Arbeta vidare med geometriproblemen 2018

Varje år har många av problemen geometrisk anknytning. I år har vi samlat dessa problem från olika tävlingsklasser och kopplat ihop dem som behandlar liknande delar av geometrin.

Redovisning av lösningar

I efterarbetet är det viktigt att låta eleverna motivera sina tankegångar och redovisa sina lösningar. Att redovisa en lösning av ett geometriproblem kan vara svårt. Det kan vara lättare att förklara sina tankegångar muntligt. Låt eleverna göra en muntlig redovisning först och sedan formulera en skriftlig lösning. Hur bör en lösning av ett geometriproblem se ut? Börja gärna med enklare problem.

Finns det ingen figur bör lösningen inledas med att en tydlig figur ritas, beteckningar införs och att det som är givet markeras. Finns det någon figur så är den ett underlag för redovisning. I den skriftliga redovisningen hänvisar man till beteckningarna i figuren. Hur markerar man t.ex. att två vinklar är lika stora eller att de inte är det? Det går inte att hänvisa till att två vinklar *ser* lika stora ut eller till att en vinkel är rät om man inte har fått veta att det är så.

Vad är ett bevis? Hur mycket måste man redovisa i ett bevis och hur gör man detta på ett enkelt och tydligt sätt?

Månghörningar

Diskutera begreppet månghörning i klassen och be eleverna förklara det med både ord och bild. Behandla regelbundna månghörningar, rita figurer och namnge dem. Låt eleverna konstatera och förklara varför antalet hörn och antalet sidor i en månghörning är lika.

Trianglar

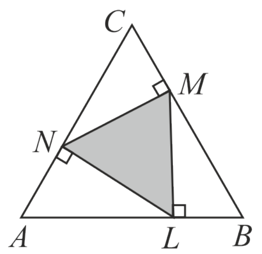
Två av årets problem handlar om trianglar. Diskutera triangelolikheten ~~med eleverna~~, som är central i *Junior 2:*

> I en triangel har två sidor längderna 2 och 5. Den tredje sidans längd är ett udda heltal. Bestäm den tredje sidans längd.

Vilka lösningar finns om kravet på att den tredje sidan är att den ska vara ett heltal?

Liknande problem Benjamin2015:16, Cadet2003:16, Cadet2015:7, GyCadet2004:15, Student2007:12, Student2011:17, Student2015:22.

Cadet 22



Punkterna *N*, *M* och *L* ligger på sidorna av en liksidig triangel så att *NM* är vinkelrät mot *BC* (*NM*⊥*BC*), *ML* är vinkelrät mot *AB* (*ML*⊥*AB*) och *LN* vinkelrät mot *AC* (*LN*⊥*AC*). Arean av triangeln *ABC* är 36. Vilken area har triangeln *LMN*?

Låt eleverna få texten till uppgiften utan bild. Be dem konstruera triangeln för hand eller med Geogebra.

I det här problemet ingår många begrepp och det finns flera sätt att lösa problemet.

- Visa beteckningen ⊥ som används för att ange att två sträckor är vinkelräta mot varandra.
- Beskriv med ord de fyra trianglarna *CNM*, *ALN*, *BML*, *LMN*.
- Triangel *LMN* är liksidig och trianglarna *CNM*, *ALN*, *BML* är kongruenta och halva liksidiga trianglar.
- I vilket förhållande delar punkterna *L*, *M* och *N* respektive sida?

Man kan använda Pythagoras sats för att lösa problemet. Här visar vi en lösning med trigonometri.

Låt triangeln *ABC* ha sidan 3*a*. Då delas varje sida i förhållandet 2:1. Detta kan vi använda för att beräkna arean av triangeln *LMN*.

Tar vi två av de halva liksidiga trianglarna och lägger dem bredvid varandra så att vi får en liksidig triangel med sida 2*a*, så är längdskalan mellan den triangeln och triangeln *ABC* 2:3. Areaskalan är längdskalan i kvadrat. Det ger att arean av den liksidiga triangeln med sidan 2*a* är

$$\frac{2}{3}^{2}\ 36=\frac{4}{9}\ 36=16.$$

Den totala arean av de tre halva liksidiga trianglarna är 24. Alltså är arean av *LMN*, 36 – 24 = 12.

Ett annat sätt är att bestämma sidan i den stora triangeln och sidan i triangeln *LMN*. Det går att göra på flera olika sätt.
Låt sidan ha längden 3*a*. Med hjälp av trigonometri och areasatsen ges

$$\frac{3a\ \ 3a\ \ \sin 60}{2}=36,\ a^2=\frac{16}{\sqrt{3}},\ a=\sqrt{\frac{16}{\sqrt{3}}}=\frac{4}{\sqrt{\sqrt{3}}}$$

Nu går vi till den halva liksidiga triangeln. Vi kan välja triangel *BLM*. Då gäller att

$$\tan 60 = \frac{LM}{a},\ LM = \frac{4}{\sqrt{\sqrt{3}}} \tan 60 = \frac{4}{\sqrt{\sqrt{3}}} \sqrt{3} = 4\sqrt{\sqrt{3}}$$

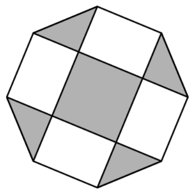
Areasatsen ger $\dfrac{\left(4\sqrt{\sqrt{3}}\right)^2 \sin 60}{2} = \dfrac{16\sqrt{3}\ \sqrt{3}}{2\ \ 2} = 12$

Liknande problem: Cadet2017:24, Junior2017:11, Student2016:15.

Regelbundna månghörningar

Cadet 3

Oktagonen har sidlängden 1.
Vilken area har de skuggade områdena tillsammans?

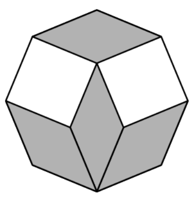


- Be eleverna beskriva de fem skuggade områdena.
- Varför är trianglarna likbenta och fyrhörningen en kvadrat?
- Vad kan man säga om de fyra vita områdena?
- Vilka sidlängder har de vita områdena?
- Vilken sammanlagd area har de vita områdena?

Det här är ett sätt att beräkna oktagonens area genom att dela in den i områden. Diskutera andra sätt att bestämma oktagonens area.

Student 5

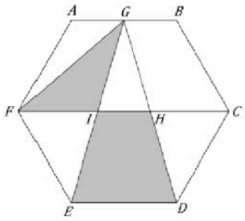
Figuren visar en regelbunden åttahörning sammansatt av fyra exakt likadana romber och två kvadrater. Hur stor är rombernas trubbiga vinklar.



I det här problemet är den regelbundna åttahörningen sammansatt av andra geometriska former. Låt eleverna rita figuren för hand eller med Geogebra.
Hur kan man bestämma de trubbiga vinklarna i romben? Hur kan man använda denna figur för att bestämma åttahörningens area om sidlängden är 1?

Student 22

ABCDEF är en regelbunden hexagon. *G* är mittpunkten på sidan *AB*.
H och *I* är respektive skärningspunkter mellan sträckorna *GD* och *GE* med sträckan *FC*.
Vilket är förhållandet mellan arean av triangeln *GIF* och arean av parallelltrapetset *IHDE*?



Ge eleverna texten till problemet och be dem rita figuren för hand eller med Geogebra.
Diskutera olika lösningsmetoder.
Hur långa är sträckorna *FI*, *IH* och *HC*?
Anta att hexagonens sida är *x*. Sträckan *CF* är en symmetrilinje. $\Delta GIH \sim \Delta GED$ med längdskala 1:2.
Det ger att *IH* har längden *x*/2.
I en regelbunden hexagon är vinklarna 120°. Alltså är $\angle IFE = \angle AFI = \angle BCH = \angle DCH = 60°$.
Förläng sidorna *FA* och *CB* så att de möts i en punkt *K*. Den uppkomna ΔAKB är liksidig och likformig med ΔFKC. Även här är längdskalan 1:2. Det ger att sträckan *FC* är 2*x*.
Symmetri ger då att:
sträcka *FI* = sträcka $HC = \frac{2x-\frac{x}{2}}{2} = \frac{3x}{4}$, då *IH* är x/2 och *FC* är 2x.
Höjden *h* i ΔGIH är lika med höjden *h* i parallelltrapetset *IHDE*. Det räcker att jämföra förhållandet mellan basen i ΔGIH och summan av de parallella sidornas längder i *IHDE*.

$$\frac{\frac{3x}{4}}{\frac{x}{2}+x} = \frac{\frac{3x}{4}}{\frac{3x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Fortsätt att jämföra areor av andra delområden.

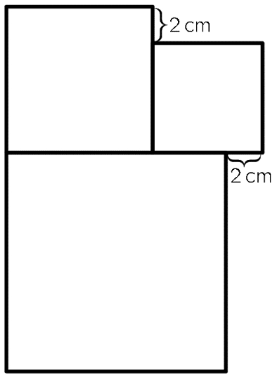
Liknande problem med regelbundna månghörningar: C2012:13, C2013:2, GyC2009:22, GyC2005:16, J2011:8, J2017:11, J2013:2, J2014:12, J2016:12.

Problem med kvadrater och rektanglar

I årets tävling rör följande problem kvadrater eller rektanglar: Ecolier 24, Benjamin 8, B 20, B 22, Cadet 8, C 10 och C 16. Jämför och arbeta gärna samtidigt med problemen E 24, B 8, B 20 och C 8.

Benjamin 8

Figuren är sammansatt av tre kvadrater.
Sidlängden på den minsta kvadraten är 6 cm.
Hur lång är sidan på den största kvadraten?



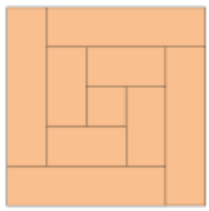
- Hur bestämmer man sidorna på de andra två kvadraterna?
  Här kan det vara lämpligt att låta eleverna använda figuren för att redovisa sin lösning.
- Vilken omkrets har figuren, vilken area har figuren?
- Låt eleverna undersöka hur figuren och sidorna på kvadraten ändras om sträckan 2 cm ändras. Ändra till annan sidlängd på den minsta kvadraten.
- Låt den största kvadraten ha en given sidlängd och bestäm den minsta kvadratens sidlängd.
- Generalisera: Låt den minsta kvadraten ha sidan *a* cm. Behåll den markerade sträckan 2 cm. Låt eleverna skriva uttryck för sidorna i kvadraterna och även bestämma uttryck för kvadraternas areor. Ersätt även sträckan 2 cm med en variabel t.ex. *b*.

Liknande problem: B2015:7, B2017:15.

I Benjamin 20 sågas en 8 cm bred träplanka i nio delar, en del är kvadrat och övriga delar är rektanglar. Låt eleverna arbeta med problemet genom att konstruera den stora kvadraten.

Benjamin 20

Peter sågar en 8 cm bred träplanka i nio delar. En av bitarna är en kvadrat, resten är rektanglar. Peter sätter ihop alla nio bitar och får en kvadrat, så som bilden visar. Hur lång var träplankan?



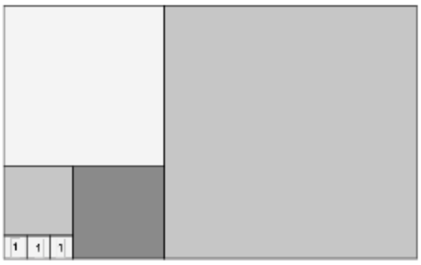
- Ge eleverna en förstoring av bilden till problemet.
- Låt eleverna rita en lång pappersremsa med lämplig bredd som motsvarar 8 cm. Här kan begreppet skala komma in på ett naturligt sätt.
- Vilken sida har kvadraten? Klipp ut kvadraten och placera ut den.
- Vilka sidor i rektanglarna har samma längd som kvadratens sida? Markera dem och sätt ut längderna i förstoringen.
- Låt eleverna klippa ut de rektanglar som har längden 16 cm. Hur många sådana rektanglar behövs?
- Lägg ut rektanglarna kring kvadraten. Vilken figur bildar kvadraten och de fyra rektanglarna?
- Vilken längd har de rektanglar som nu saknas? Klipp ut dem och lägg klart kvadraten.
- Bestäm remsans längd genom att lägga ut alla delar efter varandra. Diskutera även andra sätt att bestämma längden utan att lägga kvadraten och rektanglarna efter varandra.
- Genom att rita fyra nya rektanglar med samma bred runt kvadraten kan en ännu större kvadrat konstrueras. Vilket mått har rektanglarna? Vilken sida får den nya kvadraten?

Låt eleverna skriva numeriska uttryck för rektanglarnas längder för att se ett mönster.
Kvadratens sida 8 cm, de fyra inre rektanglarnas längd $2 \cdot 8$ cm, de fyra yttre rektanglarnas längd $4 \cdot 8$ cm. Plankans sammanlagda längd blir då $(8 + 4 \cdot 2 \cdot 8 + 4 \cdot 4 \cdot 8)$cm $= 25 \cdot 8$ cm $= 200$ cm.
Ändra kvadratens sida till x cm och skriv uttryck om det är en kvadrat och fyra rektanglar, en kvadrat och åtta rektanglar osv.

Liknande problem B2015: 12, C2016:9, C2011:22.

Ecolier 24

Den stora rektangeln är gjord av 7 kvadrater, av olika storlek. Det finns tre små kvadrater, som är lika stora. En sådan liten kvadrat har arean 1.
Vilken area har hela den stora rektangeln?

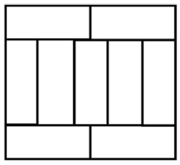


Detta är ett problem som liknar det förra, men här är det en rektangel som är uppbyggd av sju kvadrater i olika storlek.

- Låt eleverna arbeta med enhetskvadrater och konstruera rektangeln.
- Utgå från de tre givna enhetskvadraterna och placera ut eller rita enhetskvadrater så att nästa kvadrat bildas.
- Hur många enhetskvadrater är det sammanlagt?
- Vilken area har rektangeln som består av 12 enhetskvadraterna?
- Fortsätt att placera ut eller rita fler enhetskvadrater så att figuren växer fram.

Cadet 8

En stor rektangel är uppbyggd av nio identiska rektanglar vars längsta sida är 10 cm.
Vilken omkrets har den stora rektangeln?



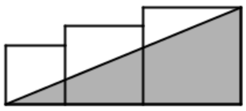
Diskutera lösningen med eleverna.

- Hur bestämmer man bredden på en av de små rektanglarna?
- Diskutera skillnaden mellan area och omkrets.
- Koppla problemet till Benjamin 20. Där är det en planka med bredden 8 cm som sågas i nio identiska rektanglar så att den stora rektangeln kan byggas. Hur lång är plankan? Vilken omkrets får den rektangel?

Liknande problem är C2011: 22, C2015:2, C2016:9, C2017:4. Utmanande problem är GyCadet2006:18, J2006:12, J2005:18, S2004:7.

Benjamin 22

Figuren visar tre kvadrater med arean 9 cm^2, 16 cm^2 och 25 cm^2.
Vilken area har det grå området?

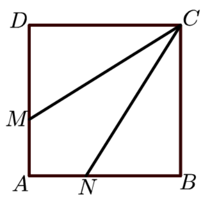


Diskutera lösningen med eleverna. Vilka begrepp använder vi för att bestämma arean av det grå området? Hur stor del av de tre kvadraternas area utgör det grå området? Låt eleverna konstruera liknande problem med andra storlekar på kvadraterna. Diskutera hur Pythagoras sats kan användas?

Liknande problem är C2015:10, B2015:7, B2002:10.

Cadet 10

Kvadraten *ABCD* har sidlängden 3 cm. Punkterna *M* och *N* ligger på sidorna *AD* och *AB* så att *CM* och *CN* delar kvadraten i tre lika stora delar.
Hur lång är sträckan DM?

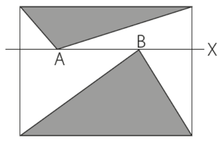


- Diskutera olika lösningsmetoder.
- Hur lång är sträckan *CM*?
- Ändra längden på kvadratens sida. Hur lång blir *DM*?
- Låt *M* och *N* vara mittpunkten på sidorna *AD* respektive *AB*. Hur stora blir de tre delarna?

Liknande problem: B2010:16.

Cadet 16

Bilden visar en rektangel med en linje X som är parallell med rektangelns bas. Punkterna *A* och *B* ligger på linjen X och inuti rektangeln. Arean av de två skuggade trianglarna är tillsammans 10 cm^2. Vilken area har rektangeln?



Låt eleverna lösa problemet utan svarsalternativen. Diskutera deras lösningsmetoder.

- Vad händer med den undre triangelns area när punkten *B* flyttas utefter linjen X?
- Vad händer med den övre triangelns area när punkten *A* flyttas utefter linjen *X*?
- Vad händer med trianglarnas respektive area om linjen *X* förskjuts i vertikalt led?

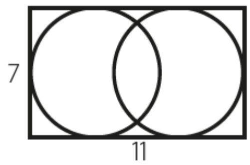
Liknande problem är C2017:24, S2005:15.

Problem där cirklar ingår

I problemen C9, C21, J11, J24 är cirklar involverade. Diskutera begreppen diameter, radie, korda, cirkelsektor, cirkelsegment, tangent, randvinkel, medelpunktsvinkel tillsammans i klassen.

Cadet 9

En rektangel har sidlängderna 7 och 11. Den har två inskrivna cirklar som båda tangerar tre sidor var. Vilket avstånd är det mellan cirklarnas mittpunkter?

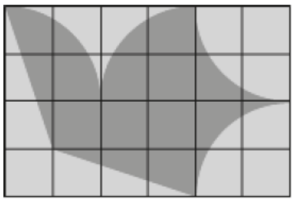


- Vilken diameter har cirklarna?
- Mellan vilka längder kan rektangelns bas variera om cirklarna ska tangera varandra och minst tre sidor?
- Bestäm förhållandet mellan cirklarnas area och rektangelns area.

Liknande problem är GyC2008:12, J2008:16, GyC2007:11.

Cadet 21

En flygklubb vill designa en flagga och använder en flygande duva som motiv. De ritar upp den på ett rektangulärt rutmönster. Duvans area är 192 cm^2. Duvans omkrets består av kvartscirklar och räta linjer.
Vilken storlek har flaggan?

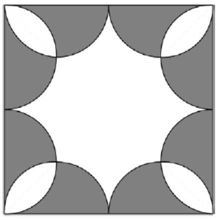


Diskutera olika lösningsmetoder. Vilka geometriska figurer ingår i flaggan? Konstruera egna flagguppgifter.

Liknande problem är C2013:17, C2010:20, C2016:18.

Junior 11

Åtta kongruenta halvcirklar är ritade i en kvadrat med sidlängd 4.
Vilken area har den icke-skuggade delen av kvadraten?

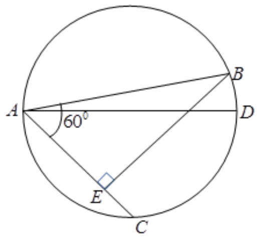


Låt eleverna lösa problemet utan svarsalternativen. Diskutera lösningsmetoderna. Här kan redovisningen underlättas om bilden används. Vilken area har den skuggade delen?

Liknande problem är C2016:3, GyC2010:18, GyC2009:18, J2015:3 och 14, J2008:9, S2015:15, S2010:10.

Junior 24

Två kordor *AB* och *AC* är ritade i en cirkel med diameter *AD*. Vinkeln *BAC* = 60°, *BE* är vinkelrät mot AC och *EC* = 3 cm. Vilken längd har kordan *BD*?



Diskutera olika lösningsmetoder i klassen.

- Hur stor är $\angle ABE$? Vad för slags triangel är ΔABE?
- Dra kordorna *BD* och *CD*. Behandla Thales sats som ger att $\angle ABD = 90°$. Då är $\angle EBD = 60°$.
- Dra höjden från *D* mot *BE* och kalla skärningspunkten *F*. *DF* har samma längd som *EC* = 3 cm.

  ΔBDF är rätvinklig och $\dfrac{DF}{BD} = \sin 60$, $BD = \dfrac{DF}{\sin 60} = 2\sqrt{3}$.

I den ursprungliga versionen fanns informationen *AB* = 24 cm. Den behövs inte för att lösa problemet. Använd den och bestäm relevanta sträckor i figuren.

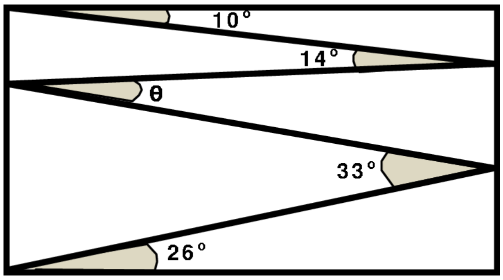
Liknande problem: J2017:24, S2016:17, J2014:21.

Vinkeljakt

I år finns det två problem där en vinkel ska bestämmas. Det är Cadet 14 och Student 16. Arbeta gärna med båda problemen. Ta upp vinkelsumman i triangel, likbelägna vinklar, vertikalvinklar, alternatvinklar, bisektris och vinklar i regelbundna månghörningar. Be eleverna motivera en vinkels storlek, inte bara skriva in vinkelns storlek i figuren.

Cadet 14

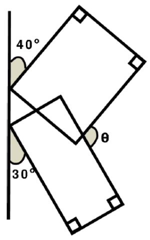
Valerie drar linjer i ett sicksack-mönster inuti rektangeln. Vinklarnas storlek är 10°, 14°, 33° och 26°. Hur stor är vinkeln θ?



Låt eleverna redovisa sina lösningar. Gör liknande problem med färre/fler linjer i ett sicksack-mönster. Titta gärna på GyC2010:23.

Student 16

Bilden visar två rektanglar placerade intill en lodrät linje. Rektanglarna bildar vinklarna 40° och 30° med linjen. Vilket mått har vinkeln θ?

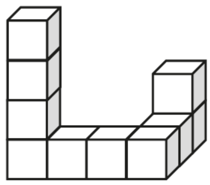


Diskutera olika lösningsmetoder. Be eleverna motivera vinkelsambanden.

Om man vill fortsätta att arbeta med vinklar finns det många liknande problem av olika svårighetsgrader t.ex. B2002: 8, C2017:19, C2016:7, C2014:17, C2013:13, C2012:11, GyC2010:14 och 23, GyC2009:11 och 15, GyC2008:10 och 21, GyC2005:13 och 21, GyC2004:16, J2014:21, J2013:10, J2010:11, J2009 :10, S2012:7, S2010:6.

Tredimensionella figurer

Det finns några problem som bygger på tredimensionella figurer. Två av dem bygger på samma figur men har olika formuleringar.



Ecolier 15

Oskar limmar ihop 10 kuber till ett bygge, som ser ut som på bilden. Sen målar han hela bygget, undersidan också. Hur många kuber är målade på exakt 4 sidor?

Student 4

Figuren är gjord av 10 sammanklistrade kuber. Figuren doppas i en burk med färg så ytan täcks helt. Hur många av kuberna blir målade på exakt fyra av sina sidor?

- Hur många sidoytor är målade?
- Vilken begränsningsyta har bygget?
- Ge eleverna 10 enhetskuber och be dem bygga olika geometriska sammanhängande konstruktioner av kuberna. Jämför begränsningsytor. Jämför E2006:16.
- Om Oskar göra ett rätblock/en kub av sitt bygge, hur många fler kuber behöver han då?

Det är fantastiskt hur många problem som kan skapas utifrån enhetskuber. Använd gärna äldre Känguruproblem om kuber för att arbeta med tredimensionella former.

Liknande problem är E2009:4, E2007:11 och 15, E2006:2, E2004:18, E2002:15, E2001:12, B2017:4, B2016:6, B2014:8, B2013:2, B2011:2, B2008:8, B2006:16, B2001:23 och 24, C2016:21, C2014:6, GyC2008:13, GyC2004:21, C2003:11, J2010:4.

Junior 23

Ed gjorde en stor kub genom att klistra samman ett antal små identiska kuber. Därefter målade han några av sidorna på den stora kuben. Hans syster Nicole tappade kuben och den gick sönder i de ursprungliga små kuberna. 45 av dessa små kuber hade ingen målad sida. Hur många sidor på den stora kuben målade Ed?

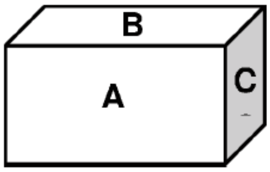
Vi målar en stor kub, byggd av enhetskuber och plockar isär den i sina enhetskuber.

- Hur många kuber har inga sidor som är målade, en sida målad, två sidor målade, osv?
- Vilket är det maximala antal sidor som är målade?

Förslag på lämpliga problem att arbeta med E2003:11, C2002:11, GyCadet2010:21.

Student 7

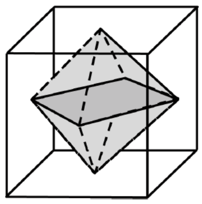
Figuren visar ett rätblock där sidoytorna har areorna *A*, *B* och *C*. Vilken volym har rätblocket?



Diskutera olika lösningsmetoder. Hur kan sidoytornas areor *A*, *B* och *C* användas för att bestämma rätblockets volym? Bestäm lämpliga värden på *A*, *B* och *C* och bestäm kanternas längder.
Använd också problem 22 från Student 2006 när ni diskuterar lösningar.

Student 11

Figuren visar en oktaeder inskriven i en kub med sidlängd 1. Oktaederns hörn ligger i mittpunkterna på kubens sidor. Vilken volym har oktaedern?



Hur ser en oktaeder ut? Diskutera hur man kan bestämma oktaederns volym. Visa de fem regelbundna polyedrarna.

Liknande problem är S2016:20, J2005:20.