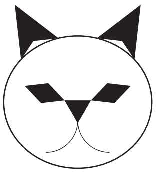
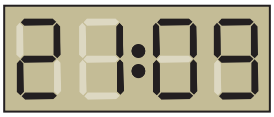
Facit och kommentarer – Benjamin 2019

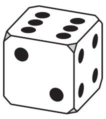
1 B 

2 C 

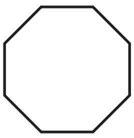
3 D 419 — $380 + 39 = 419$ eller $380 + 20 + 19 = 419$

4 C 

5 E 1 — Hälften av 26 barn är 13 barn. Eftersom det finns 12 pojkar i gruppen måste det som minst vara en flicka med på promenaden.

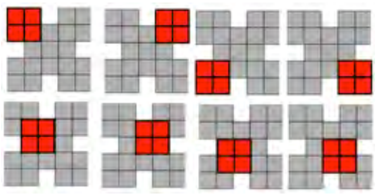
6 E 

På alla de andra tärningarna kan två av de synliga sidorna ge summan 7. Om två sidor som inte är motstående har summan 7 måste samma tal också finnas på en motstående sida. Men eftersom det bara finns sex sidor kan varje tal endast finnas på en sida.

7 D 

Alla de andra formerna finns i figuren.

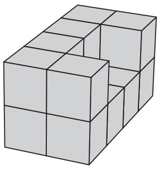
8 D 8 — Bilden visar alla möjligheter:



9 C 20 — När man summerar tre udda tal blir summan alltid udda. Tom kan därmed inte få 20, som är ett jämnt tal. Det sjätte udda talet är 11, så han kan få varje udda tal från 3 $(3 \cdot 1)$ till 33 $(3 \cdot 11)$.

10 B 12 — På två år kommer summan av åldrarna att öka med $60 - 36 = 24$ år. Antalet kängurur är därför $24/2 = 12$.

11 A



Om vi utgår från B kan vi se på hur en ytterligare kloss i övre högra raden (där skillnaden mellan alternativen finns) påverkar antalet sidoytor:
En ny kloss döljer två sidoytor på det redan byggda, men har fyra nya sidoytor.
I två av alternativen, A och C, har två klossar lagts till. I A har båda dessa fyra sidoytor som ska målas, medan de i C endast har tre sidoytor som ska målas. Alltså har A flest sidoytor som ska målas.

12 C 9

Om vi ställer upp och betecknar de dolda siffrorna A och B får vi:

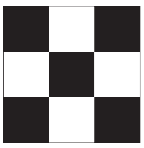
$$\begin{array}{r} 2\,4\,3 \\ 1\,A\,7 \\ +\,B\,2\,6 \\ \hline 8\,2\,6 \end{array}$$

$3+7+6=16$, vilket ger en minnessiffra till tiotalskolumnen.
$1+4+A+2$ måste vara 12, alltså är $A=5$.
Hundratalen blir då $1+2+1+B=8$, så $B=4$.
$A+B=5+4=9$.

13 C 3

Om Riri hade ätit 5 spindlar om dagen hade hon ätit $9\cdot 5=45$ spindlar. Hon har ätit 60 st, dvs $60-45=15$ extra. Dessa 15 har hon ätit under 3 dagar då hon varit mycket hungrig, 15 spindlar/5 spindlar $=3$.

14 B



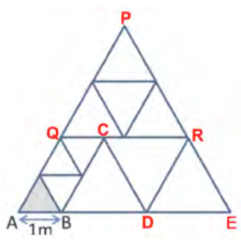
Endast i alternativen B och D är det fler svarta rutor än vita. I de andra är antalet svarta och vita lika och därmed areorna densamma.

Skillnaden mellan det vita och svarta området i B är $\frac{1}{9}$ och i D är det $\frac{1}{25}$. Det innebär att den svarta arean är störst i B.

Vi kan också jämföra de svarta areorna: I B är den $\frac{5}{9}$ och i D är den $\frac{13}{25}$.

15 A 15 m

Sidlängderna på de fyra små liksidiga trianglar nere till vänster är 1 m. Sidlängden på triangeln bredvid, BCD, är dubbelt så lång dvs 2 m och triangeln är lika stor som den till höger på basen.
Alltså är sidan AE 1 m + 2 m + 2 m = 5 m.
Sidan QR är QC + CR = 1 m + 2 m = 3 m.
Triangeln QPR består av 4 lika trianglar, alltså är sidorna QP och PR också 3 m vardera. Då är sidan AP = 2 m + 3 m = 5 m och sidan EP är lika lång. Hela den stora triangeln är liksidig med omkretsen $3\cdot 5\,\text{m}=15\,\text{m}$.



Alternativ lösning:
Alla deltrianglarna är liksidiga vilket betyder att alla vinklar är 60°.
Tre av dessa vinklar är samtidigt den stora triangelns vinklar så den stora triangeln är också liksidig.
Sidlängderna på de fyra små liksidiga trianglar nere till vänster är 1 m.
Sidlängden på triangeln bredvid, BCD, är dubbelt så lång dvs 2 m och triangeln är lika stor som den till höger på basen. Alltså är basen 5 m och omkretsen 15 m.

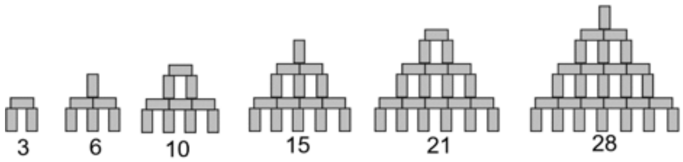
16 C 9

Efter förvandlingen ska det vara 10 djur av varje sort. Vi kan resonera oss fram:
När 5 katter har förvandlats till möss är katterna 10 st. Innan den förvandlingen var de alltså 15, men då hade 6 hundar förvandlats till katter. Antalet katter hade alltså från början varit $15 - 6 = 9$.
När 5 katter blir möss är mössen 10 st, alltså var de 5 från början och hundarna var $10 + 6 = 16$ st. $16 + 9 + 5 = 30$ vilket det ska vara.

17 D 82

Den sista säcken med guldmynt delades lika mellan de 41 rövarna. Eftersom de då fick 2 mynt var så innehöll säcken 82 mynt, liksom också de andra säckarna.

18 B 11 cm



Mönstret för antalet klossar följer triangeltalen. Det är alltså den sjätte figuren som innehåller 28 klossar. Den kommer att ha fyra våningar med stående klossar och tre med liggande.
Höjden blir alltså $4 \cdot 2\,\text{cm} + 3 \cdot 1\,\text{cm} = 11\,\text{cm}$.
Man kan också se det som fyra våningar där den översta våningen saknar tak, vilket ger $4 \cdot (2\,\text{cm} + 1\,\text{cm}) - 1\,\text{cm} = 11\,\text{cm}$.

19 C 41

Den minsta gemensamma multipel för 5, 10 och 15 är 30.
De tre tal vi inte ser ska alltså vara de tal som multiplicerat med 5, 10 respektive 15 ger 30. Det är talen 6, 3 och 2; $6 \cdot 5 = 3 \cdot 10 = 2 \cdot 15 = 30$.
Summan av de sex talen är $5 + 6 + 3 + 10 + 2 + 15 = 41$.

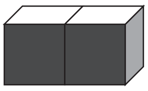
20 E 90 g

Om vi tar bort en svart kula från vardera vågskål i den högra vågen bevaras jämvikten. Det ger att 2 svarta och 1 vit kula tillsammans väger 30 g. Sammanlagt har vi 6 svarta och 3 vita kulor, vilket ger $3 \cdot 30\,\text{g} = 90\,\text{g}$.

21 C två

$$\bigcirc \xrightarrow{+1} \bigcirc \xrightarrow{+1} \bigcirc \xrightarrow{\times 3} \bigcirc \xrightarrow{+2} \bigcirc \xrightarrow{\times 2} \bigcirc$$

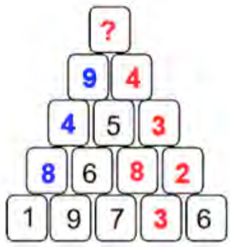
Ett, men bara ett, av talen i de tre första ringarna är delbart med 3, eftersom det är tre på varandra följande tal.
Talet i den fjärde ringen kommer alltid att vara delbart med 3, eftersom det är ett resultat av multiplikation med 3.
Ett tal som är delbart med 3 och adderas med 2 är inte delbart med 3, inte heller det tal man får om ett tal som inte är delbart med 3 multipliceras med 2.

22 B 

Ingen av lådans kanter har två vita kvadrater.

23 D 26

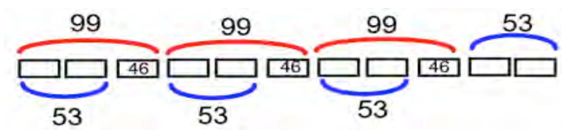
Bilden visar hur pyramiden ursprungligen såg ut. De burkar Malin slog ner är märkta med rött.
Malin fick 25 poäng: $3+8+2+3+4+?=25$.
Burken märkt med ? är alltså värd 5 p.
William slog också ner burken med ? så han fick alltså: $8+4+9+5=26$ poäng.



Alternativ lösning:
Efter Malins kast är det 1 p mer kvar än efter Williams kast. William måste därför ha slagit ner 1 p mer än Malin. $25+1=26$.

24 D 46

I tre vagnar placerade efter varandra reser 99 passagerare.
Det innebär att i de nio första vagnarna finns det $3 \cdot 99 = 297$ passagerare.
I vagn 10 och 11 finns det alltså $350 - 297 = 53$ passagerare.
Vagn 9 måste därför ha $99 - 53 = 46$ passagerare.
Eftersom tre vagnar i rad, oavsett var i tåget man väljer dem, har 99 passagerare, måste dessa vara utspridda efter ett mönster så att vagn 1, 4, 7, 10 har samma antal passagerare, liksom 2, 5, 8, 11 och 3, 6, 9.
Vagn 6 har därför 46 passagerare.



Alternativ lösning:
I vagnarna 1 till 6 finns $2 \cdot 99 = 198$ passagerare
I vagnarna 7 till 11 finns $350 - 198 = 152$ passagerare
I vagnarna 6 till 11 finns $2 \cdot 99 = 198$ passagerare
I vagnarna 1 till 5 finns $350 - 198 = 152$ passagerare
I vagn 6 finns $350 - 2 \cdot 152 = 46$ passagerare

Arbeta vidare med Benjamin 2019

Efter tävlingen hoppas vi att problemen ska bli underlag för många intressanta diskussioner. I samband med genomgång passar det bra att låta eleverna arbeta med lösningarna i grupp. Uppmuntra dem att hitta så många olika lösningssätt som möjligt, men låt alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen.

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar: Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar? Är de tydliga? Är resonemanget korrekt? Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem? Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. När de upplever att det är en del av undervisningen brukar det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem, arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning.

Alla problem kan naturligtvis diskuteras utifrån valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra dessa och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika uttrycksformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur den konkreta representationen uttrycks i ord och med symboler. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

- Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?
- Påminner problemet om något annat problem vi har löst tidigare?
- Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?
- Vilka nya frågor kan problemet väcka?
- Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. Låt eleverna göra förändringar i problemet så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt. De felaktiga svarsalternativen kan också användas som utgångspunkt för diskussion om vad som skulle kunna leda fram till dessa svar: ”Hur tror ni att den som har fått alternativ *a* som svar har tänkt?”

Matematiskt arbete handlar både om matematikinnehållet och om strategier, vilket eleverna behöver få diskutera för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem också få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. I arbete med problem bör förmågorna att *resonera* och *argumentera* vara centrala. Om inte tydliga resonemang kommer fram i elevernas redovisningar kan du visa hur ett sådant kan föras. Eleverna behöver få se vad det innebär att föra ett resonemang.

I samband med diskussion om problemen kommer ett antal termer och begrepp att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Här har vi sorterat förslag under rubrikerna *Tal*, *Geometri och rumsuppfattning*, *Mönster* samt *Problemlösning och resonemang*. Naturligtvis kan problemen också passa under en annan rubrik beroende på vad man väljer att betrakta i problemet. Ett bra sätt att själv bilda sig en uppfattning om ett problems kvaliteter är att lösa det. Då blir man medveten om hur man själv tänker och vilka samband som används. Lös därför gärna problemen själv och komplettera våra förslag med egna idéer.

Många problemtyper återkommer år från år, i olika skepnader och i olika varianter. Vi föreslår här några gamla problem som kan användas i samband med arbetet med årets, men det finns många fler att hämta på ncm.gu.se/kanguru, där alla tidigare omgångar är samlade. Där finns också facit och förslag på hur man kan arbeta vidare med de problemen. Tidigare problem inom området geometri finns dessutom samlade i boken *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. I de kommande förslagen hänvisas ibland till aktiviteter i Strävorna, de återfinns på ncm.gu.se/stravorna.

Tal

Med utgångspunkt i problem kan vi diskutera egenskaper hos tal. Elever i denna ålder kan resonera om bl a räknesättens innebörd, faktorisering och delbarhet. Problemen utmanar också elevernas strategiska tänkande och förhoppningsvis väcker de frågor om tal. Uppmuntra därför eleverna att ställa fördjupande frågor. Hjälp dem också att se samband både inom matematiken och mellan matematiken och omvärlden.

2 Mayafolket

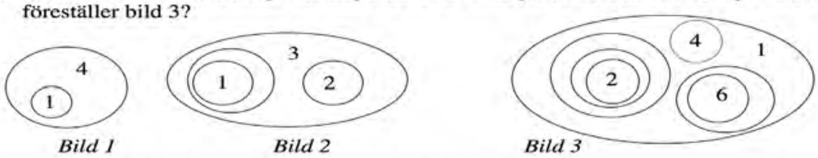
Berätta mer om Mayafolkets talsystem som har basen 20, jämfört med vår bas 10. Titta på vilka tecken (se problemformuleringen) de använde för 1 och 5 för att skriva talen från 1 till 19. Låt eleverna skriva dessa tal med de två tecknen.

Ta också upp Babyloniernas talsystem med bas 60, vilket vi fortfarande kommer i kontakt med eftersom det är nära kopplat till tid (minuter, sekunder etc).

Titta på andra positionssystem, exempelvis det binära talsystemet.

Liknande problem:
Benjamin 2001

8. Medlemmarna i ett hemligt sällskap skriver 14 som på bild 1 och 123 som på bild 2. Vilket tal föreställer bild 3?



A 1246 **B** 2461 **C** 2641 **D** 462 **E** annat svar

Ecolier 2002

9. På planeten Krypton skriver man *ental* med tecknet ⊙, *tiotal* med tecknet ♓ och *sextiotal* med tecknet ♋.

Talet 22 skrivs alltså ♓♓ ⊙⊙
och 75 skrivs ♋ ♓ ⊙⊙⊙⊙⊙

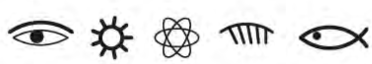
Hur skriver man 124?

A: ♓♋♋⊙⊙⊙⊙ B: ♋♋♓♓⊙⊙⊙⊙ C: ♋♓♓⊙⊙⊙⊙

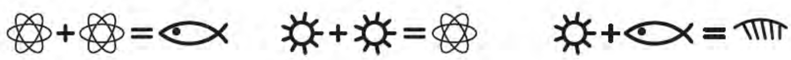
D: ♋⊙⊙⊙⊙♓♓♋ E: ♋♋⊙⊙⊙⊙

Ecolier 2018

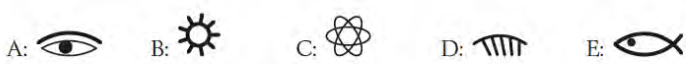
21 Ett hemligt språk har symboler för olika tal. De fem symbolerna betyder 1, 2, 3, 4 och 5.



Det är hemligt vilken symbol som betyder vilket tal.
Det enda vi får veta är:

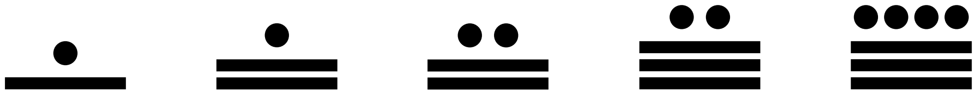


Vilken symbol betyder talet 3?



Ecolier 2019

2 Punkten står för 1 och strecket står för 5.  visar talet 8.
Vilken bild visar talet 12?



A B C D E

Låt eleverna välja ett av språken/skrivsätten och formulera egna uppgifter. En utmaning är sedan att göra beräkningar av tal skrivna i det valda språket.

3 Prioriteringsregler

Hur beräknar eleverna $20 \cdot 19 + 20 + 19$? Diskutera olika metoder och ta upp prioriteringsreglerna.

Strävan *3A Tornblåsaren* är ett spel som helt avgörs genom tur eller otur med tärningskasten, men ger eleverna möjlighet att hantera procedurer och lösa rutinuppgifter på ett sätt som många tycker är kul och gärna håller på med ofta och länge. Förutom att öva tabellkunskaper kan aktiviteten användas vid introduktion av parenteser och därmed resonemang om prioriteringsreglerna.

Liknande problem:
Benjamin 2017

1 Vilken summa är störst?

A: $201+720+17$ B: $20+17+20+17$ C: $2017+2017$ D: $2+0+1+7+2+0+1+7$ E: $20+1720+17$

4 Digital klocka

Vilka tidpunkter kan en digital klocka visa med siffrorna 0, 1, 2 och 9? Hur lång tid är det mellan de olika tidpunkterna?

Liknande problem:
Ecolier 2007

12 En digitalklocka visar tiden 20:07. Hur länge dröjer det tills klockan nästa gång visar en tid med samma fyra siffror (i någon ordning)?

A: 4 h 20 min B: 6 h 0 min C: 10 h 55 min D: 11 h 13 min E: 24 h 0 min

Cadet 2011

3 Min digitalklocka visar just nu tiden 20:11. Hur många minuter är det tills klockan nästa gång visar siffrorna 0, 1, 1, 2 i någon ordning?

A: 40 B: 45 C: 50 D: 55 E: 60

Junior 2006

3 Hur många gånger mellan 00:00 och 23:59 visar en digitalklocka siffrorna 2, 0, 0 och 6 i någon ordning?

A: 1 B: 2 C: 3 D: 4 E: 5

samt Ecolier 2003:12

5 Promenad

Hur många barn, dvs både pojkar och flickor, går på promenad? Vilket är det minsta antal pojkar som kan vara med på promenaden?

Liknande problem:
Benjamin 2014

6 En kaka väger 900 g. Elias skär den i fyra bitar. Den största biten väger lika mycket som de tre andra tillsammans.
Hur mycket väger den största biten?

A: 225 g B: 250 g C: 300 g D: 450 g E: 600 g

Benjamin 2016

12 I en klass finns 30 elever. De sitter i par. Alla pojkar sitter med en flicka och precis hälften av flickorna sitter med en pojke.
Hur många pojkar finns i klassen?

A: 25 B: 20 C: 15 D: 10 E: 5

6, 9, 19 Tärningar

Gemensamt för de tre tärningsproblemen är att de baseras på att tärningen är konstruerad på ett särskilt sätt. Titta tillsammans på hur ”en vanlig pricktärning” ser ut om den är korrekt konstruerad.

På ncm.gu.se finns aktiviteter och problem som utgår från tärningar. Många av dessa finns samlade i häftet *Tärningar – spel, aktiviteter, problem*.

Liknande problem:
Junior 2019

3 Hur många olika summor kan du få när du kastar tre vanliga tärningar samtidigt?

A: 14 B: 15 C: 16 D: 17 E: 18

10 Åldersproblem

Resonera om det specifika i åldersproblem att alla, såväl människor som djur, alltid blir ett år äldre varje år och hur det kan åskådliggöras exempelvis på en tallinje. Det som gör detta problem lite mer utmanade är att frågeställningen handlar om att alla blir två år äldre.

12 Tresiffriga tal

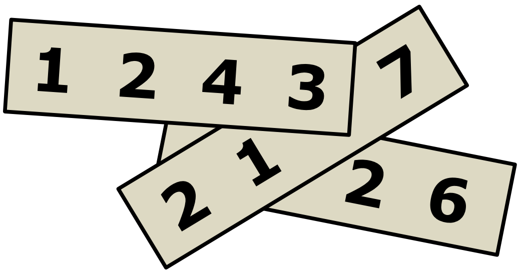
I år finns varianter av detta problem med i fyra tävlingsklasser. Gemensamt för samtliga är att användning av en standardalgoritm är en bra lösningsstrategi.

I klassiska problemlösningsböcker finns ofta liknande problem som exempelvis:
send + more = money. Hur mycket pengar ska sändas?

I strävan *1A Tänk till tusen* använder elever kunskaper om tals storlek och positionssystemet och de gör strategiska bedömningar. För att vinna *Tänk till tusen* krävs god taluppfattning samt insikt i hur en standardalgoritm för addition fungerar – och en del tur med tärningen.

Liknande problem:
Cadet 2019

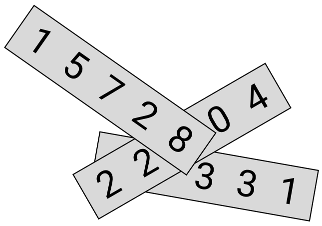
10 På var och en av de tre skyltarna på bilden är ett fyrsiffrigt tal skrivet. Tre siffror på de två understa skyltarna är övertäckta. Summan av de tre fyrsiffriga talen är 10 126.
Vilka tre siffror är övertäckta?



A: 5, 6, 7 B: 4, 5, 7 C: 4, 6, 7 D: 4, 5, 6 E: 3, 5, 6

Junior 2019

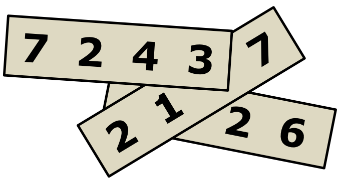
8 Bilden visar tre skyltar med femsiffriga tal. Tre siffror är övertäckta. Summan av de tre talen är 57 263.
Vilka är de övertäckta siffrorna?



A: 0, 2 och 2 B: 1, 2 och 9 C: 2, 4 och 9 D: 2, 7 och 8 E: 5, 7 och 8

Student 2019

4 Bilden visar tre skyltar med fyrsiffriga tal. Summan av dessa tre tal är 11 126.
Vilka är de siffror som är övertäckta?



A: 1, 4 och 7 B: 1, 5 och 7 C: 3, 3 och 3 D: 4, 5 och 6 E: 4, 5 och 7

21 Delbarhet

Diskutera vad delbarhet innebär och när det är en användbar kunskap. Multiplikationstabellen är ett exempel där delbarhet kan bli synligt. Färglägg olika tabeller på en hundraruta och se efter vad som är lika och vad som skiljer.

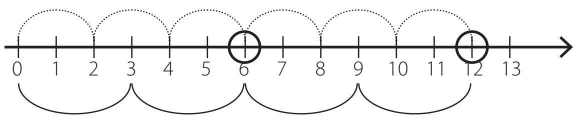
Ett alternativ är att diskutera när tal *inte* är delbara. I strävan *2A Primtal* ges exempel på en aktivitet om primtal som elever kan möta tidigt. Där finns även förslag på fördjupningar som handlar om Erathostenes såll.

Utvidga diskussionen om delbarhet till begreppen *multipel*, *gemensam multipel* och *minsta gemensamma multipel*. Ta även upp *delare, gemensam delare, minsta gemensamma delare, faktorisera, primtal* och *primfaktorer*. Här beskrivs de tre först nämnda begreppen. *Multipel:* Tal som är produkten av ett givet tal och något heltal.

Multiplar
De fyra första multiplarna till talet 5 är: 5, 10, 15 och 20. Det är alltså de fyra första produkterna i femmans multiplikationstabell.

Två olika tal kan ha gemensamma multiplar. För talen 2 och 3 är de fyra första multiplarna 6 (2 · 3), 12 (2 · 2 · 3), 18 (2 · 3 · 3) och 24 (2 · 2 · 3 · 3).

Minsta gemensamman multipeln (MGM) för 2 och 3 är alltså 6.



Ur boken *En hel del textuppgifter – gul – Singaporemetoden* av Cecilia Christiansen & Doris Lindberg.

Vilka *multiplar* har 20 och 50?
Multiplar till 20: 20, 40, 60, 80, $\boxed{100}$, 120, 140, 160, 180, $\boxed{200}$, 220, …
Multiplar till 50: 50, $\boxed{100}$, 150, $\boxed{200}$, 250, …

Vilka gemensamma multiplar har 20 och 50?
100, 200, 300, …

Vilken är största gemensamma multipel av 20 och 50?
Frågan har inget svar men kan ge upphov till intressant diskussion. Varje tal har oändligt många multiplar. Förhoppningsvis kommer någon av eleverna på att frågan är fel ställd och att de istället borde fråga vilken den *minsta* gemensamma multipeln är. Om ingen elev kommer på det kan du själv ställa frågan.

Vilken är den *minsta gemensamma multipeln* av 20 och 50?
MGM (20, 50) = 100. Ett sätt att hitta MGM av två eller flera tal är att skriva *talens tabeller* och se vilken lägsta multipel talen har gemensamt, dvs första talet vi hittar i båda tabellerna.
Exempel: Hitta MGM (6, 14)
Multiplar av 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, …
Multiplar av 14: 14, 28, 42, …
MGM (6, 14) = 42

Ur boken *Delbarhet och primtal* av Cecilia Christiansen.

Geometri och rumsuppfattning

Geometri är ett område som lämpar sig väl för problemlösning. Att resonera sig fram till lösningen och att sedan kunna argumentera för den är väsentliga delar av problemlösningsförmågan. I geometri spelar också bilden en väsentlig roll, som underlag för kommunikation och som stöd för tanken. Med stigande ålder hos eleverna bör vi också ställa större krav på hur de använder bilder och vilka slutsatser de kan dra av bilderna. Många problem går att lösa konkret och det konkreta arbetet bör kombineras med samtal så att det ger stöd för tänkandet. Det är resonemanget som är centralt. Det konkreta arbetet kan också användas för att bekräfta lösningar och för att skapa nya erfarenheter att bygga vidare på.

Att redovisa en lösning av ett geometriproblem kan vara svårt. Lösningen ska vara skriven så att läsaren förstå. Hur bör en lösning av ett geometriproblem se ut? Börja gärna med enklare problem. Finns det ingen figur bör lösningen inledas med att en tydlig figur ritas, beteckningar införs och att det som är givet markeras. Finns det en figur så är den ett underlag för redovisning. I den skriftliga redovisningen hänvisar man till beteckningarna i figuren. Hur markerar man t ex att en vinkel är rät eller att två vinklar är lika stora? Det går inte att hänvisa till att en vinkel är rät eller till att två vinklar *ser* lika stora ut om man inte har fått veta att det är så.

Det kan vara lättare att förklara sina tankegångar muntligt och låt därför eleverna göra en muntlig redovisning först för att sedan formulera en skriftlig lösning.

1 Ritad katt

Diskutera likheter och skillnader mellan de olika svarsalternativen. Problemet visar tydligt att det är de små detaljerna som behöver uppmärksammas och att det är viktigt att kunna benämna delarna entydigt med geometriska termer för att det ska gå att diskutera jämförelserna.

7 Geometriska former i två dimensioner

Ta upp regelbundna månghörningar. Utgå från den minsta möjliga månghörningen, triangeln, och fortsätt sedan titta på fyrhörningar, femhörningar, etc. Undersöka vilka andra namn ”hörningarna” kan ha, titta på formen när månghörningarna får allt fler hörn, diskutera vinklarnas storlek och hur de förändras, …

I strävan *2CE5CE Månghörningen växer* får eleverna undersöka hur vinkelsumman ökar i takt med att antalet sidor i en månghörning växer. Matematiska begrepp som kan lyftas fram i aktiviteten är sida, hörn, vinkel, vinkelsumma och diagonal. Aktiviteten ger förutsättningar för att utveckla förmågan att använda och analysera geometriska begrepp och att uppfatta samband mellan begreppen. Vid den gemensamma redovisningen kan eleverna träna sin förmåga att använda matematikens uttrycksformer för att redogöra för sina beräkningar och slutsatser. Eleverna behöver använda gradskiva.

11 Tredimensionella byggen

Till vilket bygge går det åt minst mängd färg?

Bygg de olika svarsalternativen och gör en gemensam tabell där antalet sidor som ska målas sammanställs. Hur många kuber målas på en, två, tre, fyra, fem eller sex sidor? Inser eleverna direkt att kolumner för en, fem och sex sidor inte behövs? För att kontrollera kan byggena byggas om med kuber i tre olika färger som representerar kuber som ska målas på två, tre eller fyra sidor.

14 Svart och vit area

Låt eleverna diskutera proportionen mellan svart och vit area för respektive kvadrat. I några kvadrater är antalet svarta och vita rutor lika och då kan de alternativen strykas direkt. Titta gärna på att det blir tydligt att dessa kvadrater är till hälften vita och hälften svarta om dessa kvadrater viks samman längs antingen en vågrät eller lodrät mittlinje. I vissa kvadrater är antalet svarta småkvadrater fler än antalet vita, alltså mest svart. Låt eleverna diskutera vad det är som är lika i dessa alternativ och hur de sedan ska kunna avgöra exakt hur mycket svart det är på dem.

15 Liksidiga trianglar

Låt eleverna diskutera de båda alternativa lösningarna som finns i facit. Vad är lika och vad skiljer?

Fortsätt arbeta med liksidiga trianglar. Låt eleverna undersöka och rita (konstruera) ett antal liksidiga trianglar och diskutera även begreppen likformighet och kongruens.

Använd illustrationen i problemet och låt eleverna undersöka hur många trianglar de kan hitta totalt i figuren. Låt dem sedan konstruera liknande problem att lösa och byta med varandra. Sök på nätet där det finns många illustrationer som kan ge inspiration.

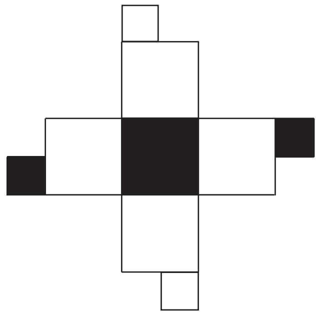
22 Utvikningar

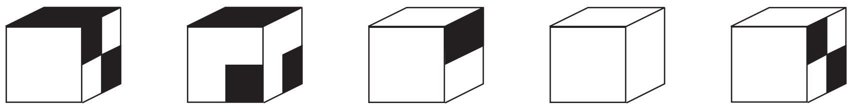
Förstora upp problemets utvikta låda, klipp ut och vik ihop. Låt eleverna två och två berätta för varandra hur de tänker när de viker ihop lådan ”i huvudet”.

I strävan *4C5C Först se men inte röra* får eleverna visualisera, vilket är en viktig del i geometriundervisningen. Aktiviteten handlar om att vika lådor, först i tanken och sedan allt mer praktiskt. Arbetet ger också kunskaper som är grundläggande för att kunna orientera sig i rummet och för att kommunicera med andra.

Liknande problem:
Benjamin 2005

7 Vilken av dessa kuber kan du få om du viker ihop rutmönstret till höger?





A B C D E

Mönster

I vardagen omges vi av mönster och strukturer. Mönster kan vara dekorationer och arbetsbeskrivningar, men de kan också beskriva cykliska förlopp som årstiderna. Vissa mönster är statiska, upprepar sig på exakt samma sätt, andra är dynamiska där någon del av mönstret förändras. Eleverna behöver möta mönster gestaltade inte bara genom bilder utan även genom andra uttrycksformer som rörelser, ljud, händelser och symboler för att befästa förståelsen för begreppet mönster.

I dynamiska mönster förändras en eller flera delar på ett bestämt sätt och efter givna förutsättningar, t ex 📖✏📖✏✏📖✏✏✏📖✏✏✏✏. *Vad* är det som förändras? *Hur* förändras det? Hur ska mönstret fortsätta? Hur kan vi veta det? Hur ser det ut efter nästa bok eller efter den tionde? Efter den *n*:te boken? Hur vet vi det? Hur kan mönstret beskrivas?

Aritmetiken är också rik på samband och mönster. Talen i talraden finns alltid i en bestämd följd, 1, 2, 3, 4 osv. Hur kan mönstret, dvs relationen mellan talen i talraden, beskrivas? Hur ser fortsättningen ut i följande talmönster? Varför? Hur vet vi det?

1, 3, 5, 7, 9, …	1, 2, 4, 7, 11, …	1, 4, 9, 16, …
200, 100, 50, 25, …	1, 5, 13, 25, 41, …	6, 7, 9, 12, 16, …

Att upptäcka likheter och skillnader samt att se strukturer och mönster är viktigt för matematiken. Att beskriva det man upptäckt, till en början med vardagsspråk och på sikt med matematikens ord och symboler, är en del i lärandet.

18 Tornet

Att se och beskriva mönster är grundläggande för att kunna abstrahera och generalisera vilket är nödvändigt för att kunna utveckla ett algebraiskt tänkande. Hur kan exempelvis mönstret i problemet beskrivas om vi utökar till *n* figurer? Använd ett fyrfältsblad där eleverna arbetar med bild, tal, ord och formel.

Problemlösning och resonemang

Textproblem uppfattas av många som svåra och eleverna behöver få undervisning om hur de ska angripa den typen av uppgifter. Arbeta därför gemensamt med texterna, som ofta är korta men mycket informationstäta, och hjälp eleverna att sätta sig in i problemet, exempelvis med stödjande frågor. Hjälp eleverna att strukturera informationen i texten.

Att förstå vad problemet handlar om är en förutsättning för att kunna lösa det. Men att förstå vad det handlar om och vad som efterfrågas är inte detsamma som att ”veta vad man ska göra”. Problemlösning handlar om att komma från att förstå situationen till att komma på hur man ska komma fram till svaret på den formulerade frågan. Det är denna process, som består av flera steg och ofta innebär både misslyckade och lyckade insatser, som är central i undervisning om problemlösning. I den processen är resonemang en viktig del och de två små orden *om … så* kan ofta komma till nytta.

13 Spindlar

Här är det bra att starta med *om … så*. *Om* Riri hade ätit 5 spindlar om dagen *så* hade hon ätit …

16 Förvandling

Även här går det att starta med *om … så* även om det kan vara bättre att byta om till när. *När* 5 katter har förvandlats till möss *så* är katterna 10 …

17 Guldmynt

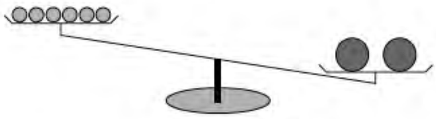
Om de 41 rövarna först tar var sin säck *så* är det enbart den sista säcken som de behöver dela på.

20 Vågskålar

Om vi tar bort en svart kula från vardera vågskål i den högra vågen *så* bevaras jämvikten …

Liknande problem
Ecolier 2002

5. I den ena vågskålen ligger 6 apelsiner och i den andra ligger 2 meloner.
Vi lägger till en lika tung melon i skålen med apelsinerna.
Då väger det lika.

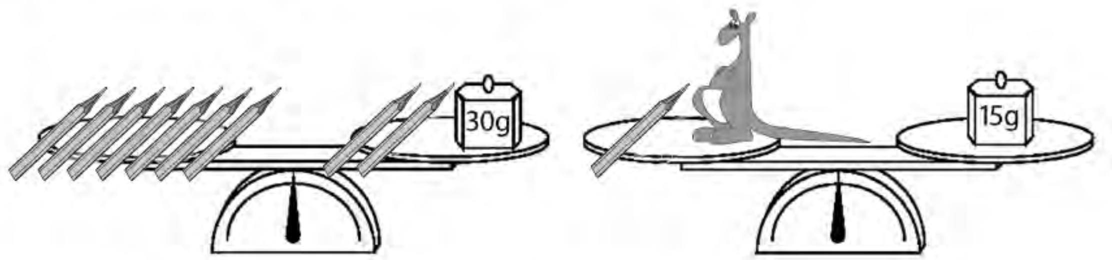


Hur mycket väger en melon?
Lika mycket som

A: 2 apelsiner B: 3 apelsiner C: 4 apelsiner
D: 5 apelsiner E: 6 apelsiner

Ecolier 2004

8. Hur många gram väger kängurun?



A: 6 g B: 7 g C: 9 g D: 10 g E: 15 g

23 Burkpyramiden

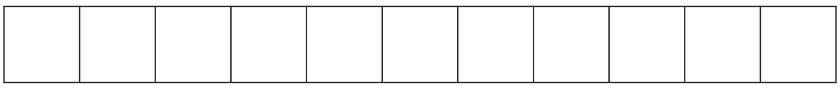
Bygg upp en pyramid. Vi vet att det ska vara 15 burkar (använd något stapelbart material som det går att skriva på, t ex tomma toarullar som är delade i två delar). Starta med att skriva de poäng som är synliga enligt illustrationen och fyll sedan på så det blir en hel, ursprunglig, pyramid. ”Slå ner” pyramiderna enligt Malins respektive Williams kast och räkna poäng.

24 Tågpassagerare

Läs lite i taget, rita upp tågets vagnar, diskutera och markera hur passagerarna är fördelade.

Liknande problem
Benjamin 2004

17 Figuren visar en remsa med 11 rutor. Det ska stå tal i rutorna. När man väljer *tre rutor i rad* ska summan alltid bli 21, vilka tre rutor man än väljer. Om det står 7 i första rutan och 6 i nionde rutan, vilket tal ska då stå i ruta nummer två?



A:6 B: 7 C: 8 D: 10 E: 21

Att läsa

Christiansen, C. (2018). *Delbarhet och primtal*.

Christiansen, C. & Lindberg, D. (2018). *En hel del textuppgifter med Singaporemetoden*. Askunge förlag.

Eriksson, K. & Rydh, S. (2003). *Nöjesmatematik*. Stockholm: Liber.

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

Trygg, L. (red) (2018). *Tärningar – spel, aktiviteter, problem*. NCM, Göteborgs universitet.

Ulin, B. (2010). *Matematiska äventyr*. NCM, Göteborgs universitet.

Ulin, B. (2016). *Frågor och fascinationer*. NCM, Göteborgs universitet.

Vaderlind, P. (2005). *Klassisk och modern nöjesmatematik*. Stockholm: Svenska förlaget.

Wallby, K. m fl (red) (2014). *NämnarenTema 10 Matematikundervisning i praktiken*. NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar, äldre än ett år, finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, ncm.gu.se/namnaren. Du finner dem via artikelregistret. Under Klassrum på ncm.gu.se finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. NCM presenterar varje månad nya problem under rubriken Månadens problem.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns artiklar och aktiviteter samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal, matematiklyftet.skolverket.se. På lärportalen finns moduler om problemlösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. På lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.