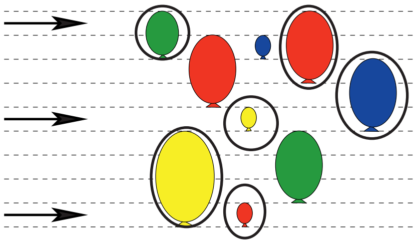
Facit – Ecolier

1: E 6



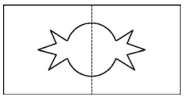
2: B 6 Liam behöver 0, 1, 2, 3, 5 och 8.

3: C 18 Syskonen är 5 år, 6 år och 7 år, $5+6+7=18$

4: E 5 Om skruv 5 hade varit lika lång som skruv 1 hade den också kommit fram under träblocket. Skruv 5 är alltså kortare än skruv 1, och därför kortast eftersom endast en skruv är kortare än de andra.

5: B grön Någon har den gröna ryggsäcken och det är inte Anna (och inte Maja), så det måste vara Tom.

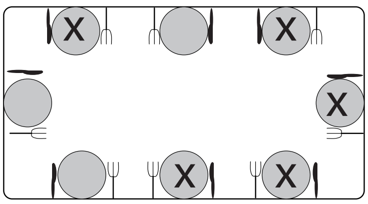
6: D



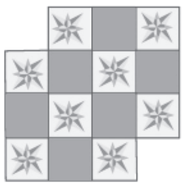
Den vänstra halvan, som syns när Leo viker upp pappret, är en spegelbild av den högra, så som i D. Vikningen bildar en symmetrilinje. Högra halvan syns i problemfiguren.

7: E fredag Peter äter den elfte och tolfte moroten en onsdag. Att äta de första 10 morötterna har tagit honom fem dagar. Går vi fem dagar bakåt från onsdag får vi fredag.

8: B 5



9: D 4 Denna figur kan han inte lägga.



Den har 8 stjärnmärkta men bara 6 enfärgade brickhalvor. Figuren som han lägger måste ha lika många av båda slag.

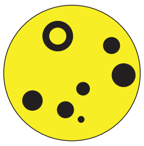
10: D 21 En träff i den yttre ringen ger 4 poäng ($3\cdot 4\,p=12\,p$). Diana får 3 poäng mer när en av pilarna träffar mittringen, alltså ger en träff i mittringen $4+3=7$ poäng. Tre pilar i mittringen ger därför 21 poäng.

11: A 

Åt bägge håll saknas spöket och noshörningen.
Spöket kan inte sättas i någon annan av de fyra tomma rutorna.

12: B 7

Additionen måste vara $\mathbf{2}2+3\mathbf{5}=57$, $2+5=7$

13: E 

14: D lördag

Vi kan utgå från olika veckodagar och utnyttja mönstret som följer av att det är 7 dagar i en vecka. Om vi väljer tisdagar får vi att de övermålade tisdagarna kommer att vara den 21 och 28.
Därifrån kan vi räkna upp eller ner till 25, som är på lördagen.
Eller: Den 25 måste vara samma veckodag som 18 ($25-7$); 11 ($18-7$) och 4 ($11-7$). Eftersom 3 är en fredag är 4 en lördag.

15:C 8

Endast de två yttersta kuberna är målade på annat än 4 sidor.
De är målade på 5 sidor. De har endast en sida som är ihoplimmad med en annan kub, alla andra kuber har två sådana ihoplimmade sidor.

16: E 10

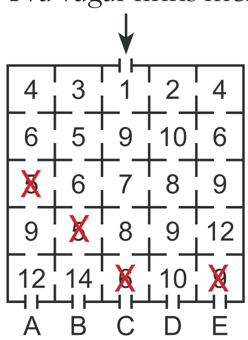
Vi kan se ett mönster i hur ekipagen kommer.
Mönstret består av grupper om två ekipage.
Varje sådan grupp består av en röd vagn dragen av en älg och en grön vagn dragen av två hjortar, dvs 3 djur.
15 djur drar $15/3=5$ grupper om två ekipage. Det är dubbelt så många hjortar som älgar i varje grupp. 5 älgar och 10 hjortar.

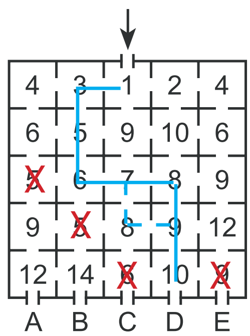
17: C 4

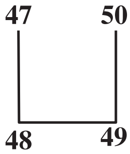
Det finns insekter på 5–8 blommor, dvs mer än hälften av 8.
Eftersom relationen mellan trollsländor och fjärilar är 1:2, måste det totala antalet insekterna vara delbart med 3, dvs endast 6 st är möjligt här.
Då är 2 insekter trollsländor och 4 är fjärilar.

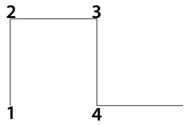
18: D D

Vi tar bort de rum som vi vet att Ru aldrig kommer in i därför att deras nummer inte är större än numret på något av dess angränsande rum.
Då ser vi att Ru inte kan ta någon annan utgång än D.
Två vägar finns men de mynnar båda två ut i D.





19:B 

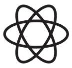
Mönstret består av 4 linjestycken som är numrerade: uppåt, åt höger, nedåt, åt höger. Detta upprepas.


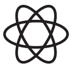
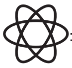
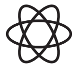
Varje hörn numreras alltså med + 4.
Vi ser därför efter talen i ”fyrans tabell”.
I alternativen är det 48 och 52 som är multiplar av 4. Dessa ska finnas på samma plats i mönstret som 4, dvs som i alternativ B.

20: C C

Kula C måste väga 30 g eller 40 g. $30 = 10 + 20$ och $40 = 10 + 30$.
Eftersom A + B är tyngre än C + D kan inte C väga 40 g,
eftersom $40 + 10 = 50$ och även A + B skulle då väga $20 + 30 = 50$,
dvs vågen skulle väga jämnt.
Om D väger 20 eller 30 blir högra vågskålen tyngre.

21: A 

Eftersom addition både av två udda tal och av två jämna tal ger ett jämnt tal så måste både  och  vara jämna tal, dvs 2 och 4, och

eftersom  +  =  så är  = 2,  är därmed 1,

$1 + 1 = 2$, och  = 5 eftersom $1 + 4 = 5$.

Det tal vi inte har löst ut är 3 och den symbol som återstår är .

22: A 15 km

Vägarna mellan Anna och Mary och mellan Nick och John täcker samtliga sträckor på kartan. De är sammanlagt 16 km + 19 km = 35 km.
Även om vi ser på vägarna mellan Mary och Nick och mellan Anna och John är de 35 km sammanlagt.
Vi tar sen bort vägen mellan Mary och Nick, som är 20 km.
Vägen från Anna till John är därför 35 km – 20 km = 15 km.
Genom att i bilden rita in de sträckor vi räknar med kan vi illustrera varför vi ska ta bort sträckan mellan Mary och Nick.

23: E bara 1 eller 7

Talen 2 – 6 har alla två tal som inte kan stå i en ruta som gränsar till rutan med frågetecknet. Två lösningar:

3		5
6	1	7
	4	
	2	

3		1
5	7	4
	2	
	6	

24: D 198

De minsta kvadraterna har arean 1.
Det ger att den näst minsta kvadraten har arean $3 \cdot 3 = 9$.
Vi har sen en kvadrat med arean $4 \cdot 4 = 16$, en med arean $7 \cdot 7 = 49$ och den stora kvadraten har därför area $11 \cdot 11 = 121$.
Rektangeln har därmed arean $1 + 1 + 1 + 9 + 16 + 49 + 121 = 198$.

Arbeta vidare med Ecolier 2018

Låt alla först få möjlighet att lösa problemen på egen hand om de inte hann det i samband med tävlingen. I samband med genomgång passar det sen bra att låta eleverna lösa problemen i par eller i grupp. Uppmuntra dem att hitta så många olika lösningssätt som möjligt.

Diskutera gruppernas lösningar i klassen och jämför idéer och angreppssätt. Låt också eleverna få granska kamraternas lösningar:

– Har de tagit hänsyn till alla förutsättningar?

– Är lösningarna tydliga?

– Är resonemanget korrekt?

– Fungerar lösningsmetoden på andra, liknande problem?

Att analysera och diskutera varandras lösningar är bra, men det kräver förstås att man arbetar långsiktigt så att eleverna vänjer sig vid att både ge kritik på ett konstruktivt sätt och att ta emot kritik. Om de redan från början får uppleva att det är en del av undervisningen kan det bli en naturlig och uppskattad form av arbete med problem.

Att presentera en lösning som andra kan följa och som är korrekt uppbyggd är något som eleverna måste få tid och möjlighet att utveckla med hjälp av lärare. Välj några av årets problem, arbeta igenom lösningarna noga och gör en riktigt genomarbetad redovisning.

Alla problem kan naturligtvis diskuteras utifrån valda lösningsmetoder. De flesta problem kan lösas på olika sätt och det är alltid bra att jämföra dessa och se på likheter och skillnader. Det är också bra att beskriva lösningarna med hjälp av olika uttrycksformer, konkret material, bilder, muntligt eller skriftligt tal och med symboler. Jämför de olika formerna och se hur den konkreta representationen uttrycks i ord och med symboler. Några frågor att återkomma till när problemet är löst:

– Kontrollera att lösningen verkligen svarar mot frågan. Är det ett rimligt svar? Hur vet vi det?

– Påminner problemet om något annat problem, som vi har löst tidigare?

– Vilka kunskaper hade vi nytta av när vi löste problemet?

– Vilka nya frågor kan problemet väcka?

– Lärde vi oss något nytt av problemet?

Gå också igenom de felaktiga svarsalternativen och resonera om varför dessa inte är riktiga. Låt eleverna göra förändringar i uppgiften så att de andra alternativen blir riktiga. Utmaningen kan vara att göra så små förändringar som möjligt. De felaktiga svarsalternativen kan också användas som utgångspunkt för diskussion om vad som skulle kunna leda fram till dessa svar: ”Hur tror ni att den som har fått alternativ *a* som svar har tänkt?” Elever behöver få diskutera både matematikinnehållet och strategier för att utveckla sin matematiska kompetens. Låt dem därför få argumentera för sina lösningar och sina val av metoder. Matematiskt arbete handlar mycket om resonemang. I arbetet med alla problem bör förmågorna att *resonera och argumentera* vara centrala.

I samband med diskussion av problemen kommer ett antal termer att aktualiseras. Gå igenom dem. Låt eleverna använda och själva få definiera olika begrepp och återkom till dem i olika sammanhang. För definitioner hänvisar vi till *Matematiktermer för skolan* (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Här har vi sorterat förslag under rubrikerna *Tal*, *Geometri* samt *Problemlösning och resonemang*. Naturligtvis kan flera av problemen också passa under andra rubriker. Många problemtyper återkommer år från år, i olika skepnader och i olika varianter. Vi hänvisar här till några gamla problem som kan användas i samband med arbetet med årets, men det finns många fler att hämta på Kängurusidan på nätet, ncm.gu.se/kanguru, där alla tidigare omgångar är samlade. Där finns också förslag på hur man kan arbeta vidare med de problemen.

Tidigare problem inom området geometri finns dessutom samlade i boken *Geometri och rumsuppfattning med känguruproblem*. Läs mer om den på ncm.gu.se/node/4742.

Tal

Med utgångspunkt i problem kan vi diskutera egenskaper hos tal. Några grundläggande aspekter som passar särskilt bra för elever i denna ålder är positionssystemet, udda och jämna tal, tals uppdelning, räknesättens innebörd och enkel faktorisering. I Kängurun brukar det ofta dyka upp problem som handlar om grundläggande bråk. Problemen utmanar också elevernas strategiska tänkande och förhoppningsvis väcker de frågor om tal. Uppmuntra dem därför att ställa fördjupande frågor. Hjälp dem också att se samband både inom matematiken och mellan matematiken och omvärlden. Här har vi ordnat problemen så att de som har liknande innehåll kommer efter varandra, därför kommer de inte i nummerordning.

2 Liams stämplar

Vad är en siffra och vad är ett tal? Ibland möter man uppfattningen att 0–9 är siffror och 10 och över är tal. Bakom denna uppfattning ligger nog en sammanblandning.
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9 är de siffror vi har för att skriva tal i vårt system.

Talen är ….. -3, 1, 2, 5, 7, 12, 20,5, $3\frac{1}{2}$ $\sqrt{2}$ etc.

Vi kan jämföra med att vi har bokstäver a, b, c, etc för att skriva ord som sommardag, sjöstrand och bad och några av dessa ord är korta som i, å och ö.

Gör motsvarande uppgift med andra datum och med tal som intresserar eleverna.
– Vilket är det största talet ni kan stämpla om varje siffra bara får användas en gång? Det minsta?
– Hur många stämplar behövs för att stämpla det största femsiffriga talet? Det minsta?
Ge eleverna ett urval av siffror och gör största och minsta tal.

Låt eleverna med ett begränsat antal siffror försöka lägga alla tänkbara tal.
Undersök sedan systematiskt:
– Hur många olika tal kan man lägga med siffrorna 1, 2 och 3?
– Om man bara får använda varje siffra en gång? Om man kan använda den flera gånger?
– Gör motsvarande med 1, 2, 3 och 4, eller med bara 1 och 2 om det behövs för att fånga alla elever.
Detta är en grundläggande övning i kombinatorik.

Liam har i stället siffror på små kort. Vilka siffror och hur många av varje behöver han för att kunna skriva årets alla datum på samma sätt som i uppgiften?

Tidigare problem: Siffror, tal och talvärde: Ecolier 2007:6; Benjamin 2009:4;
Kombinatorik: E 2007:10; E 2015:23

3 Tre systrar

Låt eleverna berätta hur de löste uppgiften. Kanske har någon sett att $5+6+7=6+6+6$, annars kan du själv föreslå denna lösning. Varför stämmer denna likhet? Låt eleverna få förklara.

Gör fler exempel med tre konsekutiva tal $7+8+9$, $14+15+16$, $89+90+91$.
Med andra tal: $100+200+300$, $75+100+125$

Undersök sedan andra additioner och dra generella slutsatser om vad som händer med en summa om en term minskar med lika mycket som en annan ökar.
Se hur detta kan användas vid huvudräkning: $127 + 63 = 125 + 65$.

7 Peter Kanin äter morötter

Uppgiften kan utvecklas åt olika håll. Vi kan se på det multiplikativa mönstret:
– När äter han den elfte moroten? Den trettonde?
Här gäller det att se vilka morötter (i ordning) äter han på samma dag.
Gör en tabell med

dag 1 – 1, 2
dag 2 – 3, 4
dag 3 – 5, 6 etc, och se efter mönstret.

– Vilken dag åt han den 20:e? 30:e? etc
– Hur skulle bli om han åt 3 morötter varje dag? 4?

Vi kan också se på kalendern och strukturen som uppstår med 7 veckodagar. Då finns det en nära koppling till problem 14:

14 Kalendern

En vecka är 7 dagar och detta hjälper oss att avgöra datum eller veckodagar.
– Om, som i problem 7, onsdag är den sjätte dagen, vilken är den första? Vilken är den sjunde? Åttonde?
– Om 1:a är en onsdag, som i problem 14, vilken veckodag är då 7:e?
Undersök almanackan med avseende på veckodag och datum. Uppmärksamma att 1, 1 + 7, 8 + 7, 15 + 7, 22 + 7 är samma veckodagar (alltså inte 1, 7, etc).
– Vilka datum ligger på måndagar, tisdagar etc i kalendern i problemet?
Låt eleverna konstruera egna problem med kalendern.

Andra problem med anknytning till kalender och veckodagar:
Årets Benjamin 6 är ett liknande problem. Se också M 2008:3; E 2011:1; E 2013:12;B 2011:18.

12 En övermålad addition

Uppmärksamma terminologin när ni diskuterar lösningen, tiotalssiffran och entalssiffran. Här handlar det om enkel addition, utan tiotalsövergång. Benjamin 5 är ett motsvarande problem, men med subtraktion och med växling: $\square 3 - 2\square = 25$

Visa eleverna att de har stor nytta av att ha automatiserat tabellerna i addition och subtraktion. Låt dem konstruera liknande uppgifter till varandra för att öva dessa grundläggande kombinationer i ett lite mer kreativt sammanhang.

Tidigare problem: E 2013:2; E 2015:3; B 2014:1; B 2014:19.

17 Insekter på rosenbuske

I detta problem spelar begreppen hälften och dubbelt stor roll.
– Vilka antal är möjliga om det ska vara dubbelt så många fjärilar som trollsländor?
– Vilka lösningar hade varit möjliga om vi inte hade förutsättningen att det sitter insekter på mer än hälften av blommorna?
– Vilka lösningar är möjliga om busken hade 40 blommor? 100?

Gör en tabell över summor av två tal där det ena är dubbelt så stort som det andra:

1 + 2
2 + 4
3 + 6
4 + 8
5 + 10 etc

Studera summorna. Vad är gemensamt?

Låt eleverna försöka förklara varför summan består av tre lika stora delar i alla dessa fall. Detta är ett samband som kommer att dyka upp i olika sammanhang. Om någon del ska vara dubbelt så stor som den andra måste helheten delas i tre delar. Visa konkret med t ex multilink eller med bilder.

En utmaning kan vara förra årets Benjamin 10, gärna utan svarsalternativ.

Petter och Albin löser problem olika fort. När Petter har löst två problem har Albin löst tre. Sammanlagt löser de två pojkarna 30 problem. Hur många fler problem än Petter har Albin löst?

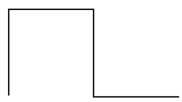
A: 5 B: 6 C: 8 D: 10 E: 15

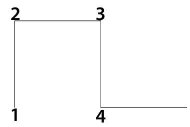
Se också kommentar till problem 16.
Tidigare problem: E 2004:10; E 2011:14; E 2012:12; E 2017:2; E 2017:17; B 2017:6.

19 Tal i mönster

Mönster är centralt i matematik och hur man kan arbete med mönster finns beskrivet i många material för grundskolans tidigare årskurser och det har förekommit i Kängurutävlingen flera gånger.

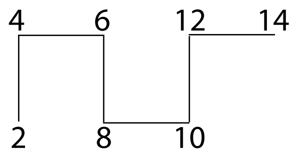
– Hur fortsätter linjen? Be eleverna att beskriv mönstret med ord.
– Var finns de jämna talen? De udda?
– Hur ser mönsterdelen ut? Rita en sådan del:





Delen består av fyra element och hörnen är numrerade från 1, så på den plats 4 står kommer också alla multipler av 4 att återfinnas. Lista gemensamt dessa multiplar, åtminstone upp till 60.
Undersök svarsalternativen:
– Två av dem är egentligen samma, vilka? (A och E)
– Hur skulle mönstret ha sett ut i början om de alternativ A, C eller D skulle vara riktiga?

Låt eleverna sätta ut exempelvis endast jämna tal (börja med 2) utefter samma linje och se på mönstret. Vilka tal hamnar nu på samma position? Varför?



Låt eleverna konstruera en liknande linje med 3 eller 5 element i mönsterdelen.

Tidigare problem: E 2010:7; B 2003:13.

Geometri

Geometri är ett område som lämpar sig väl för problemlösning. Att resonera sig fram till lösningen och att sedan kunna argumentera för den är väsentliga delar av problemlösningsförmågan.

I geometri spelar också bilden en väsentlig roll, som underlag för kommunikation och som stöd för tanken. Vissa problem utmanar elevernas förmåga att visualisera och går relativt lätt att lösa om man gör det konkret, men är betydligt svårare om lösningen måste ske ”i huvudet”. Att kunna göra sådana operationer i tanken är därför något som behöver behandlas i undervisningen. Ett stöd för tanken kan vara att med ord beskriva hur man vrider, vänder, speglar etc.

1 Pilar och ballonger

Bilden kan vara utgångspunkt för en diskussion om både storlek och läge.

– Hur många olika storlekar har ballongerna?

– Hur mycket större är den största ballongen jämfört med den minsta? Den är fyra gånger så lång, men arean är mer än så. I den här åldern räcker det att uppmärksamma eleverna på att det är olika skalor om vi jämför längd och area (eller volym).

Var ligger ballongerna i förhållande till varandra? Låt eleverna uttrycka deras placering så noggrant som möjligt, med hjälp av ord.

Be dem sedan att komma på ett annat sätt att beskriva läget. Kanske kommer någon på att numrera avstånden, att skapa ett koordinatsystem. Spela ”Sänka skepp”, som går ut på att hitta rätt i ett rutsystem med hjälp av rader och kolumner. Det behöver naturligtvis inte vara ett skepp som ska sänkas, det kan lika väl vara ballonger som ska träffas eller gömda skatter som ska hittas. Men idén är att den ena spelaren placerar något i ett rutsystem som den andra ska hitta genom att gissa rad och kolumn.

Andra problem om att orientera sig i ett område: M 2014:5; E 2011:3; E 2012:1; E 2013:7; B 2016:10.

6 Leos pappersklippning

Uppgiften handlar om symmetri och viklinjen blir symmetriaxeln. Eftersom vi bara har de fem alternativen att välja mellan finns det bara en möjlig vikningslinje. Var är vikningen?
Hur hade det uppvikta pappret sett ut om vikningslinjen hade varit någon av de andra tre sidorna? Undersök konkret.

Undersök alternativen – vilka är symmetriska efter viklinjen?
– Var finns symmetrin i alternativ C?

Låt eleverna vika och klippa olika former och undersök symmetrin. Rita symmetriska former. Titta efter symmetrier i klassrummet, på skolgården i närområdet.

Tidigare problem: M 2008:12; E 2011:8; E 2017:12; B 2016:16;

8 Mike dukar

Förstår alla att bordet ses ovanifrån? Be eleverna att rita in glas, så att de står ovanför tallriken. Diskutera vad ovanför i det sammanhanget betyder. Ritar alla glaset i rätt perspektiv? Vilken strategi använder eleverna för att lösa uppgiften? Vrider de på pappret eller hanterar de det i huvudet? Diskutera varför det som är ritat till vänster om tallriken på övre kanten ändå ligger till höger om tallriken för den som sitter vid bordet.

– Vad finns under bordet? Varför vet vi inte det?
Vad är det vi ser när vi betraktar något ovanifrån? Vad är det vi inte ser?

Tidigare problem: E 2015:8; E 2015:14; B 2008:18; B 2016:4

9 Roberto lägger brickor

– Hur kan vi enkelt avgöra att den andra figuren inte går att lägga?
– Hur många brickor har han använt till de olika figurerna?
Undersök om det går att lägga de möjliga figurerna på olika sätt.

Utgå från den tredje figuren. Till den har han använt 3 brickor.
– Hur stor är den? Bestäm gemensamt vilken areaenhet ni ska använda.
– Vilken omkrets har den? Bestäm enhet gemensamt.
Lägg eller rita sedan andra figurer med samma area (dvs med samma antal brickor).
Jämför omkretsen. Gör motsvarande med figurerna med 4 och 5 brickor.

En vanlig föreställning är att alla former som har samma area också har samma omkrets.
Genom att laborera med givna areor kan eleverna upptäcka att detta inte gäller.
Omvänt kan de undersöka en given omkrets och skapa ett antal figurer som har olika area.
– Vilken form har störst area med en given omkrets?
Utgå från en kvadrat och låt eleverna skapa en annan form, med större omkrets men mindre area.

Tidigare problem: M 2008:6; M 2010:12; E 2007:16; E 2011:6 & 13; E 2012:6; E 2016:8; B 2007:12.

13 Inverterad och vriden

Den stora ringen är antagligen lättast att identifiera, men den finns med på fyra alternativ så det krävs noggrannare granskning. Förutom prickarnas former och storlek blir det nödvändigt att diskutera läge.

Låt eleverna beskriva hur de resonerar sig fram till svaret. Vilka prickar är lättast att identifiera? Hur kan de vara säkra på att de har funnit rätt svar? Låt eleverna motivera varför de felaktiga alternativen är fel och det riktiga rätt.

Hur mycket är den rätta bilden vriden? Hur kan vi beskriva vridningen?
Visa och gå igenom begreppen medurs och moturs samt medsols och motsols. Förklara både innebörden av begreppen och av orden som sådana.
– Hur ser bilden ut om vi vrider den ett halvt varv? Ett helt varv? Två varv?
Pröva att vrida andra enkla figurer och diskutera vridningens storlek.

Att undersöka och samtala om vridning ger en grund att sedan bygga vidare på för att utveckla förståelsen för vinkelbegreppet.

Tidigare problem: M 2015:6; E 2017:4; B 2007:8; B 2010:9;

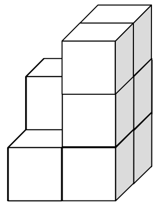
15 Oskars bygge

Diskutera terminologin: kub, sida, kant. Kanske har någon hört *sidoyta*, som ju är en tydligare term.

De klossar som är målade på exakt 4 sidor har två sidor som är limmade mot en annan kloss.
De bitar som kan vara svåra att avgöra är hörnbitarna. Bygg figuren och undersök hur den ser ut i hörnen. Hur många sidor är målade på de två yttersta bitarna? Låt eleverna motivera sina svar.

Låt eleverna bygga olika kroppar med kuber och rita dem från olika håll. Prata om vad man ser och hur det ser ut. En modell som kan användas är att bygga med multilink, dvs olikfärgade kuber, och sen rita bygget från fyra håll: framifrån, bakifrån, från vänster och från höger.
Varje bygge beskrivs alltså av fyra ritningar. Eleverna kan arbeta i par och sen byta ritningar med ett par kamrater, som får i uppgift att bygga efter ritningarna

Milou 12, 2009 handlade om att bygga efter en speciell sorts ritning, som den till höger. Visa eleverna denna bild och diskutera hur den ska tolkas. Hur skulle en ritning till Oskars bygge se ut?



2	3
1	3

Låt eleverna bygga egna konstruktioner som de sedan får beskriva på motsvarande sätt. Be dem sedan att byta ritningar med varandra och bygga efter dessa.

Konstruktionerna kan också ritas. Att rita tredimensionellt är inte lätt och eleverna behöver få ledning och stöd för det. Använd gärna ett isometriskt prickpapper, som finns att hämta på ncm.gu.se/node/2281

Tidigare problem: Klossproblem har funnits med många gånger i alla tävlingsklasser. Bl a M 2009:4; E 2001:12; E 2002:15; E 2004:18; E 2006:2; E 2007:11 & 15; E 2009:4; B 2001:23 & 24; B 2006:16; B 2008:8; B 2011:2; B 2013:2; B 2014:8; B 2016:6; B 2017:4; C 2003:11; C 2014:6; C 2016:21; GyC 2004:21; GyC 2008:13.

24 Rektangelns area

Detta problem ligger sist eftersom det för elever i dessa åldrar inte kan betraktas som en rutinuppgift med areaberäkning. Många måste troligen själva skapa en modell genom att tänka sig ett rutmönster. Det ger en bra utgångspunkt för att diskutera begreppet area. De mindre kvadraterna, med sidan 1, 3 och 4 kan de relativt enkelt dela in i rutor, men sen blir det svårare. Om de då har upptäckt sambandet mellan sidans längd och arean kan de klara de större kvadraterna utan att rita in smårutorna. Förmodligen tar detta en del tid för många, därför ligger uppgiften sist.

Utnyttja gärna problemet för att introducera eleverna för begreppet area eller för att vidareutveckla deras förståelse om de redan har grundläggande förståelse.
– Den lilla kvadraten är 1, Vad vet vi då om sidans längd? Varför?
– Hur många småkvadrater får rum i den näst minsta kvadraten? Hur kan vi visa det?
– Hur många får rum utefter ena sidan?
– Hur många sådan ”rader” kan vi lägga?
– Hur många småkvadrater får rum i nästa storlek? Hur vet vi det?
– Hur ska vi täcka den näst största kvadraten? Hur många i varje rad och hur många rader?
– I den största kvadraten?

Låt eleverna rita in alla småkvadrater i åtminstone 3 x 3 och 4 x 4 kvadraterna, rita småkvadrater utefter ena sidan och sen skissa antalet rader i 7 x 7 och ev 11 x 11 kvadraterna. Om eleverna redan har arbetat med area på detta sätt kan de i den största kvadraten endast utgå från sidans längd och motivera varför den blir 11 x 11.

I problemet är det den lilla kvadraten som är enhet. Det blir då relativt tydligt att enheten är det vi mäter med. Diskutera eventuellt vilka enheter vi vanligen använder när vi mäter area. Visa hur 1 dm^2 är storleken på en kvadrat med sidan 1 dm. Dela kvadraten i två mindre bitar och lägg samman dem
– Hur stor är den nya figuren? Hur vet vi det?

Gör flera figurer med arean 1 dm^2, genom att klippa och lägga samman bitar. Diskutera gemensamt varför alla dessa figurer har samma area. Detta är grundläggande för att eleverna ska kunna utveckla sin förståelse för area. Ett område kan delas upp i mindre delar som kan flyttas runt utan att arean ändras. De mindre delarnas sammanlagda areor är densamma som hela områdets area.

Tidigare problem: E 2009:9; E 2011:6; E 2012:3; E 2015:9; B 2003:19; B 2007:14.

Problemlösning, logik och resonemang

Textproblem uppfattas av många som svåra, speciellt om det är mycket information att hantera. Eleverna behöver få undervisning om hur de ska angripa den typen av uppgifter. Arbeta därför gemensamt med texterna. Gå igenom tillsammans och hjälp eleverna att sätta sig in i problemet, exempelvis med stödjande frågor. Hjälp eleverna att strukturera informationen i texten. Gå också igenom eventuella oklarheter beträffande ord och meningsbyggnad.

Att förstå vad problemet handlar om är en förutsättning för att kunna lösa det. Men att förstå vad det handlar om och vad som efterfrågas är inte detsamma som att ”veta vad man ska göra”. Problemlösning handlar om att komma från att förstå situationen till att komma på hur man ska komma fram till svaret på den formulerade frågan. Det är denna process, som består av flera steg och ofta innebär både misslyckade och lyckade insatser, som är central i undervisning om problemlösning. Att lära sig hantera motgångar och misslyckanden är viktigt för att utveckla problemlösningsförmågan.

I problemlösning spelar resonemang och argumentation en stor roll. Hjälp eleverna att göra resonemangen tydliga och visa gärna hur du själv resonerar som komplement. För att kunna utveckla sitt resonemang är det bra att kunna få följa mer utvecklade resonemang.

Här tar vi upp några problem där det är speciellt intressant att diskutera olika strategier och några som passar bra som illustration av textformuleringens betydelse. Flera av dem skulle förstås också kunna stå under andra rubriker.

4 Fem skruvar

Detta problem illustrerar på ett bra sätt textens betydelse, om vi bara har bilden får vi inte samma information som vi får av text och bild tillsammans (även om skruvarnas utseende också signalerar att de är likadana och lika långa, men säkra kan vi inte vara).

Be eleverna att motivera varför skruv 5 är kortare än de andra.
– Hur kan vi veta att skruv 3 och 4 är lika långa? Varför behöver vi inte mäta?

Tidigare problem: E 2015:2.

5 Toms ryggsäck

Här kan eleverna behöva hjälp med hur de ska behandla den information som texten ger. Låt eleverna ge förslag, t ex att utgå från en lista. Arbeta igenom problemet systematiskt, uppmärksamma ordet *inte* och vad det får för betydelse. Låt eleverna konstruera ett liknande problem, men där lösning saknas.

Tidigare problem: E 2007:14; E 2008:3; E 2008:13; E 2010: 8; E 2010:17; E 2011:5; E 2011:15; B 2009:3.

10 Dianas pilar

Detta är ett typiskt flerstegsproblem och det passar bra för att illustrera hur en lösning kan resoneras fram. Låt eleverna berätta hur de har tänkt och jämför olika strategier.
Variera poängen så att eleverna får använda sina strategier på flera liknande problem.
Ett något enklare problem, men i grunden detsamma, finns i år i Milou och även Benjamin 3 är ett liknande problem.

Tidigare problem: E 2008:9; E 2011:7; E 2014:8

11 Sudoku med figurer

Problem av den här typen kan uppfattas som enkla, men för många barn är det en utmaning att beakta två riktningar samtidigt. Be eleverna beskriva hur de resonerar. Varför kan det inte vara en noshörning i rutan? Diskutera varför vi inte behöver fylla i allt för att lösa uppgiften.
Låt eleverna fylla i alla rutor.

Byt ut figurerna mot siffror och lös det.
Låt eleverna fylla i ett tomt rutnät 5×5, med siffrorna 1– 5. Går det att göra på olika sätt?
Pröva också något Sudoku från tidningar, de brukar finnas i olika svårighetsgrad,

Tidigare problem: E 2012:5; E 2007:7

16 Festliga vagnar

Illustrera hur ekipagen anländer, konkret eller med en bild. Se till så att eleverna får upptäcka mönstret, dvs det är 2 vagnar med 1 + 2 djur som återkommer. Variera antalet vagnar som anländer, men ta inledningsvis endast jämna antal. Systematisera och gör en tabell över antal vagnar och djur. Låt eleverna upptäcka hur antalet ökar och att det är multiplar av 3.
Ställ frågor:
– Hur många djur har passerat om det har kommit 8 vagnar? 10 vagnar? 100 vagnar?
– Hur många vagnar har kommit om det har kommit 6 djur? 21 djur?

Använd en fråga, tex Hur många djur har passerat om det har kommit 5 vagnar?, för att se på hur de udda antalen påverkar lösningen.

Variera problemet, t ex så att det är röda vagnar som dras av en älg, gröna vagnar som dras av två hjortar och blå vagnar som dras av två rävar. Jämför med om de blå vagnarna dras av tre rävar. Låt eleverna upptäcka mönster och samband.

Tidigare problem: E 2008:7.

18 Rummen i huset

Diskutera lösningsstrategier. Det går förstås att prova sig fram eftersom ”huset” inte är så stort. Jämför att lösa problemet från ”ingången” och från ”utgången”. Diskutera betydelsen av att se på grannrummen till enskilda rutor.

Tidigare problem: B 2011:8; E 2011:10.

20 Kulvägning

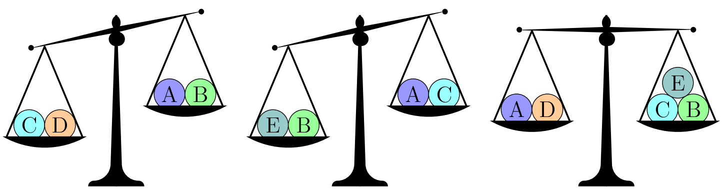
Detta problem utmanar verkligen elevernas förmåga att resonera.
Börja med att pröva. Ställ frågor som hjälper elevernas resonemang:
– Hur kan vi få vågen att väga jämnt? (bilden till höger)
– Varför kan inte kula C väga 40 g?
– Om vi vet att C väger 30 g, varför kan det inte vara D som väger 20 g?

Uppmärksamma eleverna på att de måste se på båda bilderna innan de kan vara säkra på sitt svar. Pröva om lösningen stämmer.

Årets Milou 15, påminner om detta men är något enklare. Det är ett bra problem att börja med. Ett liknande, men svårare, problem finns också på Benjamin, nr 18:

Vi har fem kulor. De väger 30 g, 50 g, 50 g, 50 g och 80 g.

Vilken kula väger 30 g?



Tidigare problem: E 2011:2; E 2016:21; E 2004:8; E 2002:5.

21 Ett hemligt språk

Lösningen till detta ligger i att konstatera att både fisken och ”elektronmolnet” måste vara jämna tal. Varför? Varför kan inte fisken vara 2?

Gå igenom resonemanget och skriv upp de stegvisa slutsatserna. Det kan hjälpa eleverna att förstå vad ett stegvis resonemang innebär och de kan få en ”modell” som de kan använda.

Problemet kan förstås också användas för diskussion om udda och jämna tal. Ett passande problem att inleda med är Ecolier 2008:17:

Det ligger sju kort i en låda. Korten är numrerade från 1 till 7. Först tar Sofia upp tre kort. Sen tar Ali upp två kort. Det ligger alltså två kort kvar i lådan. Sofia säger sedan till Ali: ”Jag vet att summan av talen på dina kort är ett jämnt tal.”
Vilken summa har talen på Sofias kort?

A: 15 B: 9 C: 6 D: 10 E: 12

Tidigare problem: B 2008:16: B 2009:12; M 2012:8; E 2013:13; E 2002:9

22 Vägen från Anna till John

Låt eleverna få redovisa sina (troligen) olika sätt att lösa problemet.
– Kan vi utgå från att avstånden är korrekta i bilden? Varför inte?

Pröva att placera husen i korsningen, ett hus i taget. Om Annas hus ligger i korsningen, hur ser kartan ut då? Vad blir lösningen? Om Marys hus ligger i korsningen?

– Kan husen ligga så att det från ett hus utgår tre vägar om avstånden ska stämma? Kan alla hus vara det hus som vägarna utgår från?

– Hur kan kartan se ut om vi endast har avstånden att utgå från? Vilken roll spelar bilden?

Tidigare problem: B 2008:21.

23 Talfigur

Låt eleverna få arbeta med problemet så att de har en lösning. Är alla lösningar lika? Samla alla tänkbara sätt att sätta ut talen. Vad är lika?

– Vad är det för speciellt med talen 1 och 7 i detta problem?
Bygg ut hagen med en ruta nedåt och lägg till talet 8. Vilka tal kan då stå i rutan med frågetecken?

Andra problem som handlar om att placera ut tal enligt någon regel: E 2011:16; E 2012:17; E 2014:17; E 2016:3; E 2017:22; B 2017:20.

Att läsa

Gennow, S. & Wallby, K. (2010). *Geometri och rumsuppfattning med Känguruproblem*. NCM, Göteborgs universitet.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation*. Stockholm: Liber.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM, Göteborgs universitet.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal*. NCM, Göteborgs universitet.

Rystedt, E. & Trygg, L. (2010). *Laborativ matematikundervisning – vad vet vi?* NCM, Göteborgs universitet.

Wallby, K. m fl (red) (2014). *NämnarenTema 10 Matematikundervisning i praktiken*. NCM, Göteborgs universitet.

Nämnaren. I varje nummer finns Problemavdelningen och Kängurusidan. Läs också tidigare artiklar kring problemlösning. Nämnarenartiklar äldre än ett år finns fritt tillgängliga som pdf-dokument på Nämnaren på nätet, namnaren.ncm.gu.se. Du finner dem via *artikeldatabasen*. Under *ArkivN* finns alla publicerade Uppslag och Problemavdelningar samlade. Nämnaren på nätet presenterar varje månad nya problem under rubriken *Månadens problem*.

Strävorna finns på ncm.gu.se/stravorna. Där finns aktiviteter, problem och artiklar samlade och ordnade efter kursplanens beskrivning av matematikämnets syfte och mål.

Matematiklyftets lärportal larportalen.skolverket.se. På lärportalen finns moduler om problemlösning för alla stadier. Dessa ingår i Matematiklyftet men finns fritt tillgängliga för alla. Modulerna innehåller teoritexter, underlag för lärares gemensamma fortbildning samt problem för eleverna. Matematiklyftets material finns alltså tillgängligt för alla. På Lärportalen finns också andra moduler där problemlösning ingår.