

Arbeta vidare med aritmetik 2018

I det här materialet har vi samlat problem inom aritmetik från flera olika tävlingsklasser, från Ecolier till Student.

Årtal

Varje år förekommer det problem som utgår från siffrorna i tävlingsåret. De enklaste involverar prioriteringsreglerna, i år är det två sådana problem. Talet 2018 förekommer också i andra problem men de återkommer vi till senare i materialet.

Cadet 1

Vilket värde har uttrycket $\frac{20+18}{20-18}$?

Diskutera prioriteringsreglerna och låt eleverna också möta uttrycket som

$$(20 + 18)/(20 - 18),$$

$$20 + 18/20 - 18,$$

$$(20 + 18)/20 - 18,$$

$$20 + 18/(20 - 18).$$

Student 2

Vilket av följande uttryck har högst värde?

A: $2-0\cdot 1+8$

B: $2+0\cdot 1\cdot 8$

C: $2\cdot 0+1\cdot 8$

D: $2\cdot(0+1+8)$

E: $2\cdot 0+1+8$

Vilket av uttrycken har lägst värde? Skapa andra uttryck med hjälp av de fyra räknesätten, parenteser och potenser.

I Junior 7 förekommer 2018 tillsammans med procent. Hur löser man detta problem utan räknare? Låt eleverna redovisa sina lösningsmetoder. Byt ut 2018 mot andra tal. Byt ut 25 mot annat tal.

Liknande problem: Ersätt det givna årtalet med 2018 och diskutera hur den ändringen förändrar problemet.

Benjamin 2017:1, Student 2017:1, Cadet 2014:1, B2013:1, Junior 2013:1.

Almanacka

Tre problem med olika svårighetsgrad handlar om ett almanacksblad där de flesta datum är dolda av en stor fläck. Problemet finns på Ecolier nr 14, Benjamin nr 6 och Student nr 1.

Resonera om hur man snabbt kan bestämma vilket datum det är om en vecka, två veckor osv om man vet dagens datum. Eftersom antal dagar per vecka är sju så kan man introducera modulusbegreppet, i det här fallet $\text{mod}(7)$. Beroende på antal dagar i en månad kan man diskutera hur många onsdagar det t.ex. finns i en månad. På det temat finns många problem som presenteras i nedanstående lista.

Tidigare problem: B2006:19, GyC2006:12, C2002:15, GyC2004:11, J2011:10

Dolda siffror

I problem Ecolier 12, Benjamin 5 och Cadet 11 är några siffror dolda i likheterna. Här kan det vara lämpligt att börja med Ecolier och sedan arbeta vidare med Benjamin och Cadet. Svårighetsgraden ökar genom att räknesätten ändras. Resonera om lösningsmetoder.

Fortsätt med Cadet 4, där en * ska ersättas med en siffra. Diskutera med eleverna olika lösningsmetoder och deras effektivitet. Diskutera vad ett primtal är hur man primtalsfaktorerar.

Liknande problem: B2003:9, B2005:1.

Heltal

Många av problemen undersöker de hela talen.

Samband mellan åldrar

Ecolier 3 handlar om sambandet mellan tre syskons åldrar och deras summa. Illustrera deras åldrar på en tallinje och visa med hjälp av den hur summan kan beräknas. Låt Susanne var yngst, äldst och formulera nya påståenden och beräkna summor.

Benjamin 12 handlar om Kates, Kates mamma och Kates mormor åldrar. Vilken är summan av deras åldrar? Hur gammal var mormor när Kates mamma föddes? Hur gammal var Kates mamma när Kate föddes. Illustrera även här deras åldrar på en tallinje. Låt eleverna göra liknande problem med sin egen familj.

Liknande problem: B2001:16, C2001:24, J2008:8.

Tal i lista

Det finns flera problem som handlar om listor av tal. Börja gärna med Benjamin 17, sedan finns det fler vägar att välja att arbeta vidare utifrån det problemet.

I Benjamin 17 finns en lista med sju tal, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Vilken är den minsta summa man kan få om man väljer tre olika tal. Vilken är den största summan man kan få? Skriv upp alla möjliga summor av tre olika tal och jämför hur många gemensamma tal som ingår i två summor.

Vilka summor kan man få om man väljer fyra olika tal ur den givna listan? Vilken är den minsta? Samma sak med fem olika tal, sex olika tal.

Ta upp triangeltal. Förläng lista och räkna ut de följande triangeltalen.
Visa att $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = n(n + 1)/2$.

Liknande problem B2008:15, B2009:16, E2009:8.

I Junior 10 finns det istället 105 tal: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, skrivna i en rad. Vilket tal är det sista i raden? Hur bestämmer man det? Hur kan denna lista kopplas till triangeltalen? Bestäm summan av samtliga tal i listan.

Junior 18

Någon har gjort en lista med heltal, ett av dem är 2018.
Summan av alla dessa heltal är 2018.
Produkten av dessa heltal är också 2018.
Vilket av följande tal kan vara antalet heltal som finns på listan?

A: 2016 B: 2017 C: 2018 D: 2019 E: 2020

Diskutera hur denna lista kan se ut. Vilket är det minsta antalet tal i denna lista om antalet i listan är större än 1?

Tal i nät

Ett antal problem handlar om tal som ska skrivas in i nät av olika slag, t.ex. rutor, trianglar, cirklar. Även här kan man välja ordningen bland problem, det finns några som liknar varandra men är av olika svårighetsgrad.

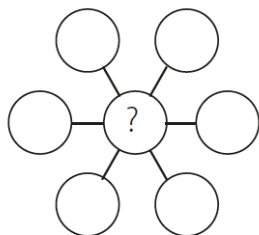
Låt eleverna börja med att lösa Ecolier 23 utan svarsalternativ. Lyssna på deras resonemang. Hur många olika sätt finns det att fylla i rutnätet med de sju talen.

I Benjamin 13 ska Marvin fylla i ett nät av nio trianglar. Talen 2 och 3 är inskrivna i två trianglar. Låt eleverna motivera hur nätet ska fyllas i.

Liknande problem: B2009:12, S2009:18.

Benjamin 24

Skriv in talen 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9 i de sju cirkarna, så att summan längs var och en av de tre linjerna blir densamma.
Vilken är summan av alla de tal som kan stå i mittencirkeln?

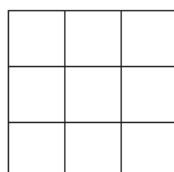


Vilken strategi kan man ha för att lösa ett sådant här problem? Börja med att summera talen. I det här problemet blir summan 42.

Liknande problem: B2002: 22, B2010:10.

Cadet 17

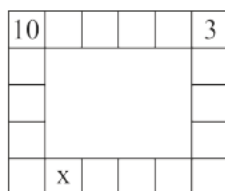
Talen 1 till 9 ska skrivas i rutorna, ett tal i varje ruta. Fem av de summor man får då talen i varje rad och varje kolumn adderas är 12, 13, 15, 16 och 17 (ej nödvändigtvis i denna ordning).
Vilken är den sjätte summan?



Även här börjar vi med att summera talen som blir 45. När rader och kolumner adderas var för sig kommer varje tal att räknas två gånger. Alltså är summan av radsummeror och kolumnsummeror 90. Visa att det går att fylla i nätet så att summorna stämmer.

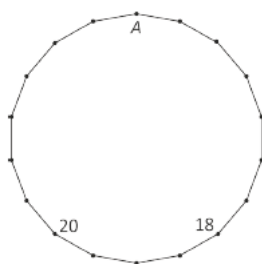
Cadet 20

Ria skriver ett tal i varje ruta i figuren. Talet i varje ruta ska vara summan av talen i de rutor som delar en sida med den aktuella rutan. Två tal är redan utsatta, 10 och 3.
Vad ska Ria skriva i rutan som är markerad med ett x ?



Junior 20

Bilden visar en 18-hörning. I varje hörn ska det skrivas ett tal så att talet blir lika med summan av talen i de två närmsta hörnen. Två tal är givna.
Vilket tal ska stå i hörnet markerat med A?



Diskutera lösningsmetoderna på dessa två problem med eleverna. Få dem att inse att tal på avstånd tre är motsatta tal och tal på avstånd 6 är lika. Låt dem därefter fylla i hela rutnätet. Fortsätt därefter med J 20 som också bygger att hitta avstånd mellan motsatta tal och lika tal.

Liknande problem: J2011:4.

Junior 21

Diana har ritat ett rektangulärt rutnät bestående av 12 rutor. Några av rutorna målade hon svarta. I varje vit ruta skrev hon antalet svarta rutor som delar en sida med den vita rutan, se bilden. Nu gör hon samma sak med ett rutnät med 218 rutor.

Vilket är det största värde Diana kan få som resultat om hon summerar alla tal i rutnätet?

1		2	1
0	3		
1		2	1

I den ursprungliga varianten gör Diana rutor med 2018 rutor. Vilket är då det största värde Diana kan få som resultat om hon summerar alla tal i rutnätet? Undersök samma sak med ett rutnät med udda antal rutor.

Använd gärna rektangeln i årets Cadet 12 som underlag för rutnätet.

Junior 22

Talen 1, 2, 3, 4, 5 och 6 skrivs in i ett 2×3 rutnät, olika tal i varje ruta. Summan av talen i varje rad och i varje kolumn ska vara delbar med 3. På hur många sätt kan detta göras?

Låt eleverna lösa problemet utan svarsalternativ och diskutera sedan kombinatoriska resonemang.

Bokstäver, symboler och siffror

I B15 och J6 har siffror ersatts med bokstäver. Diskutera lösningsmetoder. Bestäm samtliga siffror i B15. Ett sätt att lösa J6 är att istället för att addera de två talen subtrahera ett av talen från 654. Vilken subtraktion bör man i så fall utföra? Kan man tillämpa den metoden i B15 när man vet vad D är.

Liknande problem: B2004:14, B2007:16, B2010: 1, B2015: 19, C2001:13, C2003:22, GyC2008:20, J2006:13.

Delbarhet och rester

Låt a och b vara två heltal. Diskutera vad som menas med att a är delbart med b , a är en multipel av b , b är en delare i a . Ta upp begreppen SGD och MGM. Be eleverna förklara vad rest är.

Junior 5

Mary har plockat 42 äpplen, 60 aprikoser och 90 körsbär. Hon vill fördela dem exakt lika i korgar. Vilket är det största antal korgar som hon kan tänkas behöva?

- Primtalsfaktorisera 42, 60 och 90. Vilka gemensamma delare har de? Är det en SGD?
- Hur många korgar blir det? Hur många frukter av respektive sort i varje korg?
- Vilka andra antal korgar kan frukterna fördelas lika i?
- Ändra antal frukter så största antal korgar blir 5, 8, 10, 15.

Liknande problem: GyCadet 2008:17.

Junior 15

Hur många tresiffriga tal finns det med egenskapen att det tvåsiffriga talet som bildas när man tar bort mittersta siffran är lika med en niondel av det ursprungliga tresiffriga talet?

Hur skriver man ett heltal i utvecklad form? Skriv det tresiffriga och det tvåsiffriga talet i utvecklad form. Vilket samband råder mellan de två talen? Bestäm de tresiffriga talen.

Liknande problem: J2012:12.

Student 3

Tor har sju stenar och en hammare. Varje gång han träffar en sten med hammaren splittras den i exakt fem mindre stenar. Han upprepar det flera gånger. Vilket av följande skulle kunna vara det antal stenar som han slutar med?

Låt eleverna skriva upp antal stenar Tor har efter en träff, två träffar, osv. Hur kan man skriva en formel för antal stenar efter k träffar? Prata om aritmetisk talföljd.

Student 14

Vilket av dessa fem tal delar inte $18^{2017} + 18^{2018}$?

Behandla faktorisering i helklass och primtalsfaktorisera talet. Diskutera varför de andra talen är delare till $18^{2017} + 18^{2018}$?

Liknande problem: J2011:12.

Student 8

På hur många sätt kan talet 1001 skrivas som summan av två primtal?

Vilka tal kan skrivas som summan av två primtal? Diskutera vad primtalstvillingar är. Låt eleverna bestämma tal som kan skrivas som summan av tre primtal.

Liknande problem: S2008:7, S2009:3.

Student 15

Fem kort delas ut: hjärter 3, spader 4, hjärter 5, klöver 6 och ruter 7. Nadja får tre av dem och Riny de övriga. Nadja multiplicerar valörerna på sina tre kort och Riny valörerna på sina två kort. Det visar sig att summan av de två produkterna är ett primtal. Vilken är summan av valörerna på Nadjas kort?

Diskutera primtal. Resonera om lösningsmetoder. Vad kan man säga om de två produkterna om summan ska vara ett primtal?

Student 24

Värdet av $15!$ visas på en tavla. Oturligt nog syns inte den andra och den tionde siffran. Vilka är de två siffrorna? $1 \blacksquare 0767436 \blacksquare 000$

- Vad som menas med $n!$? Diskutera lösningsmetoder.
- Hur bestämmer man antal nollor i slutet av talet?
- Primtalsfaktorisera talet.

Liknande problem J2008:19, J2012:21.

Tal med 2018

Det finns flera problem där talet 2018 är involverat men där andra begrepp är det väsentliga i lösningen

Junior 4

Summan av fem på varandra följande heltal är 10_{2018} . Vilket är talet i mitten?

Hur uttrycker man generellt fem på varandra följande tal? Vilka är de övriga talen? Resonera om olika räknesätt med potenser.

Liknande problem: S2007:17.

Junior 16

Hur många gånger förekommer termen 2018^2 under kvadratrotstecknet i följande korrekta likhet?

$$\sqrt{2018^2 + 2018^2 \dots + 2018^2} = 2018^{10}$$

Resonera om lösningsmetoder. Vilka regler gäller för kvadratrötter? Ändra antal termer under rottecknet och bestäm värdet.

Liknande problem: S2007:21, S2012:11.

Junior 17

Man beräknar $\frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot (10^{2018} - 1)$. Hur många siffror är det i resultatet?

Diskutera lösningsmetoder. Hur många siffror är det i 10^{2018} ? Hur många ettor är det i beräkningen av $\frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot (10^{2018} - 1)$?

Procent

På Cadet, Junior och Student finns i år några problem där begreppet procent ingår. Arbeta gärna med dem samtidigt, både med och utan svarsalternativ. Diskutera lösningsmetoder. Hur ska problemet ändras om de andra alternativen ska vara korrekta?

Cadet 23

Azmi, Burhan och Choo gick tillsammans och handlade. Burhan spenderade endast 15 % av det som Choo spenderade. Azmi däremot spenderade 60 % mer än Choo. Tillsammans spenderade de tre vännerna 55 €. Hur mycket spenderade Azmi?

A: 3 € B: 20 € C: 25 €
D: 26 € E: 32 €

Junior 7

Vad är summan av 25 % av 2018 och 2018 % av 25?

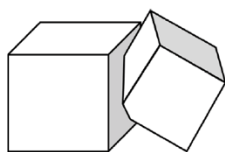
A: 1009 B: 2016 C: 2018
D: 3027 E: 5045

Junior 13

På sommarskolan kan man studera språk, historia och filosofi. 35 % av eleverna som studerar språk, studerar engelska. 13 % av sommarskolans elever studerar ett annat språk än engelska. Ingen elev studerar mer än ett språk. Hur många procent av sommarskolans elever studerar språk?

A: 13 % B: 20 % C: 22 %
D: 48

Student 9



Bilden visar två kuber som har en gemensam del.
90 % av kuben med volym V ligger utanför kuben med volym W .
85 % av kuben med volym W ligger utanför kuben med volym V .
Vilket är förhållandet mellan V och W ?

A: $V = 2/3 W$

B: $V = 3/2 W$

C: $V = 85/90 W$

D: $V = 90/85 W$

E: $V = W$

Student 23

Det finns 40 % fler flickor än pojkar i en klass. Sannolikheten att en slumpmässigt vald delegation på två personer består av en flicka och en pojke är $1/2$.

Hur många elever är det i klassen?

A: 20

B: 24

C: 36

D: 38

E: situationen är inte möjlig.

Tidigare problem med procent: C2001:16, C2002:19, C2003:17, C2015:17, C2016:10, C2017:13, J2016:2, S015:22, S2017:4 och 2017:13.