Lösningsförslag Student 2018

3 poäng

1. (A) Måndag
Från torsdagen den 2:a till den 27:e är det 25 dagar. Efter tre veckor (21 dagar) är vi på torsdagen 23:e. Då behövs det fyra dagar för att komma till 27:e som är en måndag.

2. (D) $2 \cdot (0 + 1 + 8)$
Vi beräknar de fem värdena. A 10, B 2, C, 8, D, 18, E 9

3. (D) 23
Efter varje träff ökar antalet stenar med 4.

4. (C) 8
En kub får exakt fyra målade sidor om den är sammanklistrad med två andra kuber. Två av kuberna är sammanklistrade med bara en kub.

5. (A) 135°
En romb som inte är en kvadrat har två spetsiga vinklar och två trubbiga vinklar. Motstående vinklar är lika stora. Betrakta ett hörn där två romber och en kvadrat möts. Anta att rombens trubbiga vinkel är v. Då gäller $2v + 90° = 360°$, $v = 135°$.

6. (B) 12
Det finns 65 – 8 = 57 svarta bollar. Om man har otur att bara plocka upp svarta bollar så har man efter 11 gånger plockat upp 55 bollar och i den 12:e gången får man säkert en vit boll.

7. (B) $\sqrt{ABC}$
Låt sidoytan A har kantlängderna a och c. Arean blir då $A = ac$. Sidoytan C har kantlängderna c och b, vilket ger $C = bc$. Sidoytan B blir då $B = ab$.
$ABC = a^2 + b^2 + c^2 = V^2 \Rightarrow V = \sqrt{ABC}$

8. (A) inget
Om ett udda heltal ska vara summan av två heltal måste ett av talen vara jämnt. Det enda jämna primtal är 2. 1001 – 2 = 999 som är delbart med 9.

4 poäng

9. (B) $V = \dfrac{3}{2}W$
För den gemensamma delen gäller: 10 % av V är lika med 15 % av W. Det ger $V = \dfrac{3}{2}W$.

10. (A) 10
$\left|\sqrt{17} - 5\right| + \left|\sqrt{17} + 5\right| = 5 - \sqrt{17} + \sqrt{17} + 5$ eftersom $\sqrt{17} < 5$.

11. (D) $\frac{1}{6}$

Oktaedern består av två kongruenta prismor. Volymen av ett prisma är $\frac{Bh}{3}$.

Basytan är en kvadrat med diagonal 1. Dess area är $B = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$.

Höjden $h = \frac{1}{2}$ så volymen blir $V = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$.

12. (D) 5

Låt $A = (x_1, y_1)$ och $B = (x_2, y_2)$ vara ändpunkter på sträckan AB.

Då gäller att sträckans mittpunkt $C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

För mittpunkterna av sidorna i triangel ABC gäller $M = (-2, 1) = \left(\frac{p + r}{2}, \frac{q + s}{2}\right)$,

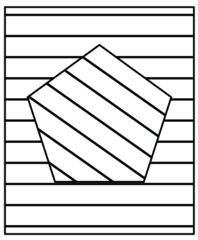
$N = (2, -1) = \left(\frac{r + t}{2}, \frac{t + u}{2}\right)$ och $P = (3, 2) = \left(\frac{p + t}{2}, \frac{q + u}{2}\right)$.

Addition av samtliga koordinater ger

$$-2 + 1 + 2 - 1 + 3 + 2 = \frac{p + r + q + s + r + t + t + u + p + t + q + u}{2}.$$

$$5 = \frac{2p + 2r + 2q + 2s + 2t + 2u}{2} = p + q + r + s + t + u.$$

13. (C)



För att femhörningen ska passa in i hålet måste den vridas med en multipel av 72° (360°/5). Första gången femhörning kommer att passa in är efter vridning med den minsta gemensamma multipeln av 21° och 72°, alltså 504° (= 7·72). Då hamnar femhörningen i samma läge som efter vridning (2·72°)

14. (C) 28

$18^{2017} + 18^{2018} = 18^{2017}(1 + 18) = 18^{2017} \cdot 19$. Primtalsfaktorisering av 18 ger 18 = 2·32. Eftersom 7 varken delar 18 eller 19 så kan inte 28 vara en delare.

15. (B) 13
Eftersom summan av de två produkterna ska vara ett primtal får de två produkterna inte ha någon gemensam delare, (varken 2 eller 3 eller något annat). Det innebär att korten med valör 3, valör 4 och valör 6 måste vara hos samma person. Alltså hos Nadja som har tre kort. Vi kontrollerar om det stämmer. Produkten av valörerna på Nadjas blir 72. Rinys kort har valörerna 5 och 7. Produkten blir 35. Summan av 72 och 35 är 107 som är ett primtal. Den efterfrågade summan är 13.

16. (E) Ingen av dessa.
Vinklarna i den triangel som bildas av de två rektanglarna och den lodräta linjen är 50°, 60° och 70°. Rektanglarnas gemensamma del är en fyrhörning med två räta vinklar. Den tredje vinkeln är 70° (vertikalvinkel till triangeln) och den fjärde blir 180° – 70° = 110°. Eftersom Q är vertikalvinkel till den så är Q = 110°.

5 poäng

17. (A) 2
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Summan utefter varje lodrät kant måste vara $21/3 = 7$ för att villkoret om att summan av de fyra talen i varje kvadrat är lika ska vara uppfyllt. Alltså är $x = 2$

Alternativ lösning: Beteckna de tre övriga hörnen w, y och z. Villkoren ger följande samband: $1 + x + 5 + y = 5 + x + z + w = 1 + y + z + w$. Den sista ekvationen ger $4 + x = y$ som ger $x = 2$ och $y = 6$.

18. (D) 2019
Summa av rötter till ekvationen $x^2 + px + q = 0$ är $-p$ enligt Viètes formel. Alltså $m + n = 1$. Dessutom gäller $n^2 - n = 2018$ eftersom n är en rot till ekvationen. Ledvis summering av dessa två likheter ger $n^2 + m = 2019$.

19. (B) Bertil
Om Axel ljuger, så ljuger också antingen Carl eller David. Om Bertil ljuger, så ljuger även David. Om David ljuger så ljuger någon mer. Eftersom det bara är en av bröderna som ljuger så är det Carl. När Axel och David talar sanning och Carl ljuger så är ingen av dessa tre längst. Alltså är Bertil längst.

20. (C) $(-p, q)$
Anta att grafen till funktionen $f(x) = x^2 + px + q$ skär y-axeln i $(0, q)$. Funktionen är symmetrisk kring linjen $x = -\frac{p}{2}$. Två av cirkelns skärningspunkter är andragradsfunktionens nollställen. Då ligger cirkelns medelpunkt på symmetrilinjen och därför är den fjärde skärningspunkten symmetrisk med $(0, q)$.
Det ger punkten $(-p, q)$.

21. (B) 3

$||4^x - 3| - 2| = 1$.
Vi löser upp det yttre absolutbeloppet:
$|4^x - 3| - 2 = 1$ eller $|4^x - 3| - 2 = -1$.
$|4^x - 3| = 3$ eller $|4^x - 3| = 1$.
Vi löser upp absolutbeloppen och får ekvationerna
$4^x - 3 = 3$ eller $4^x - 3 = -3$ eller $4^x - 3 = 1$ eller $4^x - 3 = -1$.
$4^x = 6$ eller $4^x = 0$ eller $4^x = 4$ eller $4^x = 2$.
Tre av ekvationerna har en lösning var och $4^x = 0$ har ingen.

22. (A) $\frac{1}{2}$

$FC = 2 \cdot ED,\qquad IH = \frac{ED}{2},\qquad FI = \frac{FC - IH}{2} = \frac{2ED - \frac{ED}{2}}{2} = \frac{3ED}{4}.$

Arean av triangeln *FIG* är $\frac{FI \cdot h}{2}$ och arean av parallelltrapetset *EDHI* är $\frac{(IH + ED) \cdot h}{2}$. Triangeln och parallelltrapetset har samma höjd.
Förhållandet blir $\frac{FI}{IH + ED} = \frac{\frac{3ED}{4}}{\frac{ED}{2} + ED} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{2}$.

23. (C) 36
Anta att det finns p pojkar och f flickor i klassen, då är totala antalet elever $p + f$.
Sannolikheten att välja en pojke och en flicka blir

$$\frac{2 \cdot p \cdot f}{(p + f)(p + f - 1)} = \frac{1}{2}.$$

Insättning av $f = \frac{7p}{5}$ ger efter förenklingar ekvationen $140p = 144p - 60$, $p = 15$, $f = 21$

och antal elever i klassen är 36.

24. (E) 3 och 8
Primtalsfaktorisering av 15! ger

$15! = 2 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$
De tre nollorna i slutet har skapats av $2^3 \cdot 5^3 = 1000$. Vi reducerar bort dessa faktorer och får $2^8 \cdot 3^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$. För att bestämma entalssiffran i den reducerade produkten betraktar vi entalssiffran i respektive faktor och får $6 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 3$ som ger 8 som entalssiffra. Alltså är tusentalssiffran 8. Siffersumman måste vara delbar med 9.
$1 + 7 + 6 + 7 + 4 + 3 + 6 + 8 = 42$. Alltså är den andra siffran 3.