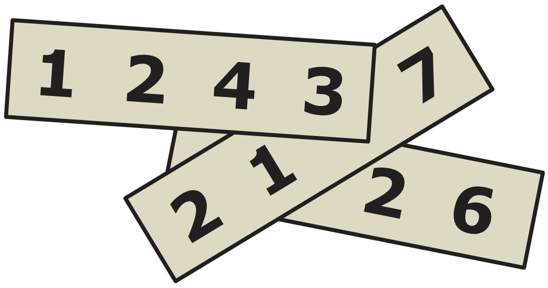
b) 75 äpplen

c) 126 äpplen

d) Antalet äpplen som Andrew eller Boris har är lika med produkten av minsta gemensamma multipel av antalet äpplen i högarna och skillnaden mellan antalet äpplen i högarna.

Cadet 10 (se även ppt)

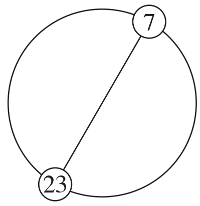
På var och en av de tre skyltarna på bilden är ett fyrsiffrigt tal skrivet. Tre siffror på de två understa skyltarna är övertäckta. Summan av de tre fyrsiffriga talen är 10 126. Vilka tre siffror är övertäckta?



Additionsalgoritmens varande eller icke varande kan diskuteras, men här kommer den till god användning! Diskutera hur man resonerar när man skriver in siffrorna.

Cadet 11 (se även ppt)

Alla heltal från 1 till och med *n* är placerade i ordning och med jämna mellanrum runt en cirkel. En diameter går mellan talet 7 och talet 23. Vilket värde har *n*?



Använd laborativt material och prova med andra tal, t ex 3 och 7, eller 5 och 15.
Behöver båda talen vara udda?
Kan det vara två jämna tal? Testa med t ex 4 och 10.
Kan det vara ett udda och ett jämnt tal? Prova!

Låt eleverna hitta på liknande problem.
Sammanställ klassens resultat i tabellen nedan. Diskutera med eleverna hur de kan tänka för att konstruera liknande problem. Lyft vikten av att skriva beräkningen och inte bara svaret för att kunna se ett mönster och lättare kunna generalisera.

Diskutera med eleverna hur *antalet tal* mellan talen fås genom att beräkna differensen mellan Tal 2 och Tal 1 minus 1.

Antal tal före Tal 1	**Tal 1**	Antal tal mellan Tal 1 och Tal 2	**Tal 2**	Antal tal efter Tal 2	**n**
7-1=6	**7**	23-7-1=15	**23**	15-6=9	23+9=**32**

Generalisera. Alla heltal från 1 till *n* placeras på samma avstånd runt en cirkel. En diameter går mellan talet x och talet y. Vilket värde har n?

Be eleverna beskriva muntligt för varandra vad som ska stå i varje ruta i tabellen. Uppgiften ger goda möjligheter till både skriftliga resonemang och muntlig kommunikation.

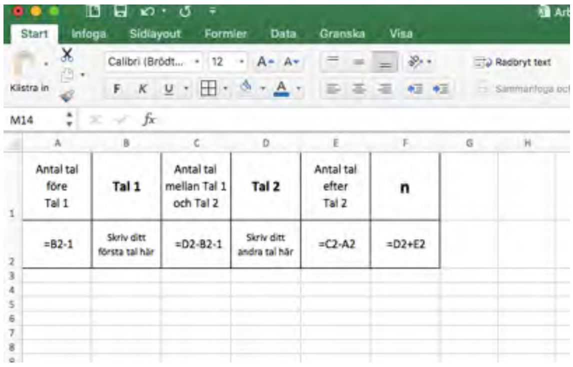
Fyll i tabellen med matematiska uttryck som beskriver varje steg i lösningen.

Vilken slutsats kan man dra om talet n?

(n är alltid jämnt och dubbelt så mycket som $y - x$)

Antal tal före Tal 1	Tal 1	Antal tal mellan Tal 1 och Tal 2	Tal 2	Antal tal efter Tal 2	n
x-1	x	y-x-1	y	y-x-1-(x-1) =y-x-1-x+1 =y-2x	y+(y-2x) =2y-2x =2(y-x)

Vilka krav ska Tal 1 och Tal 2 uppfylla för att problemet ska kunna lösas?
(Båda talen ska vara antingen jämna eller udda. Tal 2 måste vara minst dubbelt så stort som Tal 1.)
Låt eleverna programmera ett arbetsblad i Excel för att lösa andra typer av liknande problem.
(För bättre upplösning på skärmdumpar, se ppt.)

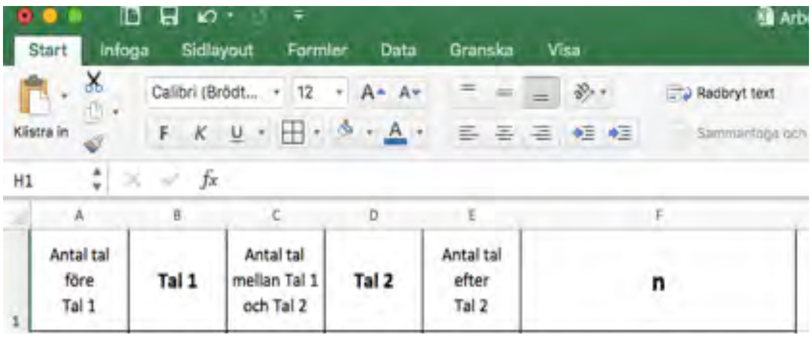


Använd Excel för att lösa följande problem:

Alla heltal från 1 till *n* placeras på samma avstånd runt en cirkel.
En diameter går mellan talet 315 och talet 829. Vilket värde har *n*?

Experimentera i Excel: Testa olika Tal 1 och Tal 2 och se hur *n* förändras. Vilka värde på Tal 1 och Tal 2 är tillåtna? Vilka kan inte användas om man vill få ett värde på *n*?

Komplettera Excelprogrammet genom att lägga till ett villkor som lämnar ett värde på *n* endast om *n* är möjligt.



Andra frågeställningar:
Alla udda heltal från 1 till *n* placeras på samma avstånd runt en cirkel.
En diameter går mellan talet 7 och talet 23. Vilket värde har *n*?

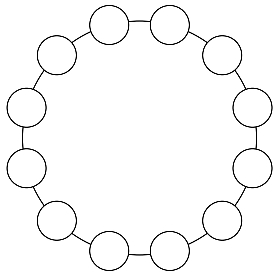
Alla jämna tal mellan 1 och 29 placeras på samma avstånd runt en cirkel, vilka tal går diametern mellan?

Diskutera med eleverna om jämna och udda tal samt skillnaden mellan *”tal från 1 till …”* och *”tal mellan 1 och …”*.

Liknande uppgifter:

Benjamin 2012

17. Vi ska placera talen 1–12 i de små cirklarna i figuren.
Skillnaden mellan talen i två granncirklar ska vara 1 eller 2.
Vilka tal måste vara grannar?



A: 8 och 10 B: 10 och 9 C: 6 och 7 D: 5 och 6 E: 4 och 3

Cadet 2012

19. David vill skriva de tolv talen från 1 till 12 i en cirkel så att två tal intill varandra alltid har differensen 2 eller 3. Vilket av följande alternativ består av tal som måste hamna intill varandra?

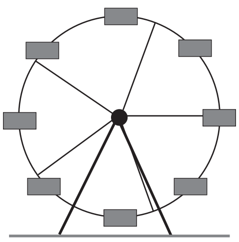
A: 5 och 8 B: 3 och 5 C: 7 och 9 D: 6 och 8 E: 4 och 6

Cadet 2007

20. Fem positiva heltal skrivs upp runt en cirkel. De ska skrivas så att två eller tre intilliggandetal aldrig ger en summa som är delbar med tre.
Hur många av de fem talen är själva delbara med tre?

A: 0 B: 1 C: 2 D: 3 E: det går inte att avgöra

Benjamin 2001

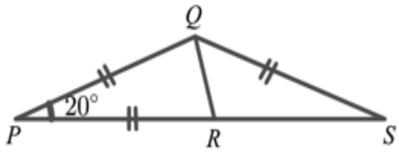


Nöjesfältets huvudattraktion är Pariserhjulet.
Korgarna är jämnt fördelade och numrerade 1, 2, 3, …
När korg nummer 25 står längst ned, står korg nummer 8 högst upp. Hur många korgar har Pariserhjulet?
Bilden här intill visar ett litet pariserhjul med åtta korgar.

A: 33 B: 34 C: 35 D: 36 E: 37

Cadet 12 (se även ppt)

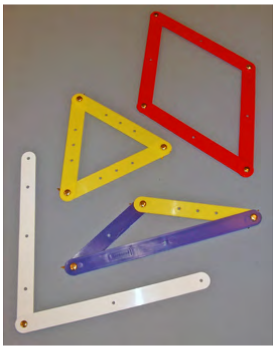
I bilden är $PQ = PR = QS$ och vinkeln $QPR = 20°$. Hur stor är vinkeln RQS?



Visa eleverna hur man betecknar vinklar respektive sidor som är lika stora. Träna även notationen $\angle QPR = \angle RPQ$ och $\angle SRQ = \angle QRS$. Hur kan de andra vinklarna i figuren betecknas?

Vilka fler vinklar kan bestämmas? Är det någon vinkel som inte kan bestämmas?

Diskutera liksidiga, likbenta och oliksidiga trianglar, liksom rätvinkliga, spetsvinkliga och trubbvinkliga. Använd laborativt material och låt eleverna bygga, undersöka och gruppera olika trianglar och vinklar.

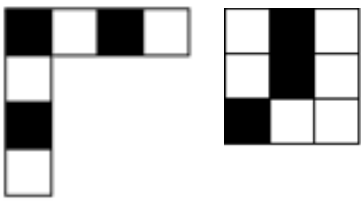


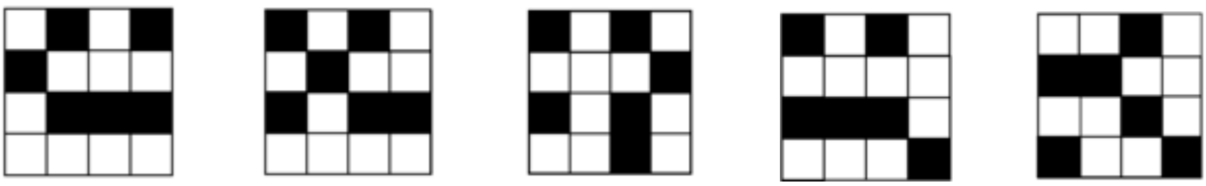
Geostrips

Anglegs

Cadet 13

Vilket mönster kan man *inte* bilda genom att kombinera de två givna bitarna?



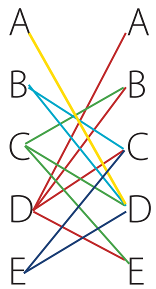


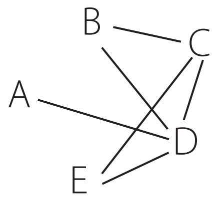
Klipp ut och undersök!

Cadet 14 (se även ppt)

> Alan, Bella, Claire, Dora och Erik träffades för att fika tillsammans. De skakade hand exakt en gång med alla personer de redan kände. Alan skakade hand en gång, Bella skakade hand två gånger, Claire skakade hand tre gånger och Dora skakade hand fyra gånger.
> Hur många gånger skakade Erik hand?

Prova att göra på riktigt. Låt fem elever hälsa på varandra enligt texten samtidigt som några andra elever göra en matteskiss av handhälsningarna. Lyft vikten av att rita och arbeta systematiskt och att kontrollera att alla villkor är uppfyllda.





De båda skisserna kan utgå från samma resonemang. Starta med Dora som hälsar på de fyra andra. Då har Alan redan hälsat klart. Fortsätt med Claire som redan har hälsat på Dora, men inte känner Alan utan hälsar också på Bella och Erik. Då har Bella hälsat på de båda hon känner, dvs Dora och Claire. Med andra ord har Erik hälsat på två personer, Dora och Claire.

Generalisera: Hur blir det om det är 6, 7, 30, *n* personer som ska fika tillsammans?
Låt sedan eleverna konstruera liknande problem.

Cadet 15 (se även ppt)

> Jane spelar basket. Efter att ha skjutit 20 skott har hon träffat 55 % av gångerna.
> När hon skjuter ytterligare fem skott ökar antalet träffade skott till 56 %.
> Hur många av dessa fem skott träffade?

Utgå från förklaringen i facit och jämför tal skrivna i bråkform med tal skrivna i decimalform.

Diskutera eller visa hur man kan förkorta *innan* man gör beräkningar för att få tal som är lättare att hantera:

$$\frac{55}{100} * 20 = \frac{55 * 20}{100} = \frac{55 * {}^{20}/_{20}}{{}^{100}/_{20}} = \frac{55 * 1}{5} = 11$$

$$\frac{56}{100} * 25 = \frac{56 * 25}{100} = \frac{56 * {}^{25}/_{25}}{{}^{100}/_{25}} = \frac{56 * 1}{4} = 14$$

Låt eleverna träna på förkortning av bråk, se nästa sida. Beräkna utan miniräknare och svara i enklaste form:

a) $\frac{8}{13} * \frac{39}{64}$

b) $\frac{15}{28} * \frac{14}{45}$

c) $\frac{22}{27} * \frac{9}{35} * \frac{14}{33}$

d) $\frac{32}{35} / \frac{16}{21}$

e) $\frac{12}{63} / \frac{9}{42}$

f) $\frac{8}{15} * \frac{45}{48} / \frac{27}{12}$

Facit
a) 3/8 b) 1/6 c) 4/45

d) 6/5 = 1 1/5 e) 8/9 f) 2/9

(För bättre upplösning, se ppt.)

Cadet 16 (se även ppt)

Michael har hundar, kor, katter och kängurur som husdjur. Han har totalt 24 husdjur och 1/8 är hundar, 3/4 är *inte* kor och 2/3 är *inte* katter. Hur många kängurur har Michael?

Variera problemet genom att låta bråken vara kvar men utan att ange antalet husdjur.

Michael har hundar, kor, katter och kängurur som husdjur. 1/8 av husdjuren är hundar, 3/4 är *inte* kor och 2/3 är *inte* katter. Hur många kängurur kan Michael ha?

eller

Michael har hundar, kor, katter och kängurur som husdjur. 1/8 av husdjuren är hundar, 3/4 är *inte* kor och 2/3 är *inte* katter. Hur stor del av Michaels husdjur är kängurur?

eller lägg till ett annat antal djur

Michael har 100–120 djur på sin gård. Han har hundar, kor, katter och kängurur. 1/8 av djuren är hundar, 3/4 är *inte* kor och 2/3 är *inte* katter. Hur många kängurur har Michael?

Lösning
3/24 av husdjuren är hundar

hund	hund	hund									

3/4 är *inte* kor → 1/4 = 6/24 är kor

hund	hund	hund	kor	kor	kor	kor	kor	kor			

2/3 är *inte* katter → 1/3 = 8/24 är katter

hund	hund	hund	kor	kor	kor	kor	kor	kor			
katt	katt	katt	katt	katt	katt	katt	katt				

resten, 7/24 är kängurur.

Svar på frågorna ovan
Michael kan ha 7, 14, 21, 28, …, 7*n* kängurur där $n = 1, 2, 3, \ldots$

eller

7/24 av Michaels husdjur är kängurur

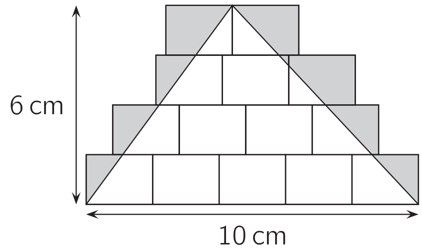
eller

Michael har 105, 112 eller 119 kängurur.

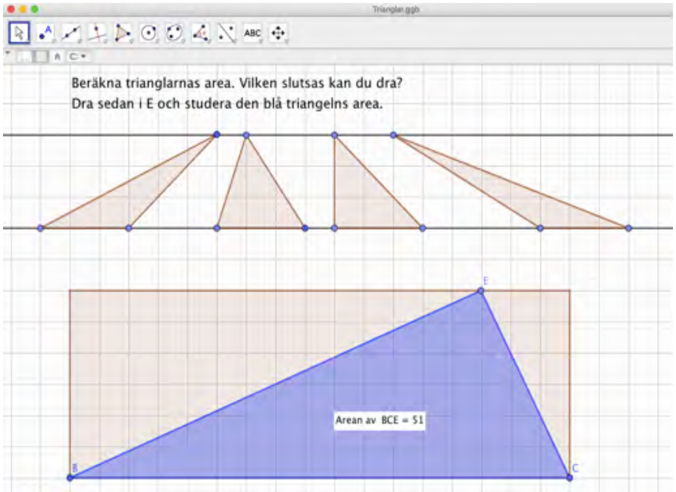
Kontrollera att *alla* villkor är uppfyllda.

Cadet 17 (se även ppt)

Gustav har ritat lika stora rektanglar. Över rektanglarna har han ritat en triangel med basen 10 cm och höjden 6 cm. De delar av rektanglarna som sticker ut utanför triangeln är grå.
Hur stort är området som är grått?



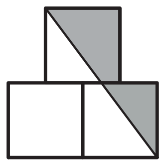
Låt eleverna hitta på egna liknande uppgifter och lösa dem åt varandra. Använd Geogebra för att skapa och lösa följande uppgift.



Eller låt eleverna experimentera med Jonas Hall aktivitet i Geogebra:
www.geogebra.org/m/TJdjAWwV

Ett liknande problem finns i Cadet 2015 nr 10:

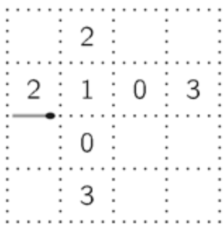
Centrumpunkten för toppkvadraten är precis ovanför det gemensamma hörnet av de två nedre kvadraterna. Varje kvadrat har sidlängden 1. Vilken area har det skuggade området?



A: $\frac{3}{4}$ B: $\frac{7}{8}$ C: 1 D: $\frac{11}{4}$ E: $\frac{11}{2}$

Cadet 18 (se även ppt)

Aylin ska lägga en sluten bana med tändstickor. Hon ska använda så få stickor som möjligt och hon ska placera stickorna längs med streckade linjer på ett papper. Banan ska börja med den utritade stickan. De tal som är utsatta i några av de rutor som bildas av de streckade linjerna talar om hur många stickor som ska ligga runt rutan. Hur många stickor behöver Aylin som minst till hela banan?



I slutet av dokumentet finns en förstorad bild. Låt eleverna använda den för att arbeta konkret med tändstickor.

Diskutera med eleverna det klassiska problemet med kortaste väg: Hur många kortaste vägar finns det mellan två punkter i ett givet rutnät? Här lönar det sig att arbeta med en enklare variant av problemet och generalisera därifrån.

Cadet 19 (se även ppt)

Liam hade en summa pengar och han köpte läsk för allt. Han köpte 50 flaskor för 1 euro styck och sedan sålde han alla flaskor till ett nytt högre pris. När han hade sålt 40 flaskor hade han 10 euro mer än han startade med.
Hur mycket pengar hade han när han hade sålt all läsk?

Här följer ett, jämfört med facit, mer utvecklat lösningsförslag.

Anta att Liam startade med x euro och att han sålde flaskorna för y euro styck.

Liam köpte 50 flaskor läsk för 1 euro styck: $x-50$

Han säljer 40 flaskor för y euro/st: $x-50+40y$

När han sålt 40 flaskor har han 10 euro mer än han startade med:
$x-50+40y=x+10$
$40y=60$
$y=1{,}5$

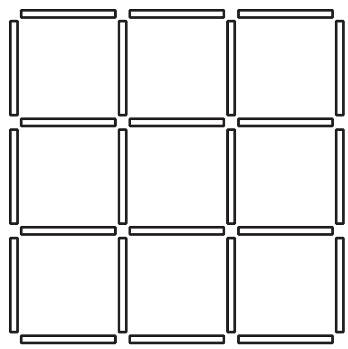
När han sålt alla flaskor har han:
$x-50+50\cdot 1{,}5=$
$x+50(1{,}5-1)=$
$x+50\cdot 0{,}5=$
$x+25$

Liam har alltså 25 euro mer än det han startade med.

Poängtera för eleverna vikten av att undersöka att *alla* villkor är uppfyllda.

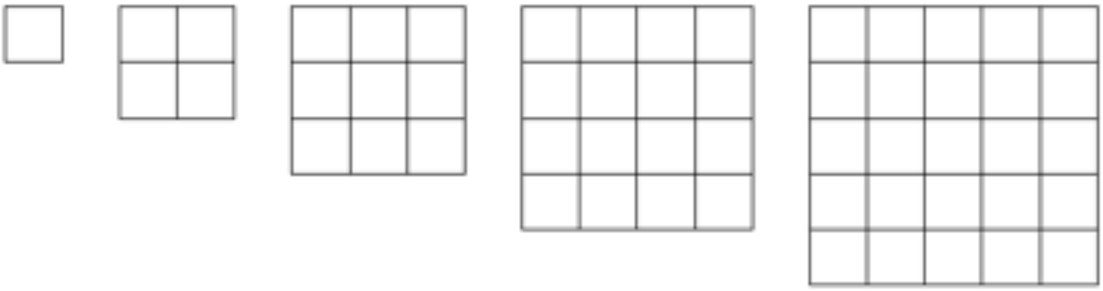
Cadet 20 och 22 (se även ppt)

20. Natasha har blå, röda, gula och gröna stickor. Hon vill göra ett rutnät med storleken 3 x 3.
Varje 1 x 1-ruta i rutnätet ska ha olika färg på de fyra sidorna.
Hur många gröna stickor behöver hon som minst?



Låt eleverna lösa uppgiften konkret med färgade stickor eller rita, se kopieringsblad sist i detta dokument. Vilket är det största antalet gröna stickor hon kan använda?

Alternativ uppgift:
Undersök minsta/högsta antalet gröna stickor om den stora kvadratens sida ändras.
Vilka slutsatser går att dra?



Påminn eleverna vikten av att:

– arbeta systematisk
– titta på ett enklare fall av problemet
– sammanfatta observationerna i en tabell
– använd tydliga rubriker
– leta efter mönster och samband.

a) Hur många gröna stickor kan hon som lägst/högst använda om den stora kvadratens sida istället består av 4 stickor?

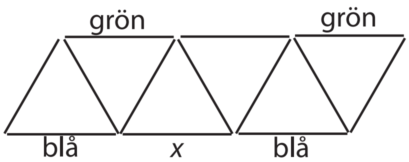
b) Hur många gröna stickor kan hon som lägst/högst använda om den stora kvadratens sida består av 84 stickor?

c) Hur många gröna stickor kan hon som lägst/högst använda om den stora kvadratens sida består av n stickor?

Prata om kvadrattal och rötter.

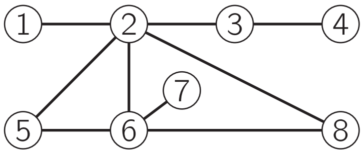
Ett liknande problem finns i Cadet 2015 nr 15:

Var och en av stickorna som figuren består av ska vara antingen blå, grön eller röd. Fyra stickor vet vi redan färgen på. Sidorna i var och en av trianglarna ska ha olika färg. Vilken färg kan stickan som är markerad med x ha?

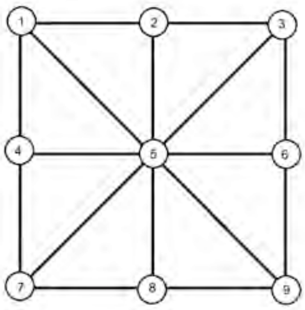


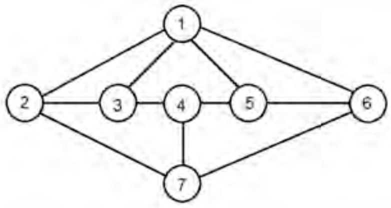
A: grön B: röd C: blå D: antingen röd eller blå E: omöjligt att veta

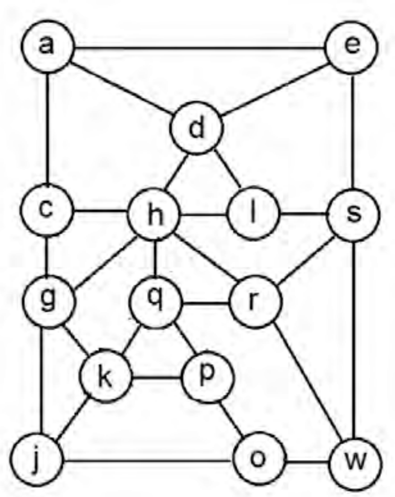
22. Prab ska färga var och en av de åtta ringarna i bilden antingen röd, gul eller blå. Han ska göra det så att två ringar som är direkt sammanbundna med varandra med en linje ska ha olika färger. Då finns det två ringar som alltid måste färgas lika. Vilka två ringar är det?



Vilka ringar måste få samma färg om man målar med tre färger?





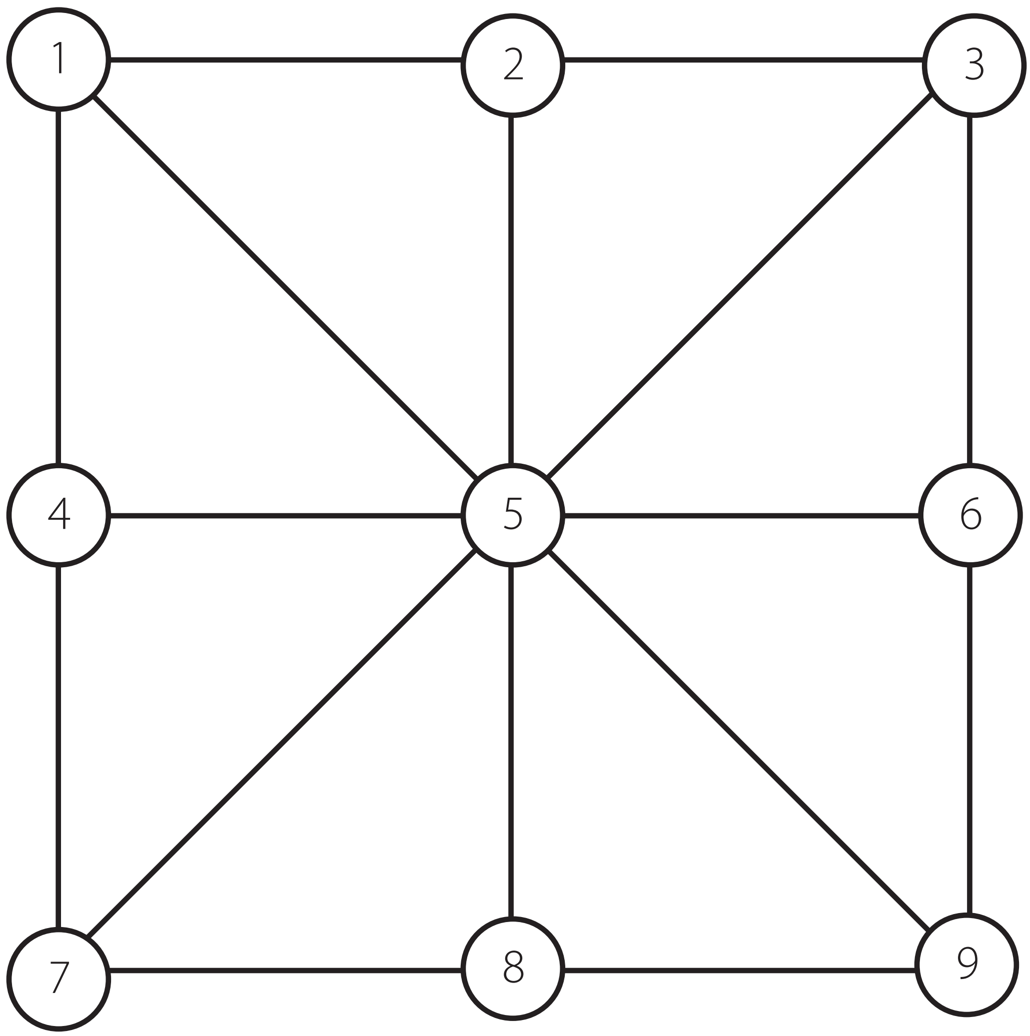


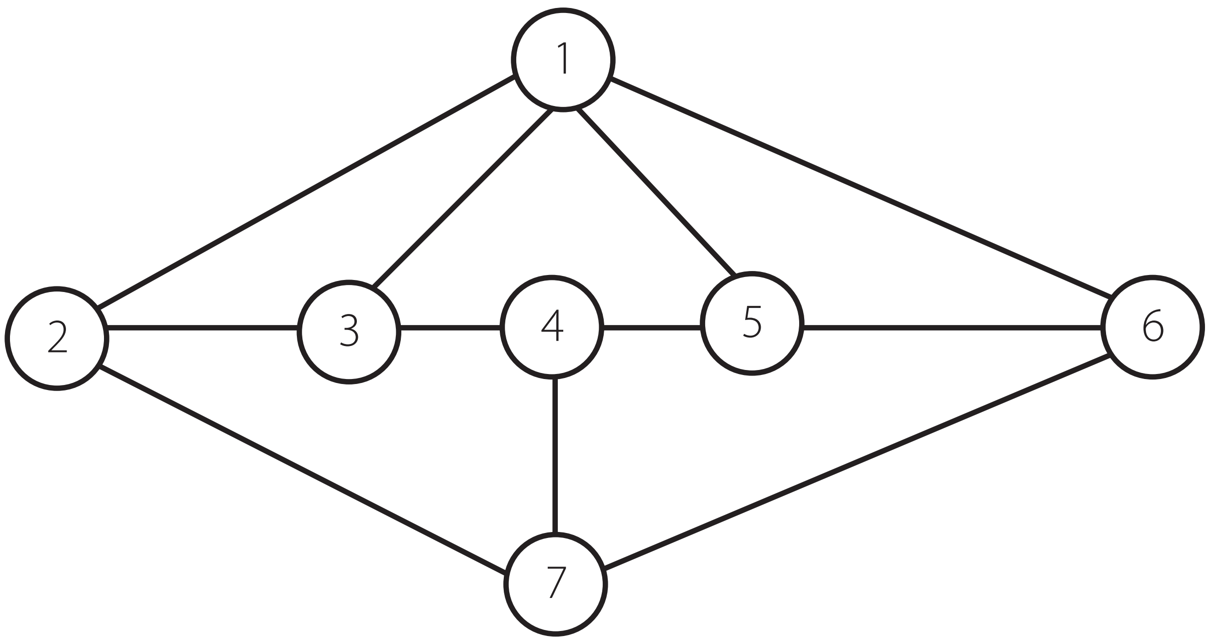
(Bilderna finns i större format på kommande sidor.)

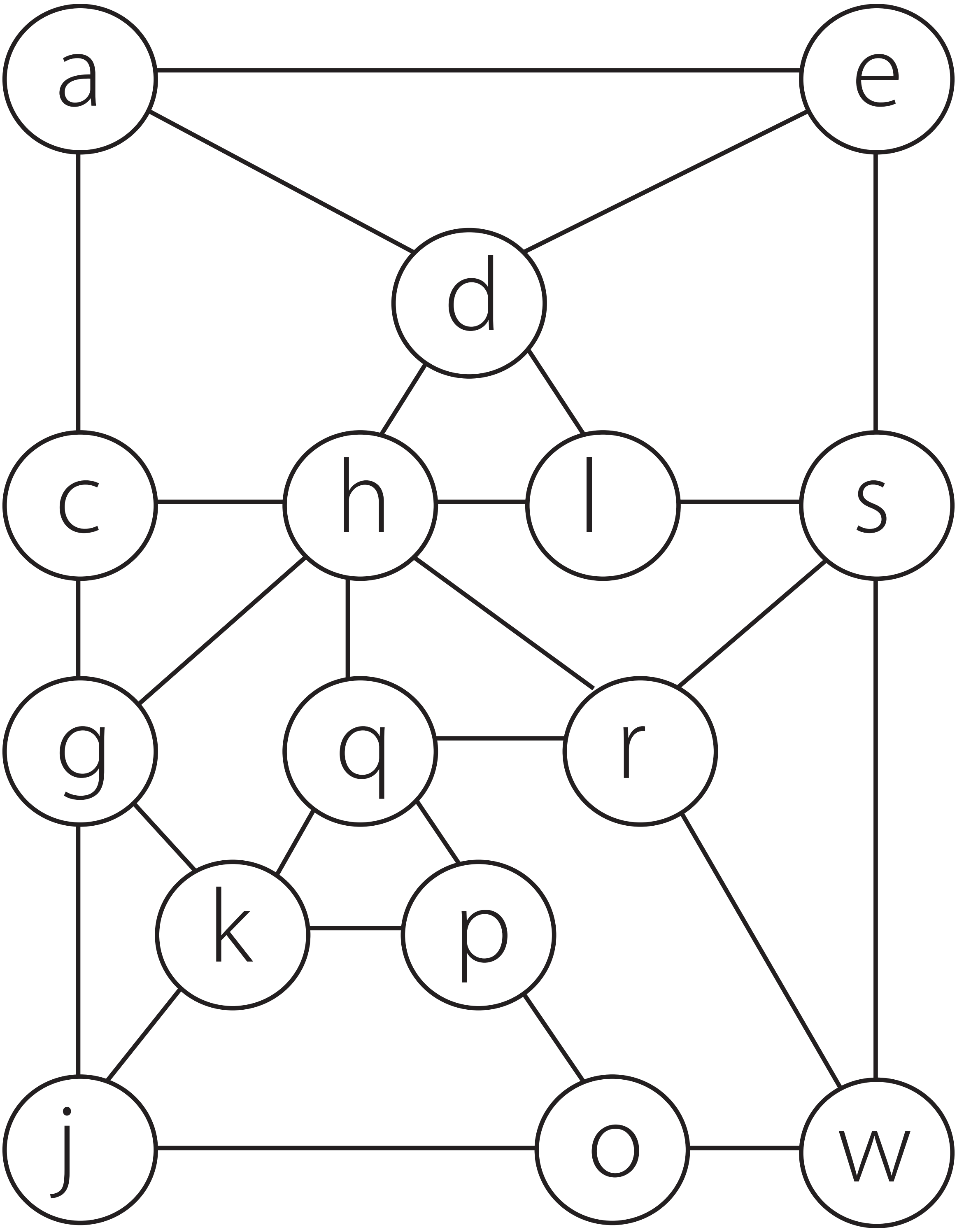
Uppgift 20 och 22 kan användas som inspiration för att introducera fyrfärgssatsen. Den beskrivs så här på Wikipedia: ”Satsen var den första större matematiska sats som bevisades med hjälp av en dator. Satsen säger att det behövs högst fyra färger för att färglägga varje möjlig geografisk karta så att inga angränsande regioner har samma färg. Två regioner betraktas som angränsande om de har en gemensam gräns, inte bara en punkt.”

Berätta om satsen för eleverna, samarbeta med bild eller kopiera och arbeta med illustrationerna nedan. Be eleverna dela upp bilden i valfria mindre delar och färglägga med fyra färger så att inga angränsande regioner har samma färg.

En större kartliknande illustration att färglägga finns i *Matte med mening*, Kristin Dahl.


1
2
3
4
5
6
7
8
9


1
2
3
4
5
6
7


a
e
d
c
h
l
s
g
q
r
k
p
j
o
w

Cadet 21 (se även ppt)

> Elisabet hade en skål med 60 chokladbitar. På måndagen åt hon 1/10 av dem.
> På tisdagen åt hon 1/9 av dem som blev kvar, på onsdagen 1/8 av resten, på torsdagen 1/7 av resten och så vidare tills hon åt hälften av de chokladbitar som var kvar från dagen innan.
> Hur många bitar blev sedan kvar?

Diskutera lösningen med eleverna och ifrågasätt om det alltid är så. Spelar antalet chokladbitar från början någon roll? Vad händer om det var 50 bitar från början? 20 bitar?
Generalisera: Vad händer om det var x bitar från början? Fungerar det om det inte är multiplar av 10?
Många problem som förekommer i Kängurun bygger på heltalsmatematik. Diskutera med eleverna skillnaden mellan diskreta (heltal och rationella tal) och kontinuerliga (reella tal) värden.

Uppgiften kan omformuleras genom att antalet chokladbitar inte anges från början. Frågan kan då istället vara:

Vilken dag hade Elisabet hälften så många kvar som dagen innan?

eller

Efter hur många dagar hade Elisabet hälften så många kvar som dagen innan?

Ny fråga:
Elisabet har en skål med chokladbitar. Hon började att äta 1/10 av chokladen på måndag, sedan åt hon 1/9 av resten på tisdag, 1/8 av resten på onsdag, 1/7 av resten på torsdag och så vidare tills det är hälften kvar från dagen innan. Då har hon 13 chokladbitar kvar. Hur många chokladbitar fanns i skålen från början?

Uppgiften lämpar sig för KLAG, vilket är en modell för att använda fyra olika representationsformer vid lösning: Konkret, Logisk/språklig, Aritmetisk/algebraisk och Grafisk/geometrisk. Läs mer om KLAG-modellen i Nämnaren, sök i artikelregistret på "Rika lösningar på rika problem". Det finns flera artiklar som bland annat handlar om att välja glasskulor, felblandad saft, att dela smörgåsar och om tornbygge.

> Elisabet har en skål med 50 chokladbitar. Hon började att äta 1/10 av chokladen på måndag, sedan åt hon 1/9 av resten på tisdag, 1/8 av resten på onsdag, 1/7 av resten på torsdag och så vidare tills det är hälften kvar från dagen innan. Hur mycket har hon kvar?

Konkret:
Använd godis eller annat plockmaterial. Låt eleverna arbeta i grupp. Varje grupp testar med olika antal chokladbitar, t ex 10, 20, 30, 40, 50, 60. Dela ut påsar med olika antal bitar till olika grupper. Sammanfatta klassens resultat i en tabell. Diskutera tillsammans vad ni kommer fram till.

Logisk/språklig:
50 chokladbitar från början.
Första dagen äter hon en tiondel, 5 st och har 45 st kvar.
Dag 2 äter hon 1/9 → 5 st och har 40 st kvar.
Dag 3 äter hon 1/8 → 5 st och har 35 st kvar.
Dag 4 äter hon 1/7 → 5 st och har 30 st kvar.
Dag 5 äter hon 1/6 → 5 st och har 25 st kvar.
Dag 6 äter hon 1/5 → 5 st och har 20 st kvar.
Dag 7 äter hon 1/4 → 5 st och har 15 st kvar.
Dag 8 äter hon 1/3 → 5 st och har 10 st kvar.
Dag 9 äter hon 1/2 → 5 st och har 5 st kvar, det är hälften så mycket som hon hade dagen innan.

Svar: Hon har 5 chokladbitar kvar.

Aritmetisk/algebraisk:

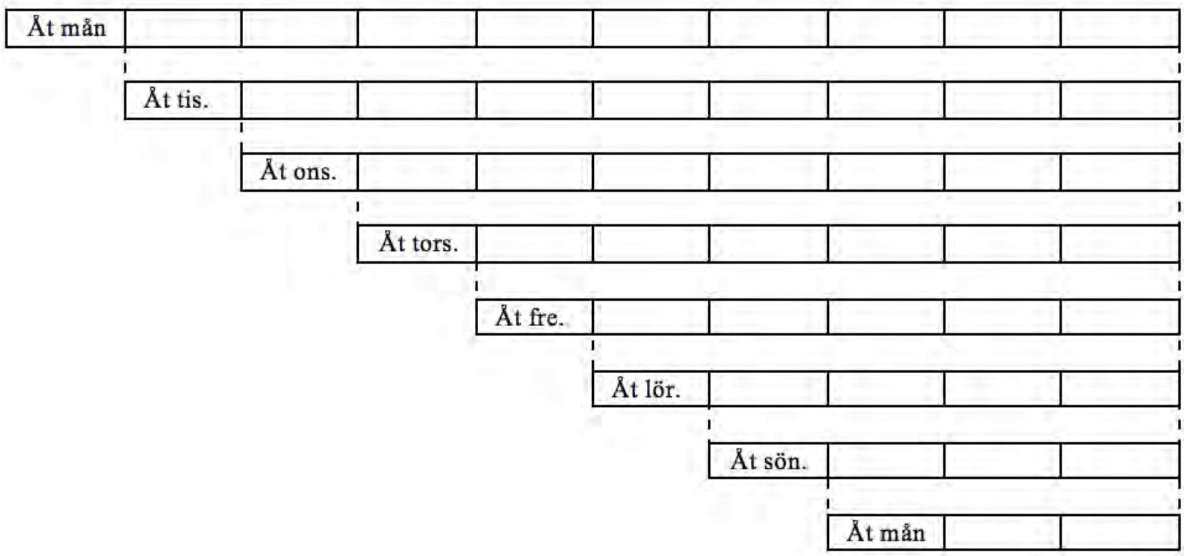
		50 chokladbitar från början		
		Ätit		Kvar
	Veckodag	Del	Antal bitar	Antal bitar
Dag 1	måndag	1/10	5	45
Dag 2	tisdag	1/9	5	40
Dag 3	onsdag	1/8	5	35
Dag 4	torsdag	1/7	5	30
Dag 5	fredag	1/6	5	25
Dag 6	lördag	1/5	5	20
Dag 7	söndag	1/4	5	15
Dag 8	måndag	1/3	5	10
Dag 9	tisdag	1/2	5	5

		x chokladbitar från början		
		Ätit		Kvar
	Veckodag	Del	Antal bitar	Antal bitar
Dag 1	måndag	1/10	$x/10$	$9x/10$
Dag 2	tisdag	1/9	$x/10$	$8x/10$
Dag 3	onsdag	1/8	$x/10$	$7x/10$
Dag 4	torsdag	1/7	$x/10$	$6x/10$
Dag 5	fredag	1/6	$x/10$	$5x/10$
Dag 6	lördag	1/5	$x/10$	$4x/10$
Dag 7	söndag	1/4	$x/10$	$3x/10$
Dag 8	måndag	1/3	$x/10$	$2x/10$
Dag 9	tisdag	1/2	$x/10$	$x/10$

Hon har $x/10$ chokladbitar kvar: $x/10 = 50/10 = 5$

Svar: Hon har 5 chokladbitar kvar.

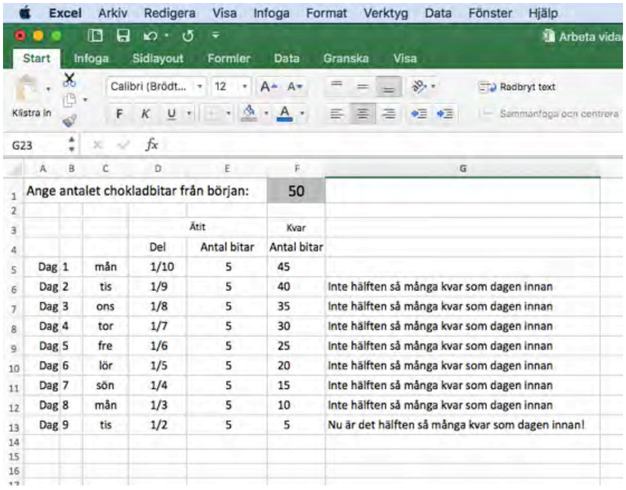
Grafisk/geometrisk:
Rita tills det som är kvar är hälften så många som dagen innan.



I bilden ser vi att när hon har en tiondel kvar av antalet chokladbitarna från början, är det hälften så många som dagen innan. En tiondel av 50 är 5.

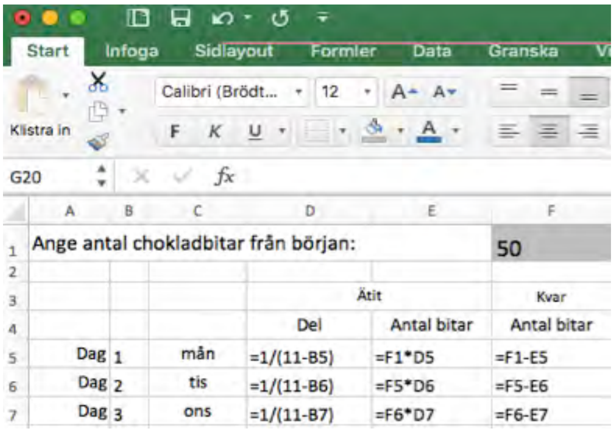
Svar: Hon har 5 chokladbitar kvar.

Låt eleverna utforska i Excel vad som händer när antalet bitar från början ändras.



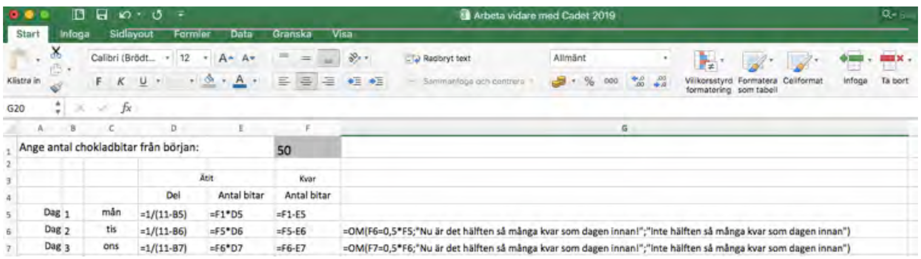
	A	B	C	D	E	F	G
1	Ange antalet chokladbitar från början:					50	
2							
3					Åtit	Kvar	
4				Del	Antal bitar	Antal bitar	
5	Dag	1	mån	1/10	5	45	
6	Dag	2	tis	1/9	5	40	Inte hälften så många kvar som dagen innan
7	Dag	3	ons	1/8	5	35	Inte hälften så många kvar som dagen innan
8	Dag	4	tor	1/7	5	30	Inte hälften så många kvar som dagen innan
9	Dag	5	fre	1/6	5	25	Inte hälften så många kvar som dagen innan
10	Dag	6	lör	1/5	5	20	Inte hälften så många kvar som dagen innan
11	Dag	7	sön	1/4	5	15	Inte hälften så många kvar som dagen innan
12	Dag	8	mån	1/3	5	10	Inte hälften så många kvar som dagen innan
13	Dag	9	tis	1/2	5	5	Nu är det hälften så många kvar som dagen innan!

Så här kan programmet se ut. Markera sedan från A6 till F7 och dra nedåt för att kopiera tills *hälften så många är kvar.*



	A	B	C	D	E	F
1	Ange antal chokladbitar från början:					50
2						
3					Åtit	Kvar
4				Del	Antal bitar	Antal bitar
5	Dag	1	mån	=1/(11-B5)	=F1*D5	=F1-E5
6	Dag	2	tis	=1/(11-B6)	=F5*D6	=F5-E6
7	Dag	3	ons	=1/(11-B7)	=F6*D7	=F6-E7

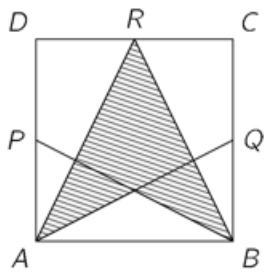
Vill du att ditt program självt kontrollerar villkoret kan du lägga till en OM-sats. Markera sedan A6–G7 och dra nedåt för att kopiera tills hälften så många är kvar.



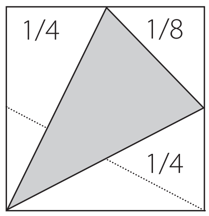
	A	B	C	D	E	F	G
1	Ange antal chokladbitar från början:					50	
2							
3					Åtit	Kvar	
4				Del	Antal bitar	Antal bitar	
5	Dag	1	mån	=1/(11-B5)	=F1*D5	=F1-E5	
6	Dag	2	tis	=1/(11-B6)	=F5*D6	=F5-E6	=OM(F6=0,5*F5;"Nu är det hälften så många kvar som dagen innan!";"Inte hälften så många kvar som dagen innan")
7	Dag	3	ons	=1/(11-B7)	=F6*D7	=F6-E7	=OM(F7=0,5*F6;"Nu är det hälften så många kvar som dagen innan!";"Inte hälften så många kvar som dagen innan")

Cadet 23 (se även ppt)

Kvadraten *ABCD* har mittpunkterna *P*, *Q* och *R* på respektive sidor *DA*, *BC* och *CD*.
Hur stor del av kvadraten är skuggad?

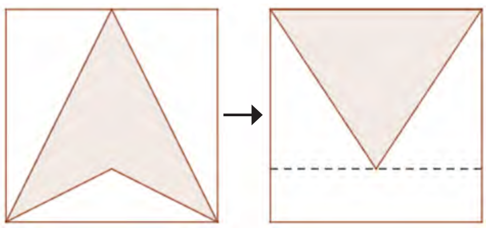


Ta upp likbenta trianglar och hur man markerar vinklar och sidor som är lika stora. Kan gås igenom med uppgift 17. Ett alternativt sätt att rita:



Titta gemensamt på hur man kan rita om trianglar i fyrhörningar och behålla samma area, t ex:
Hur stor del av rektangeln är skuggad?

I vårt fall hade vi en kvadrat:
Det skuggade området är häften av 3/4, dvs 3/8.



Låt eleverna konstruera liknande uppgifter i Geogebra.

Se även Student 2019:15.

Cadet 24

Ett tåg består av 18 vagnar och det finns 700 passagerare på tåget. I fem på varandra följande vagnar finns totalt 199 passagerare, oavsett var i tåget de fem vagnarna är placerade. Hur många passagerare finns det i de två mittersta vagnarna på tåget?

Det finns liknande uppgifter i Cadet 2016 nr 24

Ett tåg har fem vagnar där det finns minst en passagerare i varje vagn. Två passagerare kallas ”grannar” om de antingen sitter i samma vagn eller i en angränsande vagn. Varje passagerare har antingen exakt fem grannar eller exakt tio grannar. Hur många passagerare finns det på tåget?

A: 13 B: 15 C: 17 D: 20 E: Det finns flera möjliga antal

och Benjamin 2015 nr 14:

På Gröna gatan ligger 9 hus i en rad. I varje hus bor det minst en person.
I två hus som ligger bredvid varandra bor det inte fler än 6 personer sammanlagt.
Vilket är det största antal personer som kan bo på Gröna gatan?

A: 23 B: 25 C: 27 D: 29 E: 31

	2		
2	1	0	3
	0		
	3