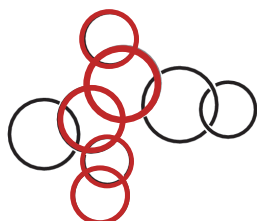




Lösningförslag Junior 2018

3 poäng

1. (C) 5



2. (C) 5

Av triangelolikheten följer att varje sida i en triangel är längre än differensen av övriga två sidor och kortare än dess summa. Den tredje sidan måste vara längre än 3 och kortare än 7. Eftersom den ska ha udda längd så är sidans längd 5.

3. (C) 130 cm

Katten på bordet har sina tassar högre än den på golvet, lika mycket högre som bordet är högt. Skulle både katter ligga eller både sitta så skulle också höjdskillnaden mellan deras toppar vara lika med bordets höjd. När katten på golvet ligger och den på bordet sitter så är höjdskillnaden större. När det är tvärtom så är den lika mycket mindre. Men i snitt är den lika med bordets höjd. Bordets höjd är 130 cm – ett medelvärde av 150 cm och 110 cm.

4. (E) $2 \cdot 10^{2017}$

$$(x - 2) + (x - 1) + x + (x + 1) + (x + 2) = 10^{2018}, x = 10^{2018}, x = \frac{1}{5} \cdot 10^{2018} = 2 \cdot 10^{2017}.$$

5. (B) 6

SGD (42, 60, 90) = 6. Mary behöver 6 korgar, i varje korg lägger hon 7 äpplen, 10 aprikoser och 15 körsbär.

6. (B) 15

$$45 + RS = 54 \text{ ger att } RS = 09, P + Q + R + S = 6 + 0 + 9 = 15$$

7. (A) 1009

$$\frac{2018}{4} + \frac{2018 \cdot 25}{100} = \frac{2018}{4} + \frac{2018}{4} = 1009.$$

8. (B) 16

Alla vägar går genom mittpunkten. Det finns 4 vägar från A till mittpunkten och 4 vägar från mittpunkten till B. Totalt $4 \cdot 4 = 16$ olika vägar.



4 poäng

9. (D) Framför det andra studenthemmet

Anta att hållplatsen placeras mellan studenthemmen x m från det andra studenthemmet. De studenterna får då gå $150x$ meter. Avståndet till första studenthemmet blir $(250 - x)$ och de får gå $100(250 - x)$ meter. Den sammanlagda totalsträcka som studenterna förflyttar är $150x + 25000 - 100x = 50x + 25000$. Den blir så kort som möjligt om $x = 0$.

10. (D) 30

Vi söker det tal n som förekommer n gånger så att $1 + 2 + 3 + \dots + n = 105$.

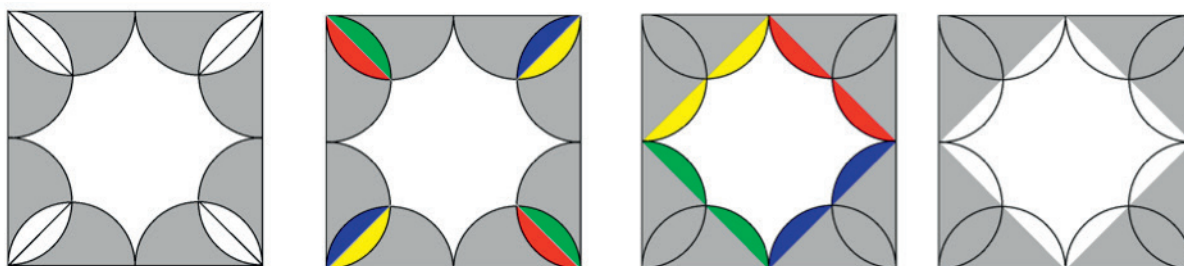
$$\frac{n(n+1)}{2} = 105 \quad n(n+1) = 210 \quad n = 14$$

De tal som är delbara med 3 är 3, 6, 9 och 12.

Det totala antalet är $3 + 6 + 9 + 12 = 30$

11. (B) 8

Kvadraten med sidlängd 4 har arean 16. Vi delar de fyra icke-skuggade områden i hörnen i två halvor varje, färgar halvorna, flyttar de och färgar de vita igen.



Vi har inte ändrat arean av det ofärgade (vita) området men vi kan nu se att det är hälften av den stora kvadratens area, alltså 8.

12. (E) 40

Om vi i varje stad gör en lista på tåg som avgår eller ankommer till staden ska varje tåg stå på två listor, 80 noteringar sammanlagt. 40 av dessa noteringar ska stå i städernas M, N, O och P listor, 10 i varje lista. Övriga 40 i stadens Q lista. Alltså det var 40 tåg som avgick från eller kom till Q.

13. (B) 20 %

Låt x vara totala antalet elever på sommarskolan och y antal elever som studerar språk.

$$\frac{65}{100} \cdot y = \frac{13}{100} \cdot x. \text{ Då är andelen elever som studerar språk } \frac{y}{x} = \frac{1}{5}.$$

14. (A) 24 EUR

Anta att Peters äldre bror gav x kr. Då gav bröderna $(x + 10)$ kr och Peters far $(x + 10)/2$

kr till Peter. $x = \frac{1}{3} \left(\frac{x + 10}{2} + 10 + x \right)$ med lösning $x = 6$. Boken kostade $16 + 8 = 24$ EUR.



15. (D) 4

Anta att det tresiffriga talet är abc . Då gäller att $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c = 9(a \cdot 10 + c)$ som kan förenklas till $5a + 5b = 4c$. Eftersom VL är delbart med 5 så är $c = 5$ och $a + b = 4$. $a \neq 0$ så det finns fyra möjligheter: 135, 225, 315 och 405.

16. (E) 201818

Anta att det finns n termer 2018^2 under rottecknet. Kvadrering ger ekvationen $n \cdot 2018^2 = 2018^{20}$ med lösning $n = 2018^{18}$.

5 poäng

17. (D) 4036

$10^{2018} - 1$ består av 2018 nior; $(10^{2018} - 1)/9$ består av 2018 ettor; $10^{2018} \cdot \left(\frac{10^{2018} - 1}{9}\right)$ består av 2018 ettor och 2018 nollor.

18. (B) 2017

Eftersom produkten ska vara 2018 så måste de övriga talen utöver talet 2018 vara 1 eller -1 och antalet -1 måste vara jämnt. Summan av alla tal utom talet 2018 är 0. Därför måste vi ha samma antal +1 som -1. Ett jämnt antal minusettor och lika många ettor ger ett antal delbart med 4. Då är totala antalet tal (inklusive talet 2018) ett tal av formen $4n + 1$ och 2017 är det enda alternativet som uppfyller villkoret.

19. (C) 21

Låt talen vara $a > b > c > d$.

$$\frac{b + c + d}{3} + a = 29$$

$$\frac{a + c + d}{3} + b = 21$$

$$\frac{a + b + d}{3} + c = 21$$

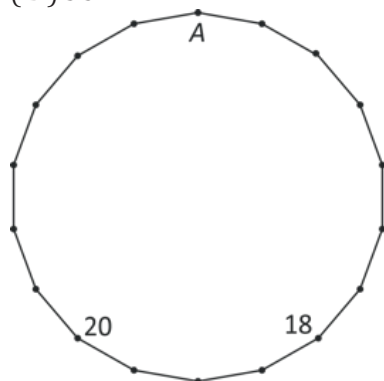
$$\frac{a + b + c}{3} + d = 17.$$

Ledvis summering ger: $2(a + b + c + d) = 90$ och $3 \cdot 29 = (a + b + c + d) + 2a$.

Det ger $2a = 87 - 45 = 42$, $a = 21$.



20. (D) 38



Vi benämner punkterna mellan 20 och 18, a , b och c . Då gäller:

(1) $a = 20 + b$ och (2) $b = a + c$ vilket ger $c = -20$. Nu är det bara att räkna vidare från 18, och vi får följden 38, 20, -18, -38, -20, 18 och $A = 38$

Alternativ lösning: Om vi har fyra tal a , b , c och d sådana att $b = a + c$ och $c = b + d$ (alltså att b och c är summor av talen som de står emellan) så gäller:

$b + c = (a + c) + (b + d) = (b + c) + (a + d)$ alltså $a + d = 0$ och $a = -d$. Detta gör att två tal i 18-hörningen som står på avstånd 3 kanter från varandra är motsatta tal (har summan 0) och två som står på avstånd 6 rutor från varandra är lika. I hörnet närmast till vänster om A ska det stå 20, i hörnet närmast till höger om A ska det stå 18. Talet i hörnet markerat med A ska stå deras summa 38.

21. (D) 325

Av 218 rutor kan vi antingen göra två rutnät, 1×218 eller 2×109 . Väljer vi rutnätet 1×218 och färglägger det som ett schackbräde, får vi 109 svarta rutor och 109 vita rutor. I 108 av de vita rutorna kan vi skriva 2 och i den sista rutan 1. Det ger summan $108 \cdot 2 + 1 = 217$. Tar vi istället det andra rutnätet och färglägger det som ett schackbräde får vi i den ena raden 55 svarta rutor och 54 vita rutor, och i den andra raden 55 vita rutor och 54 svarta rutor. Vi kan i 107 vita rutor skriva 3 och i de resterande 2 vita rutorna 2. Det ger summan $107 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 325$.

Summan av de tal som Diana skriver är lika med antalet sidor som är gemensamma för en svart och en vit ruta. Genom att färglägga rutnätet som ett schackbräde försäkras vi oss om att varje sida gemensam för två rutor är gemensam för en svart och en vit ruta. I ett $m \times n$ -rutnät är antalet sidor gemensamma för två rutor lika med $m \cdot (n-1) + (m-1) \cdot n = 2mn - m - n$.

I ett 1×218 rutnät $2 \cdot 218 - 218 - 1 = 217$, i ett 2×109 -rutnät $2 \cdot 218 - 109 - 2 = 325$. (För 218×1 och 109×2 får vi samma resultat.) Fler möjligheter finns inte eftersom 109 är ett primtal.



22. (D) 48

Det finns många olika sätt att beräkna antalet.

Egenskapen att radsummorna och kolumnsummorna är delbara med 3 påverkas inte av ändringar av kolumnernas och radernas ordning. Kolumner kan ordnas på 6 sätt (har 6 permutationer) och rader på 2 sätt. Detta innebär att varje tabell (ifyllt rutnät) som uppfyller villkoren ingår i en grupp om 12 av sådana tabeller som var och en kan fås genom ev. omordning av rader och kolumner i den första.

Trean och sexan måste skrivas i samma kolumn. I treans rad ska också två av de fyra återstående talen skrivas. De ska ha summan delbar med 3. Det finns fyra sådana par: {1,2}, {1,5}, {2,4} och {4,5}. Oavsett vilket vi väljer, blir också summan av de återstående två talen delbar med 3 och dessa kan på exakt ett sätt skrivas i sexans rad så att kolumnsummorna blir delbara med 3.

Det ger fyra fall, varje med 12 rad- och kolumnpermutationer, alltså totalt 48 möjligheter:

Fall 1: {1,2} i treans rad

1	2	3
5	4	6

Fall 2: {4,5} i treans rad

3	4	5
6	2	1

Fall 3: {1,5} i treans rad

6	4	2
3	5	1

Fall 4: {2,4} i treans rad

6	5	1
3	4	2

23. (C) 4

Låt n vara den stora kubens kantlängd. De omålade småkuberna bildar ett rätblock med kantlängder mellan $n-2$ och n . Enda uppdelning av 45 i 3 faktorer som inte skiljer sig mer än 2 är $3 \cdot 3 \cdot 5$. Alltså två par av motstående sidor målade och ett par omålade i en kub med kantlängden 5.

24. (D)

Randvinkelsatsen ger $ABD = 90^\circ$ och $ACD = 90^\circ$. $BDC = 120^\circ$. I parallelltrapetsen $BDCE$ ser man att $EC = BD \cdot \sin 60^\circ$.